УДК 622.4.012.2+532.012+536.7

к.т.н. Мусиенко В.Н.
(ДонГТУ, г. Алчевск, Украина)

КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ВЯЗКИХ ДВИЖЕНИЙ ПЫЛЕ-ГАЗОВОЙ СМЕСИ

Надані феноменологічні рівняння в'язкого руху складної пиле-газової суміші, що складені методом неравновісної термодинаміки незворотних процесів.

Ключові слова: *неравновісна термодинаміка, кінетичні рівняння, руднична атмосфера.*

Приведены феноменологические уравнения вязких движений сложной пыле-газовой смеси, полученные методом неравновесной термодинамики необратимых процессов.

Ключевые слова: *неравновесная термодинамика, кинетические уравнения, рудничная атмосфера.*

Постановка проблемы и ее связь с важными научными и практическими заданиями. Проблема содержания рудничной атмосферы в состоянии, соответствующем требованиям стандартов безопасности труда, весьма актуальна в условиях современных шахт.

Повышенная температура и влажность, запыленность и загазованность рудничного воздуха способствуют увеличению вязкости, теплопроводности и электропроводности среды. Это создает условия для самопроизвольных химических реакций и ионизации частиц. Рудничная атмосфера представляется как открытая динамическая многокомпонентная трехфазная система, взаимодействующая с внешними силовыми полями. Среди них особое место занимает электромагнитное поле, взаимодействующее с системой посредством пондеромоторных сил [1]. В результате такого взаимодействия поле влияет на движение среды, а движение, в свою очередь влияет на поле. Учет многообразия факторов влияния позволяет расширить представления о процессах, происходящих в рудничной атмосфере, установить новые закономерности и разработать новые способы содержания рудничного воздуха в состоянии, соответствующем требованиям безопасности труда.

Анализ последних достижений. Вязкие движения газов изучают в курсе газодинамики [1-3]. Наибольшее развитие этот вопрос получил в теории пограничного слоя [2-4]. Вязкие газы в поле электромагнитных

сил являются предметом исследований электро-магнитогазодинамики [1-5]. Двухфазные дисперсные системы в поле электрических сил изучают в теории двухфазных сред [6 и др.]. Недостатком указанных работ является описание вязких движений с позиций равновесной термодинамики обратимых процессов. В работах [7-8] приведены различные феноменологические (кинетические) уравнения, описывающие вязкие движения газовых смесей, как неравновесные и необратимые процессы. Достоинством этих уравнений является их хорошее экспериментальное подтверждение, включающее и полное совпадение с известными экспериментальными законами (законы Фурье, Фика, Ома и др.) К их недостаткам следует отнести недостаточно полный учет всех влияющих факторов в вопросах описания процессов в рудничной атмосфере.

Цель данной работы - составление кинетических уравнений вязкого движения рудничного воздуха с учетом многообразия влияющих факторов.

Изложение основного материала. Рудничная атмосфера моделируется в виде многокомпонентной тепло-электропроводной среды, взаимодействующей с внешними силовыми полями. Среди этих полей рассматриваются два типа: электромагнитное поле и поле консервативных потенциальных сил.

Компонентами системы являются: газы, из которых состоит воздух, рудничные газы (метан, углекислый газ, сероводород и др.), влага, рудничная пыль. Число компонент определяется в зависимости от специфики решаемых задач. Каждая компонента характеризуется своим набором термодинамических параметров.

Основные результаты данной работы базируются на положениях неравновесной термодинамики необратимых процессов [7-8] и механики сплошной среды [1].

Любая экстенсивная величина, характеризующая свойство системы, удовлетворяет своему уравнению баланса, которое записывается так [7-8]:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_E = \sigma_E , \qquad (1)$$

где E – количество величины в единице объема среды (плотность величины);

$\vec{J}_E$ - поток величины E через контрольную поверхность;

σ_E - локальное производство (источник или сток) того же свойства за счет внутренних причин;

$\nabla(\ldots)$ - векторный дифференциальный оператор Гамильтона.

