

к.т.н., доц. Полилов Е.В.,
аспирант Солдатенко Н. А.
(ДонГТУ, г. Алчевск, Украина)

СТРУКТУРНЫЙ СИНТЕЗ СИСТЕМ ОПТИМАЛЬНОГО РЕЛЕЙНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОБРАТНЫМ МАЯТНИКОМ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ИСХОДНЫХ КООРДИНАТ

Розроблені ефективні алгоритми і структури релейних систем автоматичного регулювання положення і кута відхилення зворотного маятника (САКП-ЗМ і САКК-ЗМ) у фазовому просторі початкових координат, що забезпечують високу точність утримання стрижня маятника у вертикальному положенні у всіх можливих режимах позиціонування візка (мінімізація статичної і динамічної помилок), а також квазіінваріантність до координатних і параметрических обурень.

Проблема и ее связь с научными и практическими задачами.

Новые задачи управления сложными кинематическими механизмами обусловлены появлением робототехнических систем нетривиальной конструкции, к которым относятся роботы избыточной структуры, шагающие и многоколесные механизмы, маятнико-подобные и гироколесные системы. несмотря на ограниченные функциональные возможности таких систем, они оказываются вполне пригодны для решения целого ряда специфических задач. К последним относятся задачи стабилизации положения неуправляемого конечного звена манипуляционного робота или робота нетривиальной конструкции (типа маятника на подвижной основе, например, маятника Фуруты), задачи стабилизации центра тяжести шагающего механизма, стабилизации положения многоканальной гироколесной системы, а также соответствующие задачи поддержания их колебательных движений или траекторного управления.

С точки зрения теории управления рассматриваемый класс механических объектов может быть отнесен к не полностью управляемым многоканальным объектам, а соответствующие задачи управления - к задачам частичной стабилизации.

Анализ исследований и публикаций. Анализ существующих принципов и способов построения систем управления перевёрнутым маятником показал, что для управления перевёрнутым маятником используются следующие способы управления: управление с помощью

пропорциональной обратной связи, управление с помощью обратной связи по полному вектору состояния, управление при помощи наблюдющего устройства [1]. Данные САР способны удержать перевёрнутый маятник в вертикальном положении при различных сигналах задания. Каждый из предлагаемых способов обладает определёнными достоинствами и недостатками. Но всех их объединяет один недостаток: чувствительность к параметрическим и координатным воздействиям.

Постановка задачи. Синтезировать релейные САРП-ОМ и САРУ-ОМ методами релейно-модального управления и аналитического конструирования регуляторов в фазовом пространстве исходных координат с целью доказательства возможности применения алгоритмов для стабилизации маятника, а также обеспечения необходимой точности воспроизведения заданных траекторий движения и степени чувствительности к параметрическим и координатным возмущениям.

Изложение материала и его результаты. Рассмотрим в общем виде задачу синтеза релейного регулятора перемещения перевёрнутого маятника. При структурно-алгоритмическом синтезе релейной САРП-ОМ полагаем, что математическая модель объекта управления представлена автономной системой линейных дифференциальных уравнений в форме Коши в матричном представлении [2]:

$$p\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{bu}, \quad y_i = \mathbf{e}_i^T \mathbf{y}, \quad (1)$$

где $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4]^T$ $[\Delta\xi_1 \ \Delta\xi_2 \ \Delta\xi_3 \ \Delta\xi_4]^T$ - вектор координат состояния системы;

$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n,n}$ - матрица динамики системы [2]размерностью 4×4 ;

$\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_4]^T$ - вектор-столбец коэффициентов управления;
 u - скалярная функция управления;

y_i - регулируемая переменная в каждом i -том контуре регулирования;

\mathbf{e}_i - вектор коэффициентов выхода, i -тый элемент которого равен единице при равенстве нулю остальных.

Заменой на координаты возмущённого движения $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{y} - \mathbf{y}^*$ система (1) может быть приведена к виду:

$$p\boldsymbol{\eta} = \mathbf{A}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{bu}, \quad \eta_i = \mathbf{e}_i^T \boldsymbol{\eta}. \quad (2)$$

Здесь $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \eta_4]^T$ - вектор-столбец координат возмущённого состояния системы.

