УДК 622.4.012.2.+532.013

к.т.н. Мусиенко В.Н.,
к.т.н. Щербак В.В.
(ДонГТУ, г. Алчевск, Украина)

ДИНАМИКА ГАЗОВОГО ПОТОКА В ПИРАМИДАЛЬНОМ НАСАДКЕ НА ВЕНТИЛЯТОР

Надане точне рішення задачі газодінамики, яке може бути використане в питаннях вентиляції.

Ключові слова: *вентилятор, дифузор, конфузор, насадок, газовий потік.*

Приведено точное решение задачи газодинамики, которое может быть использовано в вопросах вентиляции.

Ключевые слова: *вентилятор, диффузор, конфузор, насадок, газовый поток.*

Постановка проблемы и связь ее с научными и практическими заданиями.

В технологии горного производства, строительстве, металлургии и других отраслях важным вспомогательным процессом является вентиляция помещений и сооружений. Вопросы вентиляции решают, в первую очередь, проблему обеспечения жизнедеятельности людей, безопасности их труда и другие актуальные проблемы.

Насадки на вентилятор (диффузоры и конфузоры) применяют в качестве простых и эффективных средств регулирования параметров воздушных потоков при вентиляции зданий и сооружений, а также в других вопросах техники [1-3].

Важным фактором, влияющим на эффективность этого средства, является правильный выбор его геометрических параметров, который определяется газодинамическими процессами в насадке.

Анализ последних достижений.

До настоящего времени расчеты диффузоров и конфузоров базируются на теории элементарной струйки [3], согласно которой рассматривают одномерные движения газа без учета геометрии насадка и граничных условий.

В работах [4,5] рассмотрены некоторые специальные виды пространственных движений газа, в частности конические течения, при сверх – и гиперзвуковых скоростях движения газовых потоков. Однако их невозможно использовать в изучаемом вопросе.

В работе [6] впервые дано точное решение задачи газодинамики об установившемся движении в коническом насадке под воздействием вентилятора.

Диффузоры и конфузоры в виде усеченного конуса применяют преимущественно с осевыми вентиляторами, имеющими круглые нагнетающие отверстия. Для центробежных вентиляторов характерна прямоугольная форма нагнетательных отверстий. В этом случае применяют насадки в виде усеченной пирамиды.

Формулирование целей статьи (постановка задач).

В данной работе решается задача газодинамики о движении газа в пирамидальном насадке. Задача решается методом использования дополнительного уравнения, облегчающего ее решение [7].

Рассматривается установившееся движение идеального (не вязкого) газа, находящегося в состоянии локального термодинамического равновесия. Существует уравнение состояния газа, в качестве которого принято уравнение Менделеева – Клапейрона:

$$p = R\rho T\,, \tag{1}$$

где p - давление; ρ- плотность газа; T- абсолютная температура; R- газовая постоянная.

В декартовой системе координат прямоугольная усеченная пирамида описывается уравнениями:

$$|x| \le a(1 \pm z/c); \quad |y| \le b(1 \pm z/c); \quad z \in [0,h], \tag{2}$$

где a,b – половина длины сторон прямоугольного основания пирамиды; h – высота усеченной пирамиды; c – высота фиктивной вершины пирамиды.

Следует отметить, что регулирование параметров потока осуществляют с использованием как расширяющихся (конфузоры), так и сужающихся (диффузоры) насадков. Для диффузора в формулах (2) следует принимать знак „+“, а для конфузоров – знак „–“.

Основным уравнением прикладной газодинамики [3], используемым в расчетах диффузоров и конфузоров, является равенство

$$G = \rho w F = const\,, \tag{3}$$

где w – продольная компонента скорости газового потока;

F – текущая площадь поперечного сечения насадка.

Величину F в данном случае, используя (2), можно вычислить по формуле

$$F = 4ab\left(1 \pm \frac{z}{c}\right)^2 = 4\frac{ab}{c^2}(c \pm z)^2, \tag{4}$$

Из уравнений (3) и (4) находим продольную компоненту плотности потока

$$\rho w = \frac{Gc^2}{4ab(c \pm z)^2} = \frac{q}{(c \pm z)^2}, \tag{5}$$

где обозначено

$$q = \frac{Gc^2}{4ab}. \tag{6}$$

Полученное уравнение (5) , существенно упрощает решение задачи.

Для определения других параметров потока используется основная система уравнений газодинамики [3], включающая уравнение неразрывности и уравнения движения.

Уравнение неразрывности для установившихся движений газа записывается так

$$div(\rho\vec{V}) = (\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z = 0, \tag{7}$$

где $\vec{V}$ – скорость потока; u, v, w – компоненты скорости в декартовой системе координат; $(\rho u)_x$, $(\rho v)_y, (\rho w)_z$ - частные производные компонент вектора плотности потока по координатам.

