

*Рутковский М.А.
(ГВУЗ «НГУ», г. Днепрпетровск, Украина)*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗГИБНОЙ И КОЛЬЦЕВОЙ ЖЕСТКОСТЕЙ ПРОФИЛИРОВАННОЙ ОБЕЧАЙКИ БАРАБАНА ШАХТНОЙ ПОДЪЕМНОЙ МАШИНЫ

Отримано аналітичні вирази осереднених циліндричної та кільцевої жорсткостей профільованої обичайки барабана шахтної підйомної машини під дією розподіленого канатного навантаження.

***Ключові слова:** підйомна машина, профільована обичайка, вигинна жорсткість, математична модель.*

Получены аналитические выражения осредненных цилиндрической и кольцевой жесткостей профилированной обечайки барабана шахтной подъемной машины под действием распределенной канатной нагрузки.

***Ключевые слова:** подъемная машина, профилированная обечайка, изгибная жесткость, математическая модель.*

Проблема и её связь с научными и практическими заданиями. Шахтные подъемные машины являются наиболее металлоемким и энергоемким горно-шахтным оборудованием, от надежности которого зависит производительность и безопасность шахтного подъема. К техническому уровню шахтных подъемных машин, качеству проектирования и изготовления узлов и деталей предъявляются высокие требования.

Дальнейшее развитие горных работ на Украине связано с увеличением глубины разрабатываемых горизонтов, повышением грузоподъемности подъемных сосудов, применением более прочных и, поэтому, более тяжелых канатов, а также увеличением суммарной нагрузки от канатов на поверхность канатопроводящих органов. Важной задачей является совершенствование методов расчета и проектирования конструкций барабанных канатопроводящих органов подъемных машин, которые должны удовлетворять как требованиям необходимой прочности и жесткости, так и требованиям минимальной металлоемкости.

Анализ исследований и публикаций. Решением проблемы поиска оптимальной конструкции барабанов подъемных машин и совершенствованием методов их расчета в течение длительного времени занимаются академические и отраслевые НИИ, проектные и проектно-

конструкторские организации Украины. Наибольшее число научно-исследовательских работ в этом направлении выполнено научными сотрудниками кафедры горных машин и инжиниринга НГУ. Расчет барабанов шахтных подъемных машин со спиральной канавкой для наматывания каната может быть проведен методом конечно-элементного анализа, при этом обечайка барабана, в силу равномерности давления намотанного каната и малости шага нарезки канавки, моделируется как профилированная осесимметричная обечайка [1,2]. Однако такой подход не дает аналитического решения и не позволяет оптимизировать вычисления при определении эффективной конструкции обечайки. В ряде случаев, например, при определении коэффициентов податливости, необходимо многократно выполнить твердотельное моделирование барабана и осуществить его прочностной расчет методом конечных элементов, что представляет собой весьма трудоемкую задачу. Поэтому создание математической модели осесимметричной обечайки, допускающей аналитическое решение задачи оптимального проектирования барабана подъемной машины, является **актуальной научной задачей**.

Постановка задачи. Целью настоящей статьи является аналитическое решение задачи по определению изгибной и кольцевой жесткостей профилированной обечайки барабана шахтной подъемной машины.

Изложение материала и его результаты. Известно, что для цилиндрической оболочки, нагруженной осесимметричным давлением, справедливо уравнение изгиба балки на упругом основании [3]:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Bw}{R^2} = q, \quad (1)$$

где D и B – соответственно изгибная и кольцевая жесткости оболочки, которые определяются уравнениями:

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)}, \quad (2)$$

$$B = E \cdot h, \quad (3)$$

где E – модуль Юнга;

h – условные изгибная и кольцевая толщины;

μ – коэффициент Пуассона;

$q = -\frac{T}{Rt}$ – давление каната на оболочку;

где T – статическое натяжение каната в грузовой ветви;

R – радиус срединной поверхности;

t – шаг нарезки витков.