При синтезе регулятора перемещения обратного маятника в качестве выходной регулируемой переменной принята координата y_1 . Сокращение процедуры синтеза алгоритма управления возможно путем перехода от нормальной формы записи системы уравнений (2) к канонической [3]. Математическую модель объекта управления в каноническом пространстве возмущенного движения представим в виде:

$$p\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{e}_n u, \quad \eta_1 = \mathbf{f}^T \mathbf{x}, \quad (3)$$

где \mathbf{x} - вектор координат возмущенного движения канонической системы;

$$\mathbf{G} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -g_0 & -g_1 & -g_2 & \dots & -g_3 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_n = [0 \ 0 \ \dots \ 1]^T,$$

$\mathbf{f}^T = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_4]$ $\mathbf{e}_i^T \mathbf{M}$ – соответственно матрица динамики и векторы коэффициентов входа и выхода этой системы;
 g_0, g_1, \dots, g_4 - коэффициенты характеристического полинома системы:

$$\det[p\mathbf{E} - \mathbf{A}] = g_4 p^4 + \dots + g_1 p + g_0, \quad (4)$$

\mathbf{E} - единичная диагональная матрица размера 4×4 ;

\mathbf{M} - преобразующая матрица, которая может быть определена на основе матрицы управляемости $\mathbf{R} = [\mathbf{b} \ | \ \mathbf{Ab} \ | \ \dots \ | \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]$:

Воспользуемся результатами работы [4], в которой в соответствии с доопределением Долголенко Ю.В. [5] установлена однозначная связь коэффициентов алгоритма управления, являющегося знаковой функцией от линейной комбинации координат управляемого объекта, с коэффициентами характеристического полинома замкнутой системы управления.

Требования к возмущенному движению системы управления зададим в виде характеристического полинома:

$$H_{\text{жс}}(p) = p^{n-1} + d_{n-2}\omega_0 p^{n-2} + \dots + d_1\omega_0^{n-1} p + d_0\omega_0^{n-1}, \quad (5)$$

коэффициенты которого выбираются с учетом заданных показателей качества переходных процессов.

Используя линейное преобразование замены переменных $\eta = Mx$, уравнение (3) приводится к каноническому виду

$$p\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{e}_n u. \quad (6)$$

Алгоритм управления объектом (6) будем искать как знаковую функцию от линейной комбинации координат этого объекта:

$$u^*(\mathbf{x}) = -sign(\mathbf{k}^T \mathbf{x}) - sign(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n). \quad (7)$$

Управление (7) задает движение замкнутой системы вдоль гиперповерхности скольжения, определяемой уравнением:

$$\Theta \quad k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n = 0, \quad (8)$$

в соответствии с которым динамика координаты x_n однозначно находится в виде:

$$x_n = -k_n^{-1} (k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_{n-1} x_{n-1}). \quad (9)$$

Развернув (6) и исключив из него последнее уравнение и подставив в остальные значение координаты x_n согласно (9), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} px_1 = x_2, \\ px_2 = x_3, \\ \dots \\ px_{n-2} = x_{n-1}, \\ px_{n-1} = -k_n^{-1} (k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_{n-1} x_{n-1}), \end{cases} \quad (10)$$

описывающих скользящее движение рассматриваемого управляемого динамического объекта. Исключив в полученных выражениях все переменные кроме x_1 , данную систему уравнений можно представить одним дифференциальным уравнением $(n-1)$ -ой степени

$$k_n p^{n-1} x_1 + k_{n-1} p^{n-2} x_1 + \dots + k_2 p x_1 + k_1 x_1 = 0, \quad (11)$$

которому соответствует характеристический полином вида

$$H(p) = k_n p^{n-1} + k_{n-1} p^{n-2} + \dots + k_2 p + k_1. \quad (12)$$

Используя обратные линейные преобразования для векторов переменных в целом, а также для отдельных их компонентов

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}, \quad \tilde{y}_i = \mathbf{e}_i^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{y} = [0 \ \dots \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{y},$$

$$\tilde{\mathbf{y}}^* = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}^*, \quad \tilde{y}_i^* = \mathbf{e}_i^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{y}^* = [0 \ \dots \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{y}^*,$$

на основе (7) может быть получен ряд законов управления объектом (1) в различных координатных пространствах.