Векторное уравнение движения можно записать в следующем виде

$$div(\rho\vec{V}) = -qradP, \tag{8}$$

где $\rho\vec{V}\vec{V}$ - тензор Рейнольдса [3], представляющий произведение векторов плотности потока и скорости.

С учетом [7] уравнения движения записываются в проекциях на оси координат

$$
\begin{aligned}
\rho\vec{V}\cdot qrad \quad u &= -P_x;\\
\rho\vec{V}\cdot qrad \quad v &= -P_y;\\
\rho\vec{V}\cdot qrad \quad u &= -P_x;
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где P_x, P_y, P_z — частные производные давления по координатам.

Система уравнений (7), (9) должна быть проинтегрирована при следующих граничных условиях:

а) условие непроницаемости потока на боковых поверхностях насадка

$$v_n = \vec{V}\cdot\vec{n} = 0, \tag{10}$$

где v_n - нормальная к боковым поверхностям насадка компонента скорости; $\vec{n}$ - единичный вектор нормали к боковым поверхностям пирамиды. Вычисляется по формуле

$$\vec{n} = \frac{qrad \quad \hat{O}}{|qrad \quad \hat{O}|}, \tag{11}$$

где $\Phi(x,y,z) = 0$ - уравнение поверхности.

Используя уравнения (2) и (11), получаем выражения единичных векторов нормали к боковым поверхностям диффузора

$$\vec{n}_1 = \frac{c\vec{i} \pm a\vec{k}}{\sqrt{a^2+c^2}}; \qquad \vec{n}_2 = \frac{c\vec{j} \pm b\vec{k}}{\sqrt{b^2+c^2}}; \tag{12}$$

где $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ — орты декартовой системы координат.

В формулах (12) знак „+“ принимается при $x \geq 0,\ y \geq 0$, а знак „—“ – при $x \leq 0,\ y \leq 0$. Это же правило и в ниже приведенных формулах для конфузора

$$\vec{n}_1' = \frac{c\vec{i} \pm a\vec{k}}{\sqrt{a^2+c^2}}; \qquad \vec{n}_2' = \frac{c\vec{j} \pm b\vec{k}}{\sqrt{b^2+c^2}}; \tag{13}$$

б) граничное условие для нормальной компоненты скорости потока на входе в насадок (при Z=0) задается в следующем виде

$$v_n = \vec{V} \cdot \vec{k} = w_0 \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right] \cdot \left[1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right] =$$
$$= \frac{w_0}{(ab)^2}\left(a^2 - x^2\right)\left(b^2 - y^2\right), \qquad (14)$$

где w_0 – нормальная компонента скорости потока в точке x =0, y=0, z =0.

Следует заметить, что в данной задаче зависимость нормальной компоненты скорости $v_n(0)$ от координат x, y на входе в насадок может быть задана и в другом виде. Вариант задания граничных условий не имеет существенного значения.

в) граничное условие для давления на входе в насадок (при Z=0) в аналитическом виде задать не представилось возможным. Поэтому, потребуем, чтобы решение удовлетворяло заданным значениям в пяти точках поперечного сечения насадка.

При $x = 0$; $P = P_0$;	при $x = \pm a$; $P = P_1$;	при x =0 P=P_2 .	
$y = 0$	$y = 0$	y =±b	(15)
$z = 0$	$z = 0$	z =0.	

Значения величины P_0, P_1 , P_2 могут быть получены путем замеров давления в указанных точках.

С целью упрощения решения задачи вместо граничного условия (10) будем рассматривать эквивалентное ему граничное условие следующего вида

$$\rho v_n = \rho \vec{V} \cdot \vec{n} = 0 \qquad (16)$$

при $\rho \neq 0$.

Решая уравнение неразрывности (7) методом разделения переменных, получаем решение, удовлетворяющее граничному условию (16)

$$\rho u = \pm \frac{qx}{(c \pm z)^3}; \qquad \rho v = \pm \frac{qy}{(c \pm z)^3}; \qquad \rho w = \pm \frac{q}{(c \pm z)^2}. \qquad (17)$$

В том, что функции (17) удовлетворяют уравнению (16) с учетом равенств (2), (12) и (13) можно убедиться непосредственной проверкой.