Если $\sigma_E = 0$, то величина E сохраняется в данном процессе. Основным уравнением, из которого вытекают все дальнейшие построения, считается уравнение баланса энтропии. Это уравнение получают на основании законов сохранения массы, заряда, импульса и полной энергии. Причем, полной энергией считают сумму плотностей кинетической, потенциальной и внутренней энергии вещества и плотности энергии электромагнитного поля, а импульс принимают в виде суммы плотности импульса вещества и плотности электромагнитного импульса [8].

Наиболее важной характеристикой обратимости и равновесности процессов является источник энтропии (σ_s) или диссипативная функция ($\theta = T\sigma_S$). В состоянии равновесия энтропия сохраняется $\sigma_s = 0$. При отклонении от равновесия энтропия возрастает $\sigma_s > 0$.

Для вязкой многокомпонентной тепло-электропроводной среды, движущейся в поле потенциальных и электромагнитных сил, с учетом наличия химических реакций диссипативная функция представляется в виде комбинации известных решений [7-8]:

$$\theta = T \cdot \sigma_S = -\frac{1}{T}\nabla T \cdot \vec{J}_q - \sum_1^n \left[(\nabla \mu_k)_T + \nabla \psi_k - \vec{f}_k \right] \cdot \vec{J}_k - P : \nabla \vec{V} - \sum_1^r A_i w_i \,, \quad (2)$$

где T – абсолютная температура;

$\vec{J}_q$ - вектор теплового потока;

$(\nabla \mu_k)_T = \nabla h_k - T \nabla S_k$ - градиент химического потенциала k-го компонента системы, вычисленный при постоянной температуре;

$h_к, S_к$- соответственно удельные парциальные энтальпия и энтропия;

$\Psi_к$ – потенциал поля консервативных массовых сил, действующих на k-й компонент системы;

$\vec{f}_k$ - сила Лоренца, действующая на единицу массы компонента k, вычисляется по формуле:

$$\vec{f}_k = z_k \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{\upsilon}_k \times \vec{H} \right), \quad (3)$$

где z_k – заряд k -го компонента на единицу его массы;

$\vec{E}, \vec{H}$ - векторы напряженности электрического и магнитного поля соответственно;

$\vec{\upsilon}_k$ - скорость k –го компонента; c – скорость света;

$\vec{J}_k$ - диффузионный поток массы компонента k, вычисляемый по формуле:

$$\vec{J}_k = \rho_k\left(\vec{\upsilon}_k - \vec{V}\right), \tag{4}$$

где $\rho_к$ - плотность компонента k;

$\vec{V}$ - скорость центра масс индивидуального объема среды, рассчитываемая по формуле:

$$\vec{V} = \sum_1^n \frac{\rho_k}{\rho}\vec{\upsilon}_k = \sum_1^n \varphi_k \vec{\upsilon}_k, \tag{5}$$

где $\rho = \sum_1^n \rho_k$ - плотность среды;

$\varphi_k = \frac{\rho_k}{\rho}$ - массовая доля k -го компонента;

P – тензор вязких давлений среды;

$\nabla\vec{V}$ – тензор-градиент скорости центра масс;

$P:\nabla\vec{V}$ - двойное скалярное произведение тензоров;

$A_i = -\sum_1^n \nu_{ki}\mu_i$ - сродство i-й линейнонезависимой химической реакции;

ν_{ki} - стехиометрические коэффициенты химической реакции;

w_i - скорость i-й химической реакции;

n- число компонент системы; r≤n-1 – число линейнонезависимых химических реакций.

К уравнению (2) присоединяют следующие.

Уравнение Гиббса-Дюгема [7]

$$S_{(V)}\nabla T - \nabla p + \sum_n^n \rho_k \nabla\mu_k = 0, \tag{6}$$

где $S_{(V)}$ – плотность энтропии; $S_{(V)} = \sum_1^n \rho_k \cdot s_k$

p - давление в системе.