Введем коэффициент изменчивости

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{B}{4R^2D}}. \quad (4)$$

Тогда уравнение равновесия профилированной оболочки (1) примет вид:

$$\frac{d^4w}{dx^4} + 4\beta^4w = \frac{q}{D}. \quad (5)$$

Решения этих уравнений в общем виде имеют вид:

$$w(x) = e^{\beta x} (C_1 \sin(\beta x) + C_2 \cos(\beta x)) + e^{-\beta x} (C_3 \sin(\beta x) + C_4 \cos(\beta x)) + f(x), \quad (6)$$

где $f(x)$ – частное решение уравнения (1);

C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий на концах оболочки.

При расчете обечайки барабана шахтной подъемной машины необходимо учитывать ослабление жесткости обечайки спиральной канавкой под канат, как это прямо в диссертационной работе Заболотного К.С. [1]. Автором принимались следующие допущения:

- обечайка с канавкой под канат рассматривается как пластина;
- спиральная канавка заменяется кольцевой из-за малости угла нарезки;
- кольцевая жесткость зависит от площади поперечного сечения обечайки.

Применим приведенные допущения для задачи осесимметричного изгиба обечайки под действием нагруженной распределенной канатной нагрузки.

Рассмотрим изгиб замкнутой цилиндрической оболочки, с профилированной наружной поверхностью, заданной функцией $f_z(x)$, средним радиусом R и толщиной h , нагруженной равномерным радиальным давлением q . Выделим из профилированной оболочки барабана элементарный участок, представленный на рисунке 1, который образован двумя поперечными сечениями, находящимися на расстоянии dx , и двумя радиальными сечениями, образующими между собой угол $d\varphi$. Расположим систему координат так, чтобы ось x была параллельно оси цилиндра, а ось z была направлена по радиусу. Обозначим перемещения в на-

правлении оси x через u , а в перемещения противоположном направлении оси z через w (прогиб).

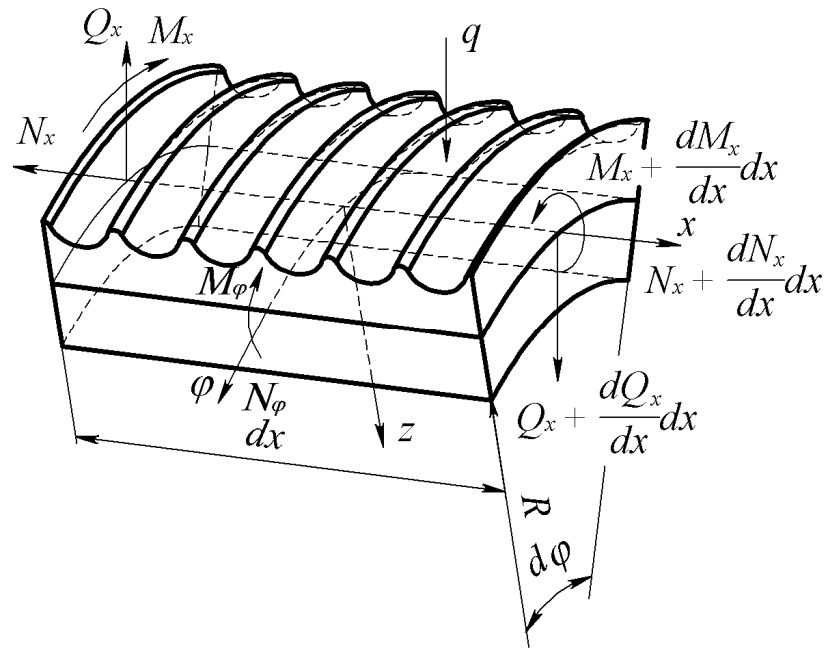


Рисунок 1 – Элементарный участок профилированной оболочки барабана

Так как цилиндрическая оболочка и радиальная нагрузка осесимметричны, то поперечные силы Q_x и крутящие моменты M_x равны нулю, а продольная нагрузка N_φ и изгибающий момент M_φ постоянны по длине окружности.

Исходя из кинематической (второй) гипотезы Кирхгофа-Лява, для такого типа нагружения цилиндрической оболочки радиальные напряжения и радиальная деформация отсутствуют $\sigma_z = 0$ и $\varepsilon_z = 0$.