Следствием уравнений (17) являются зависимости

$$u = \pm \frac{x}{c \pm z} \cdot w; \qquad v = \pm \frac{y}{c \pm z} \cdot w. \tag{18}$$

Принимаем за основную неизвестную продольную компоненту скорости – w. Используя равенства (17) и (18) в уравнениях движения (9), получаем после преобразований переопределенную систему дифференциальных уравнений в частных производных следующего вида

$$\begin{gathered} \frac{qx}{(c \pm z)^4} \cdot Lw = -P_x; \\ \frac{qy}{(c \pm z)^4} \cdot Lw = -P_y; \\ \pm \frac{q}{(c \pm z)^3} \cdot Lw = -P_z, \end{gathered} \tag{19}$$

где обозначено

$$Lw = xw_x + yw_y \pm (c \pm z) w_z. \tag{20}$$

Решение системы уравнений (19) возможно лишь только при выполнении следующих условий совместности:

$$x\left[\frac{Lw}{(c \pm z)^4}\right]_y = y\left[\frac{Lw}{(c \pm z)^4}\right]_x; \; x\left[\frac{Lw}{(c \pm z)^4}\right]_y = \pm(c \pm z)\left[\frac{Lw}{(c \pm z)^4}\right]_x;$$

$$y\left[\frac{Lw}{(c \pm z)^4}\right]_z = \pm(c \pm z)\left[\frac{Lw}{(c \pm z)^4}\right]_y, \tag{21}$$

$$Lw = -\frac{(c \pm z)^4 P_x}{qx} = -\frac{(c \pm z)^4 P_y}{qy} = \pm \frac{(c \pm z)^3 P_z}{q}. \tag{22}$$

Системы равенств (21) и (22) представляют собой две системы уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных функций

$$\frac{Lw}{(c \pm z)^4} \quad \text{и} \quad P.$$

Такие системы уравнений решают методом характеристик [8].

Опуская промежуточные выкладки, получаем решение систем уравнений (21) и (22) в виде двух произвольных функций одной и той же переменной

$$\frac{Lw}{(c \pm z)} = \hat{O}(\lambda); \qquad P = \varphi(\lambda), \tag{23}$$

где $x^2 + y^2 + (c \pm z)^2 = \lambda$ - характеристическая переменная.

В правильности полученного результата можно убедиться непосредственно дифференцированием величин (23).

Сравнивая равенства (21), (22) и (23), заключаем, что необходимо

$$q\frac{Lw}{(c \pm z)^4} = \hat{O}(\lambda) = -2\varphi'(\lambda), \tag{24}$$

где обозначено

$$\varphi'(\lambda) = \frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}.$$

Удобно в дальнейшем перейти к переменной $r = \sqrt{\lambda}$, что не изменит конечный результат.

Уравнение (24) будет иметь решение, если известно давление. Поскольку аналитическая зависимость граничного условия для давления отсутствует, то в первом приближении представим апроксимацию в виде полинома третьей степени по переменной $\boldsymbol{r}$. Коэффициенты полинома определяются из граничных условий (15).

Имеем следующее равенство

$$P = a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3. \tag{25}$$

Заметим, что давление, описываемое формулой (25), определено с точностью до постоянной, равной давлению в точке r=0.

Учитывая равенство (25), имеем неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных относительно продольной компоненты скорости w. Решение этого уравнения получено методом характеристик в виде суммы частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения, удовлетворяющего заданным граничным условиям (14).

Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат

$$w = w_1 + w_2, \tag{26}$$

где w_1 – частное решение неоднородного уравнения, определяемого формулой

$$w_1 = (c \pm z)^4 \frac{6a_1c^2\left(1-\rho_0^2\right) + 8a_2c^3\left(1-\rho_0^3\right) + 9a_3c^4\left(1-\rho_0^4\right)}{12qr^4}, \tag{27}$$

где обозначено $\rho_0 = r/c$;

w_2 – общее решение однородного уравнения, рассчитываемое по формуле

$$w_2 = \frac{w_0}{(ab)^2}(a^2 - c^2\mu^2)(b^2 - c^2\eta^2) + \frac{6a_1c^2\left(\rho^2 - 1\right) + 8a_2c^3\left(\rho^3 - 1\right) + 9a_3c^4\left(\rho^4 - 1\right)}{12q\rho^4}, \tag{28}$$

где обозначено

$$\rho = \sqrt{1 + \mu^2 + \eta^2}; \quad \mu = \frac{x}{c \pm z}; \quad \eta = \frac{y}{c \pm z}. \tag{29}$$

На основании предыдущего получаем окончательное решение задачи о нахождении скорости потока, оно описывается формулами

$$w = w_1 + w_2; \quad u = \pm\mu w; \quad v = \pm\eta w, \tag{30}$$

где w_1 и w_2 определяются соответственно формулами (27) и (28).