Уравнение диффузионного потока энтропии [8]

$$\vec{J}_S = T\vec{J}_q + \sum_1^n S_k \vec{J}_k \,, \tag{7}$$

Уравнение, являющееся следствием уравнений (4) и (5)

$$\sum_1^n \vec{J}_k = 0 \,, \tag{8}$$

Следуя [7,8], обозначим в уравнении (2) обобщенные термодинамические силы через X_i, а сопряженные с ними термодинамические потоки $-Y_i$. В результате имеем следующее

$$X_1 = -\frac{1}{T}\nabla T \,; \;\; X_{2k} = -\left[\left(\nabla \mu_k\right)_T + \nabla \Psi_k - \vec{f}_k\right]; \;\; X_3 = -\nabla \vec{V} \,; \;\; X_{4i} = -A_i \,;$$
$$Y_1 = \vec{J}_q \,; \; Y_{2k} = \vec{J}_k \,; \;\; Y_3 = P \,; \;\; Y_{4i} = w_i \,. \tag{9}$$

Согласно [7,8] предполагается, что между потоками и силами существует линейная зависимость

$$Y_i = \sum_1^n L_{ik} X_k \,, \tag{10}$$

где L_{ik}- феноменологические (или кинетические) коэффициенты.

Если потоки и силы линейно независимы, то матрица коэффициентов $\{L_{ik}\}$ должна быть симметричной. Элементы матрицы должны удовлетворять соотношениям Онсагера [7,8]. В противном случае соотношения Онсагера не обязательно выполняются и феноменологические коэффициенты определяются не однозначно [8].

Согласно равенствам (6)-(8) и между потоками и между силами существует линейная зависимость. Поэтому строгого соответствия соотношениям Онсагера добиться невозможно. Однако можно так подобрать феноменологические коэффициенты, что указанные соотношения будут выполняться [8].

Кроме того, необходимо соблюдение принципа симметрии Кюри [7,8] и соответствия тензорной размерности определяемых величин.

Предварительно разложим тензоры вязких давлений и градиента скорости центра масс на шаровые тензоры и девиаторы с нулевым следом

$$P = p1 + \pi \,, \tag{11}$$

$$\nabla\vec{V} = \frac{1}{3}(\nabla\cdot\vec{V})1 + D_{\varepsilon}^{\cdot} \ , \qquad (12)$$

где p - давление среды определяется по формуле

$$p = \frac{1}{3}P:1 = \frac{1}{3}trP \ , \qquad (13)$$

1 – единичный тензор второго ранга; π, $D_{\varepsilon}^{\cdot}$ - тензоры-девиаторы вязких давлений и скоростей деформаций среды.

Используя (2) и (9)-(12), получаем следующие феноменологические уравнения:

$$\vec{J}_q = -\frac{L_{qq}}{T}\cdot\nabla T - \sum_1^n L_{qk}\cdot\left[(\nabla\mu_k)_T + \nabla\Psi_k - \vec{f}_k\right] - \vec{L}_{qv}\cdot D_{\varepsilon}^{\cdot} \ , \qquad (14)$$

$$\vec{J}_k = -L_{iq}\cdot\nabla T - \sum_1^n L_{ik}\cdot\left[(\nabla\mu_k)_T + \nabla\Psi_k - \vec{f}_k\right] - \vec{L}_{iv}\cdot D_{\varepsilon}^{\cdot}, \qquad (15)$$

$$\pi = -\vec{L}_{qv}\otimes\nabla T - \sum_1^n \vec{L}_{vk}\otimes\left[(\nabla\mu_k)_T + \nabla\Psi_k - \vec{f}_k\right] - L_{vv}\cdot D_{\varepsilon}^{\cdot} \ , \qquad (16)$$

$$p = -L_{pp}(\nabla\cdot\vec{V}) - \sum_1^r L_{pi}A_i \ , \qquad (17)$$

$$w_j = -L_{jp}(\nabla\cdot\vec{V}) - \sum_1^r L_{jk}A_k \ , \qquad (18)$$

где $L_{qq}, L_{qk}, \vec{L}_{qv}$ и т.д. - феноменологические (или кинетические) коэффициенты; $(\ldots)\otimes(\ldots)$ – знак тензорного произведения векторов.

Кинетические уравнения (14)-(18) отличаются от известных [8] наличием последних членов в уравнениях (14),(15) и первых двух членов в уравнении (16), а так же тем, что тензоры π и D_{ε}^{*} не симметричны.