Выражение внутренней потенциальной энергии деформации цилиндрической оболочки для осесимметричной задачи теории упругости в общем виде может быть записано в виде:

$$\delta U = R \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_{-f_z(x)}^{\frac{h}{2}} [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_\varphi \delta \varepsilon_\varphi] dx d\varphi dz. \quad (7)$$

Исходя из первой гипотезы Кирхгофа-Лява, поперечные перемещения:

$$w \equiv w(x). \quad (8)$$

Предположим, что в случае профилированной оболочки нейтральная поверхность сдвинута от начала координат на расстояние e . Тогда перемещения вдоль оси x могут быть найдены из выражения:

$$u(x, z) \equiv u_0(x) + (e - z) \frac{dw}{dx}. \quad (9)$$

По соотношениям Коши относительная продольная и окружная деформации соответственно равны:

$$\varepsilon_x(x, z) = \frac{du(x, z)}{dx} = \frac{du_0(x)}{dx} + (e - z) \frac{d^2w}{dx^2}; \quad (10)$$

$$\varepsilon_\varphi(x) = -\frac{w}{R}. \quad (11)$$

Введем обозначение

$$\varepsilon_{x_0} = \frac{du_0(x)}{dx}. \quad (12)$$

Выражения для угла поворота и кривизны имеют вид:

$$\psi(x) = \frac{dw}{dx}; \quad (13)$$

$$\kappa(x) = -\frac{d^2w}{dx^2}. \quad (14)$$

На основании закона Гука напряжения σ_x и σ_φ могут быть определены из выражений:

$$\sigma_x(x, z) = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_\varphi) = \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\varepsilon_{x_0} + (e - z) \frac{d^2w}{dx^2} - \mu \frac{w}{R} \right); \quad (15)$$

$$\sigma_\varphi(x, z) = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_\varphi + \mu \varepsilon_x) = \frac{E}{1 - \mu^2} \left(-\frac{w}{R} + \mu \left(\varepsilon_{x_0} + \frac{d^2w}{dx^2} (e - z) \right) \right). \quad (16)$$

Соответственно, напряжения на внутренней и наружной гранях профилированной оболочки описываются уравнениями:

$$\sigma_{xв.}(x) = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\varepsilon_{x_0} + \frac{d^2 w}{dx^2} \left(e - \frac{h}{2} \right) - \mu \frac{w}{R} \right); \quad (17)$$

$$\sigma_{xн.}(x) = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\varepsilon_{x_0} + \frac{d^2 w}{dx^2} (e + f_z(x)) - \mu \frac{w}{R} \right); \quad (18)$$

$$\sigma_{\varphi в.}(x) = \frac{E}{1-\mu^2} \left(-\frac{w}{R} + \mu \left(\varepsilon_{x_0} + \frac{d^2 w}{dx^2} \left(e - \frac{h}{2} \right) \right) \right); \quad (19)$$

$$\sigma_{\varphi н.}(x) = \frac{E}{1-\mu^2} \left(-\frac{w}{R} + \mu \left(\varepsilon_{x_0} + \frac{d^2 w}{dx^2} (e + f_z(x)) \right) \right). \quad (20)$$

Интенсивность напряжений по критерию Мизеса определяется из выражения:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_\varphi)^2 + \sigma_\varphi^2 + \sigma_x^2}. \quad (21)$$

Подставив в выражение (7) соответствующие зависимости для продольных и окружных напряжений и деформаций получим:

$$\begin{aligned} \delta U &= R \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_{-f_z(x)}^{\frac{h}{2}} \left[\sigma_x \delta \left(\varepsilon_{x_0} + (e-z) \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \sigma_\varphi \left(-\frac{\delta w}{R} \right) \right] dx d\varphi dz = \\ &= 2\pi R \int_0^l \left(\delta(\varepsilon_{x_0}) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz + \delta \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) \int_{-f_z(x)}^{\frac{h}{2}} \sigma_x e dz + \right. \\ &\quad \left. + \delta \left(-\frac{d^2 w}{dx^2} \right) \int_{-f_z(x)}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz + \left(-\frac{\delta w}{R} \right) \int_{-f_z(x)}^{\frac{h}{2}} \sigma_\varphi dz \right) dx \end{aligned} \quad (22)$$