В формулах (30) знак „+“ принимается для конфузора, а знак „–“ - для диффузора.

Используя (5) и (30), вычислим величину, обратную плотности – удельный объем

$$\frac{1}{\rho} = \frac{w}{\rho w} = \frac{(c \pm z)^2(w_1 + w_2)}{q}. \tag{31}$$

На основании (1), (25) и (31) определим температуру потока

$$T = T_0 + \frac{P}{R\rho} = T_0 + \frac{(c \pm z)^2 w}{Rq}\left(a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3\right), \qquad (32)$$

где T_0 - температура в точке $r = 0$.

Кроме того, определим температуру заторможенного потока по общеизвестной формуле

$$\breve{T} = T + \frac{V^2}{2C_p} = T_0 + \frac{(c \pm z)^2 w}{Rq} P + \frac{1 + \mu^2 + \eta^2}{2C_p} w^2, \qquad (33)$$

где C_p – удельная изобарная теплоемкость газа; V^2 - квадрат модуля скорости потока; $P = a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3$.

Таким образом, определены все параметры потока: скорость, давление, удельный объем (плотность) и температура. Задача решена.

Выводы:

1. Получено точное решение задачи об установившемся движении газа в пирамидальном насадке на вентилятор.
2. Учитывая тот факт, что теорема единственности решения уравнений газодинамики не доказана [3], можно допустить существование и других решений той же задачи.
3. Сравнение полученных зависимостей с выводами элементарной теории предмета [3], показывает, что утверждение этой теории не всегда верны. В частности, утверждение, что дозвуковой поток в диффузорах замедляется, а в конфузорах – ускоряется, не подтверждается результатами решения задачи.
4. Существенным отличием полученного решения от решений, данных в теории конических течений [5] является то, что в нашем случае установлены зависимости искомых величин от радиуса в сферической системе координат с центром в фиктивной вершине пирамиды, тогда как коническими течениями, по определению, считаются такие, которые не зависят от радиальной координаты.
5. Установлено некоторое сходство результатов задач для конических [6] и пирамидальных насадков. Сходство результатов заключается в том, что в обоих случаях давление является функцией только одной

характеристической переменной – радиуса сферической системы координат с центром в фиктивной вершине конуса или пирамиды.

6. На примерах решения задач для конических и пирамидальных насадков доказана эффективность метода [7] решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных газодинамики.

Библиографический список

1. Батурин В.В. Вентиляция / В.В. Батурин. – М. : Госстройиздат, 1959. – 287 с. – Библиогр. : с. 282-285.

2. Аэрология горных предприятий : [учебник для студентов горных специальностей] / К.З. Ушаков, А.С. Бурчаков, Л.А. Пучков, И.И. Медведев. – М. : Недра, 1987 – 421 с. – Библиогр. : с. 415 -419.

3. Сергель О.С. Прикладная гидрогазодинамика : учебник [для студ. высших учебн. завед.] / Олег Сергеевич Сергель. – М.: Машиностроение, 1981. – 374 с. – Библиогр. : с. 366- 370.

4. Никольский А.А. Некоторые точные решения уравнений пространственных течений газа : [сборник теоретич. работ по аэродинамике] / Никольский А.А. – М. : Оборонгиз, 1957. с. 27-33.- Библиогр. в конце разд .и в тексте.

5. Булах Б.М. Нелинейные конические течения газа / Борис Михайлович Булах ; [ред. совет : Розальская Н.И (председатель) и др.]. – М. : Наука, 1970 . - 344 с. – Библиогр. с. 329- 343.

6. Бурцев Г.Г. Геометрическое воздействие на газовый поток : технічні науки / Г.Г. Бурцев, В.Н. Мусиенко. – Луганск, : Луганский нац. аграрн. универ. , 2009. – 122 с. : - (Науковий вісник ЛНАУ ; вип. 3, с. 64-72). – Библиогр. в конце ст.

7. Мусиенко В.Н. Решение универсальных уравнений механики сплошной среды: материалы междунар. научн. – практ. конф . [«Антропогенные проблемы биосферы»], (Луганск - Алчевск, 11-14 сент. 2004 г.)/ М-во образования и науки, Луганск, гос ун-т им. Т.Г. Шевченка ; вып. 4 / отв. Ред. А.Д. Буянов. – Луганск : Биосфера, 2004. – с. 110 – 117. – Библогр. в конце ст.

8. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Лев Эрнестович Эльсгольц ; [ред. Совет : Тихонов А.Н. (председатель) и др.] – М. : Наука, 1969.- 324 с. - Библиогр. в подстрочн. примеч.

Рекомендовано к печати д.т.н., проф. Г.В. Бабиюк