Коэффициенты этих уравнений удовлетворяют соотношениям Онсагера [7,8] следующего вида:

$$L_{qk} = L_{kq};\ \vec{L}_{qv} = \vec{L}_{vq};\ \vec{L}_{iv} = \vec{L}_{vi};\ L_{ik} = L_{ki};\ L_{pi} = L_{ip} \ , \qquad (19)$$

Кроме того, они имеют разную тензорную размерность, что обусловлено следующим.

Коэффициент L_{qq} пропорционален тензору теплопроводности [8].

$$\Lambda = \frac{L_{qq}}{T}. \qquad (20)$$

В общем случае Λ - несимметричный тензор второго ранга [8] при наличии диффузионных потоков масс и внешнего магнитного поля. Если тепловой анизотропией можно пренебречь при отсутствии магнитного поля, этот тензор может быть принят в виде шарового тензора.

$$\Lambda = \lambda I\,, \qquad (21)$$

где λ - коэффициент теплопроводности.

Коэффициенты $L_{qk} = L_{kq}$ отражают два взаимообратных эффекта Дюфура и Соре [8]. Первый из них состоит в возникновении теплового потока под воздействием потоков диффузии, а второй – в возникновении потока вещества под влиянием градиента температуры (термодиффузия). Величины L_{qk}, L_{kq}, L_{ik} являются тензорами второго ранга, зависящими от свойств симметрии системы [8].

Последнее слагаемое в уравнении (14) учитывает явление самопроизвольного разогрева вязкой среды в процессе ее движения. Это связано с образованием теплоты внутреннего молекулярного трения или некомпенсированного тепла трения [1-3].

Вместе с тем, известные феноменологические уравнения такое явление не учитывают, что является их недостатком.

Коэффициент L_{ik} характеризует чистую диффузию массы и электрического заряда. Основным источником этого явления является обобщенная термодинамическая сила $(\nabla\mu_k)_T + \nabla\Psi_k - \vec{f}_k$ действующая на k -й компонент системы.

Учет фактора вязкости в процессах диффузии требует обоснования. Для этого массовую скорость выразим по формуле (5), а девиатор скоростей деформации – по формуле (12). Кроме того, используем уравнение неразрывности, выражающее закон сохранения массы [1-3]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{V}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\vec{V} = 0\,, \qquad (22)$$

Кинетический коэффициент $\vec{L}_{kv}$ при этом определяется как частное решение системы уравнений

$$\sum_1^n \rho_i \vec{A}_{ki} + \frac{1}{3}\frac{d\rho}{dt}\vec{L}_{kv} = v_k \rho_k \sum_1^n \rho_i \vec{\upsilon}_i\,, \qquad (23)$$

$$\sum_{1}^{n} a_{ik}\vec{\upsilon}_i = \nu_k \rho_k \vec{\upsilon}_k;\ (k = 1,2...n), \tag{24}$$

где обозначено:

$$\vec{A}_{ki} = \vec{L}_{kv} \cdot \nabla \vec{\upsilon}_i; \qquad a_{ik} = a_{ki} = \vec{L}_{kv} \cdot \nabla \varphi_i, \tag{25}$$

v_k - безразмерный неотрицательный параметр ($v_k \in [0;1]$) определяется из уравнений (23), (24).

При выполнении указанных условий получим равенство

$$-\vec{L}_{kv} \cdot D_{\varepsilon}^{\cdot} = v_k \rho_k (\vec{\upsilon}_k - \vec{V}). \tag{26}$$

Сравнивая это равенство с уравнением (4) заключаем, что величина v_k означает долю вклада вязкости в диффузионный поток массы и заряда.

Кроме того, из равенства (8) следует следующее

$$\sum_{1}^{n} \vec{L}_{kv} = -\sum_{1}^{n} \vec{L}_{kq} \cdot \nabla T \cdot D_{\varepsilon}^{-1} - \sum_{1}^{n}\sum_{1}^{n} L_{ki} \cdot \left[(\nabla \mu_i)_T + \nabla \Psi_i - \vec{f}_i\right] \cdot D_{\varepsilon}^{-1}, \tag{27}$$

где D_{ε}^{-1} - тензор, обратный девиатору скоростей деформаций.

Равенство (27) устанавливает связи феноменологических коэффициентов уравнения (15).