Для рассматриваемой динамической системы (1) преобразования могут быть выполнены следующим образом. Подсигнатурную функцию Θ первичного алгоритма управления (7) разобьем на две составляющие, представляющие действительное и заданное (невозмущенное) движения объекта:

$$u^* = -\operatorname{sign}(\Theta_d - \Theta_s), \quad (13)$$

$$\text{где } \Theta_d = \mathbf{k}^T \tilde{\mathbf{y}} = k_1 \tilde{y}_1 + k_2 \tilde{y}_2 + \dots + k_4 \tilde{y}_4, \quad (14)$$

$$\Theta_s = \mathbf{k}^T \tilde{\mathbf{y}}^* = k_1 \tilde{y}_1^* + k_2 \tilde{y}_2^* + \dots + k_4 \tilde{y}_4^*. \quad (15)$$

Преобразуем сначала выражение (14). Для чего, используя обратное преобразование координат, заменим переменные

$$\Theta_d = \mathbf{k}^T \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{k}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{y} \quad (16)$$

и, вводя обозначение

$$\mathbf{k}^T \mathbf{M}^{-1} = \boldsymbol{\delta}^T, \quad (17)$$

получим выражение, позволяющее определить составляющую Θ_d через вектор реальных координат системы:

$$\Theta_d = \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{y} = \delta_1 y_1 + \delta_2 y_2 + \delta_3 y_3 + \delta_4 y_4. \quad (18)$$

Выполним необходимые преобразования также для (15). Используя свойство переменных канонической математической модели, вектор невозмущенного движения $\tilde{\mathbf{y}}^*$ представим через заданное движение выходной координаты \tilde{y}_1^* следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{y}}^* = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1^* & p\tilde{y}_1^* & p^2\tilde{y}_1^* & p^3\tilde{y}_1^* \end{bmatrix}^T = \tilde{y}_1^* \mathbf{p}, \quad (19)$$

где $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & p & p^2 & p^3 \end{bmatrix}^T$. (20)

Далее заменим переменную \tilde{y}_1^* на y_1^* :

$$\tilde{y}_1^* = \bar{m}_{11} y_1^* \rightarrow \tilde{\mathbf{y}}^* = \bar{m}_{11} y_1^* \mathbf{p}, \quad (21)$$

где \bar{m}_{11} - первый компонент обратной преобразующей матрицы \mathbf{M}^{-1} . Тогда подставив полученное выражение в (15), определим вторую (невозмущенную или задающую) составляющую переключающей функции

$$\Theta_3 = \bar{m}_{11} y_1^* \mathbf{k}^T \mathbf{p}. \quad (22)$$

Подставляя (18) и (22) в (23), получим следующее выражение алгоритма управления в фазовом пространстве исходных координат:

$$u^* = -\text{sign} \left[\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{y} - \bar{m}_{11} y_1^* \mathbf{k}^T \mathbf{p} \right]. \quad (23)$$

Матричная структурная схема релейной системы управления, в которой реализуется найденный закон управления, приведена на рис. 1.

Следует отметить, что в случае практической реализации синтезированного алгоритма релейную САРП-ОМ необходимо дополнить внутренним контуром стабилизации угла поворота маятника (САРУ-ОМ) и контуром регулирования скорости перемещения маятника (САРС-ОМ). В нормальном режиме работы релейной САРП-ОМ без срыва скользящего режима, скольжение внутренних регуляторов скорости и угла поворота маятника подчинено внешнему регулятору перемещения. Синтез указанных контуров может быть выполнен по аналогии с синтезом САРП-ОМ (в том числе и в других фазовых пространствах) и в данной работе рассматриваться не будет.