Введем внутренние силовые факторы:

$$N_x = \int_{-f_z(x)}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x dz; \quad N_\varphi = \int_{-f_z(x)}^{+\frac{h}{2}} \sigma_\varphi dz; \quad M_x = \int_{-f_z(x)}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x z dz.$$

Тогда, подставив введенные силовые факторы и выражения (10) - (14) в предыдущее выражение внутренней потенциальной энергии деформации (22), получим:

$$\delta U = 2\pi R \int_0^l \left(N_x \delta \varepsilon_{x0} - N_x e \delta \kappa + M_x \delta \kappa + N_\varphi \delta \varepsilon_\varphi \right) dx. \quad (23)$$

Введем аналог закона Гука для внутренних силовых факторов – погонного изгибающего момента и окружной силы:

$$M_x = \int_{-f_z(x)}^{+\frac{h}{2}} \frac{E}{1-\mu^2} \left(\varepsilon_{x0} + (e-z) \frac{d^2 w}{dx^2} - \mu \frac{w}{R} \right) z dz; \quad (24)$$

$$N_\varphi = \int_{-f_z(x)}^{+\frac{h}{2}} \frac{E}{1-\mu^2} \left(-\frac{w}{R} + \mu \left(\varepsilon_{x0} + \frac{d^2 w}{dx^2} (e-z) \right) \right) dz; \quad (25)$$

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-f_z(x)}^{+\frac{h}{2}} \frac{E}{1-\mu^2} \left(\varepsilon_{x0} + (e-z) \frac{d^2 w}{dx^2} - \mu \frac{w}{R} \right) dz = \\ &= \frac{E}{(1-\mu^2)} \left(\left(\varepsilon_{x0} + e \frac{d^2 w}{dx^2} - \mu \frac{w}{R} \right) \left(\frac{h}{2} + f_z(x) \right) + \frac{1}{2} \frac{d^2 w}{dx^2} \left(f_z^2(x) - \frac{h^2}{4} \right) \right). \end{aligned} \quad (26)$$

В зависимости от изгибной жесткости лобовин возможны два предельных случая:

1) лобовины имеют высокую изгибную жесткость и препятствуют деформации обечайки в осевом направлении ($\varepsilon_{x0} = 0$);

2) жесткость лобовин позволяет свободно деформироваться обечайке в осевом направлении ($N_x = 0$).

Таким образом, приравняв правую часть выражения (26) нулю, получим:

$$\varepsilon_{x_0} = -\frac{\frac{1}{2} \frac{d^2 w}{dx^2} \left(f_z^2(x) - \frac{h^2}{4} \right)}{\left(\frac{h}{2} + f_z(x) \right)} - e \frac{d^2 w}{dx^2} + \mu \frac{w}{R} = -\frac{1}{2} \frac{d^2 w}{dx^2} \left(f_z(x) - \frac{h}{2} + 2e \right) + \mu \frac{w}{R}. \quad (27)$$