В отличие от известных соотношений [8] уравнение (16) определяет не симметричный тензор-девиатор вязких давлений, образующийся под воздействием трех типов обобщенных термодинамических сил.

Первая составляющая этого тензора характеризует термическое давление, возникающее в результате неравномерности распределения температуры в среде. Вторая составляющая тензора характеризует дополнительное диффузионное давление, порожденное воздействием обобщенной термодинамической силы $(\nabla \mu_k)_T + \nabla \Psi_k - \vec{f}_k$. Обе составляющие давлений реализуются как перекрестный эффект, вытекающий из соотношений Онсагера.

Необходимость учета диффузионной составляющей тензора давлений вытекает из следующего.

Уравнение баланса плотности импульса центра масс вещества записывается в следующем виде [1-8]:

$$\frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t} = -\nabla\cdot(\rho\vec{V}\otimes\vec{V}+P) - \sum_{1}^{n}\rho_k(\nabla\Psi_k - \vec{f}_k), \qquad (28)$$

где $\rho\vec{V}$ - плотность импульса центра масс;

$\rho\vec{V}\otimes\vec{V}$ - конвективный поток плотности импульса;

P - диффузионный поток плотности импульса;

$\sum_{1}^{n}\rho_k(\nabla\Psi_k - \vec{f}_k)$.- производство плотности импульса.

Аналогично (28) можно составить уравнение баланса потока диффузии массы, если рассматривать вектор потока диффузии в качестве дополнительного импульса, возникающего в этом процессе.

Действительно, величина $\vec{V}_k = \vec{\upsilon}_k - \vec{V}$ представляет относительную скорость движения компоненты k по отношению к центру масс индивидуального объема среды. Тогда $\vec{J}_k = \rho_k\vec{V}_k$ представляет плотность дополнительного импульса, который получает k-я компонента по отношению к системе центра масс.

Уравнение баланса этого импульса представляется аналогично (28) в таком виде.

$$\frac{\partial(\rho\vec{V}_k)}{\partial t} = -\nabla\cdot(\rho_k\vec{V}_k\otimes\vec{V}_k + P_k) - \rho_k(\nabla\Psi_k - \vec{f}_k). \qquad (29)$$

В этом уравнении тензор дополнительных вязких давлений k-го компонента P_k играет роль диффузионного потока импульса $\rho_k\vec{V}_k$.

Уравнение (29) следует рассматривать совместно с уравнениями (22), (28) к которым присоединяются уравнения баланса плотности импульса вещества и поля, потенциальной энергии и масс компонентов, имеющих вид соответственно [7-8]

$$\frac{\partial(\rho\vec{V} + \frac{1}{c}\vec{E}\times\vec{H})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{V}\otimes\vec{V} + P - T) = 0; \qquad (30)$$

$$\frac{\partial(\rho_k\Psi_k)}{\partial t} + \nabla\cdot(\Psi_k\vec{J}_k) = \vec{J}_k\cdot\nabla\Psi_k + M_k\Psi_k\sum_{1}^{r}\nu_{ki}w_i, \qquad (31)$$

$$\frac{\partial\rho_k}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_k\vec{\upsilon}_k) = \sum_{1}^{r}M_k\nu_{ki}\cdot w_i, \qquad (32)$$

где $\frac{1}{c}\vec{E}\times\vec{H}$ - плотность импульса электромагнитного поля [8];

M_k - масса *k-го* компонента системы;

Т-тензор электромагнитных напряжений среды Максвелла [8], вычисляется по формуле:

$$T = \vec{E} \otimes \vec{E} + \vec{H} \otimes \vec{H} - \frac{1}{2}(E^2 + H^2)I\,. \qquad (33)$$

Если удается найти тензор дополнительных вязких напряжений компонент, то феноменологический коэффициент $\vec{L}_{vk}$ определяется из выражения

$$-\vec{L}_{vk} \otimes \left[(\nabla\mu_k)_T + \nabla\Psi_k - \vec{f}_k\right] = P_k - p_k 1, \qquad (34)$$

где $p_k = \frac{1}{3}P_k : 1$ - парциальное давление среды компонента k.