Подставив полученное выражение (27) в выражения для погонного изгибающего момента (24) и окружной силы (25), имеем:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-f_z(x)}^{+\frac{h}{2}} \frac{E}{1-\mu^2} \left(-\frac{1}{2} \frac{d^2 w}{dx^2} \left(f_z(x) - \frac{h}{2} + 2e \right) + \mu \frac{w}{R} + (e-z) \frac{d^2 w}{dx^2} - \mu \frac{w}{R} \right) z dz = \\ &= \int_{-f_z(x)}^{+\frac{h}{2}} \frac{E}{1-\mu^2} \frac{d^2 w}{dx^2} \left(\frac{h}{4} - \frac{f_z(x)}{2} - z \right) z dz = \\ &= \frac{E}{1-\mu^2} \frac{d^2 w}{dx^2} \left(\frac{h}{8} z^2 - \frac{f_z(x)}{4} z^2 - \frac{z^3}{3} \right) \Bigg|_{-f_z(x)}^{+\frac{h}{2}} = \\ &= -\frac{E}{1-\mu^2} \frac{d^2 w}{dx^2} \left(\frac{h^3}{96} + \frac{f_z(x)h^2}{16} + \frac{f_z^2(x)h}{8} + \frac{f_z^3(x)}{12} \right); \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} N_\varphi &= \int_{-f_z(x)}^{+\frac{h}{2}} \frac{E}{1-\mu^2} \left(-\frac{w}{R} + \mu \left(-\frac{1}{2} \frac{d^2 w}{dx^2} \left(f_z(x) - \frac{h}{2} + 2e \right) + \mu \frac{w}{R} + \frac{d^2 w}{dx^2} (e-z) \right) \right) dz = \\ &= \int_{-f_z(x)}^{+\frac{h}{2}} \frac{E}{1-\mu^2} \left(-\frac{w}{R} + \mu \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \left(\frac{h}{4} - \frac{f_z(x)}{2} - z \right) + \mu \frac{w}{R} \right) \right) dz = \\ &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(-\frac{w}{R} z + \mu \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \left(\frac{h}{4} z - \frac{f_z(x)}{2} z - \frac{1}{2} z^2 \right) + \mu \frac{w}{R} z \right) \right) \Bigg|_{-f_z(x)}^{+\frac{h}{2}} = \\ &= -\frac{Ew}{R} \left(\frac{h}{2} + f_z(x) \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Отсутствие параметра e в полученных выражениях свидетельствует о том, что при расчетах осесимметричной деформации профилированной обечайки нет необходимости учитывать смещение нейтральной линии.

В полученных выражениях (28) и (29) заменим множители при прогибе w и его производной на изгибную D_1 и кольцевую B_2 жесткости соответственно:

$$D_1 = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{h^3}{96} + \frac{f_z(x)h^2}{16} + \frac{f_z^2(x)h}{8} + \frac{f_z^3(x)}{12} \right), \quad (30)$$

$$B_2 = E \left(\frac{h}{2} + f_z(x) \right). \quad (31)$$

Применив метод многих масштабов, найдем осредненные изгибную D_1 и кольцевую B_2 жесткости в первом приближении. Для этого проинтегрируем отношения выражений для изгибной (30) и кольцевой (31) жесткостей в пределах половины шага нарезки τ :

$$D_1 = \frac{\tau}{\int_0^\tau \left(\frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{h^3}{96} + \frac{f_z(x)h^2}{16} + \frac{f_z^2(x)h}{8} + \frac{f_z^3(x)}{12} \right) \right)^{-1} dx} ; \quad (32)$$

$$B_2 = \int_0^\tau \frac{E}{\tau} \left(\frac{h}{2} + f_z(x) \right) dx. \quad (33)$$

Приведенное выражение является аналитическим решением задачи по определению изгибной и кольцевой жесткостей профилированной обечайки.

Выводы.

1. Полученные выражения осредненных цилиндрической и кольцевой жесткостей являются математической моделью изгиба профилированной обечайки под действием распределенной канатной нагрузки.
2. При расчетах осесимметричной деформации профилированной обечайки нет необходимости учитывать смещение нейтральной линии относительно срединной поверхности профилированной оболочки.

Библиографический список

1. Заболотный К.С. *Научное обоснование технических решений по повышению канатоемкости и уменьшению габаритов шахтных подъемных машин с цилиндрическими барабанами: автореф. дис. на соискание науч. степени д-ра техн. наук: спец. 05.15.16. «Горные машины» / К.С. Заболотный. – Днепропетровск, 1997. – 44с.*

2. Беспалько Т.В. Оптимизация по канатоемкости проектных параметров барабанов шахтных подъемных машин: автореф. дис. на соискание науч. степени канд. техн. наук: спец. 05.05.06. «Горные машины» / Т.В. Беспалько. – Днепропетровск, 2004. – 19с.

3. Тимошенко С.П. Пластины и оболочки / С.П. Тимошенко, С.Войновский. – Кригер : пер. с англ. – М.: Наука, 1966. – 635 с.

Рекомендована к печати д.т.н., проф. Финкельштейном З.Л.