Кинетический коэффициент L_{vv} в уравнении (16) характеризует вязкость системы центра масс индивидуального объема среды. В общем случае он представляет тензор четвертого ранга [8]. Общее число коэффициентов вязкости составляет 81. Возможность сокращения числа этих коэффициентов обсуждалась в работе [8].

При изучении вопроса о коэффициентах вязкости следует учитывать и уравнение (17). Необходимо отметить, что коэффициент L_{pp} в уравнении (17) представляет коэффициент объемной или второй вязкости [8].

$$L_{pp} = \eta_v\,. \qquad (35)$$

Рассматривая среду как однокомпонентную при отсутствии магнитного поля, ее вязкость характеризуется тремя коэффициентами: объемной, сдвиговой и крутильной [8]. Причем последний коэффициент обусловлен антисимметричной частью тензора давлений.

При наличии магнитного поля и симметрии тензора давлений с учетом ориентации одной из координатных осей по направлению вектора напряженности магнитного поля число коэффициентов вязкости равно семи [8].

Вопрос о возможности пренебрежения антисимметричной частью тензора давлений решается на основании анализа уравнения баланса внутреннего момента количества движения с учетом пондеромоторного момента [1,8].

Внутренний момент количества движения возникает вследствие вращательного движения частиц, составляющих систему [1,8]. Уравнение баланса этой величины представляется в следующем виде [1]

$$\rho \frac{d\vec{S}}{dt} = \rho\vec{h} + \nabla \cdot Q - 2\vec{P}^a , \qquad (36)$$

где $\vec{S}$ – аксиальный вектор, эквивалентный антисимметричному тензору внутреннего момента количества движения [8];

$\vec{h}$ - главный момент распределенных массовых пар [1];

Q – тензор моментов распределенных поверхностных пар [1];

$\vec{P}^a$ - аксиальный вектор, эквивалентный антисимметричной части тензора давлений [8].

Векторы $\vec{S}, \vec{h}$ определяются с привлечением уравнений электродинамики, касающихся вопроса о пондеромоторном моменте [1].

Уравнения (17) и (18) описывают скалярные процессы химического характера, связанные с явлениями объемной вязкости, а так же возможные перекрестные явления. Для определения коэффициентов этих уравнений следует привлекать уравнения связи с другими параметрами системы и, в частности, уравнение Гиббса-Дюгема (6).

Выводы.

1. Получены феноменологические уравнения вязких движений сложной пыле-газовой смеси, моделирующие состояние рудничной атмосферы, которые базируются на положениях неравновесной термодинамики необратимых процессов.

2. Приведенные уравнения отличаются от известных учетом фактора вязкости в тепловом потоке и потоках диффузии масс компонентов смеси, а так же учетом термического и диффузионного факторов в уравнении, определяющем давление системы.

3. Кинетические коэффициенты уравнений определяются экспериментально. Поэтому необходимо провести специальные исследования с целью определения этих коэффициентов.

Библиографический список

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды /Л.И.Седов. – 4-е изд.перераб. и доп.; т.1. - М.: Наука, 1983. – 528с.

2. Лейцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лейцянский. - 6-е изд.перераб. и доп. М.: Наука, 1987. – 840с.

3. Сергель О.С.Прикладная гидрогазомеханика: учеб. [для авиац. выш. уч. зав.] / О.С. Сергель - М.: Машиностроение, 1981. – 374с.

4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1974. – 712с.

5. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика: учеб./ Г.Н. Абрамович. - 4-е изд.перераб. и доп. – М.: Наука, 1976.- С. 765 – 838.

6. Основы электрогазодинамики дисперсных систем / И.П Верещагин, В.И. Литвинов, Г.З. Мирзабелян, М.М. Пашин. – М.: Энергия, 1974. - 480с.

7. Булатов Н.К. Термодинамика необратимых процессов / Н.К. Булатов, А.Б. Лундин. – М : Химия,1984. – 527с.

8. Де Гроот С. Неравновесная термодинамика / С. Де Гроот, П. Мазур.; пер.с англ. Д.Н.Зубарева.- М.: Мир, 1964. - 455с.

Рекомендована к печати д.т.н., проф. Бабиюком Г.В.