Для анализа работоспособности синтезированных релейных САРП-ОМ на основании математического описания [2] была составлена цифровая математическая модель и проведено цифровое моделирование в среде моделирования динамических систем MATLAB Simulink.

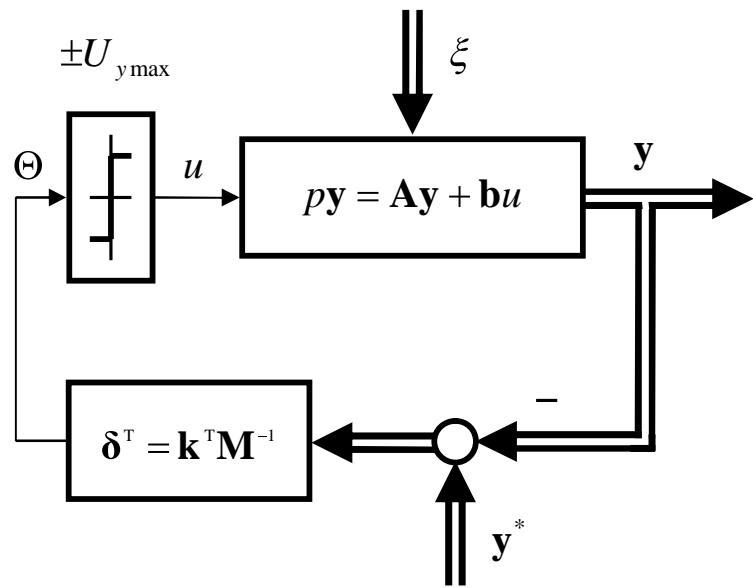


Рисунок 1 - Матричная структурная схема релейной САРП-ОМ, синтезированной в фазовом пространстве исходных координат

Исследовались переходные процессы позиционирования и слежения за заданной траекторией (линейно нарастающий, пилообразный и синусоидальный сигнал, см. рис. 3 - рис. 5) центра масс обратного маятника.

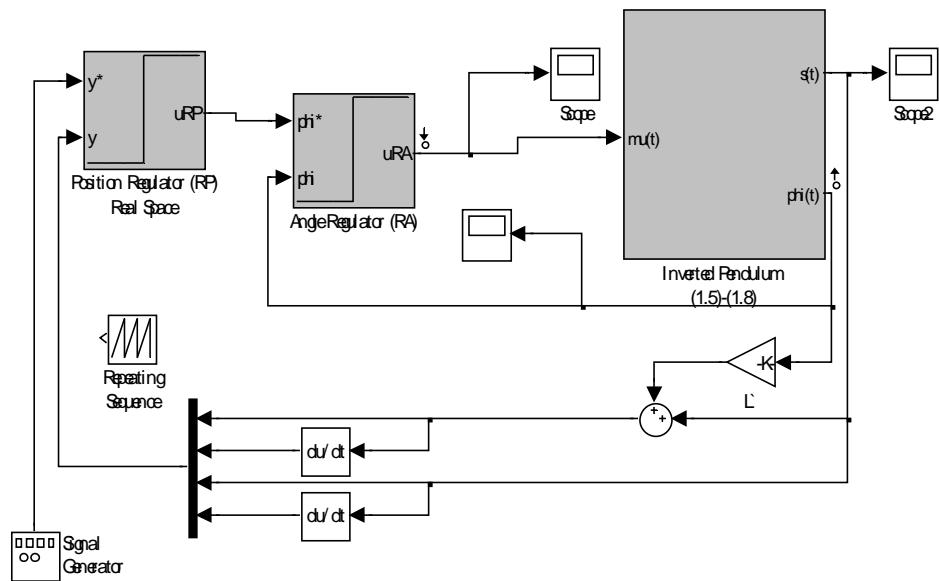


Рисунок 2 - Цифровая математическая модель релейной САРП-ОМ, синтезированной в фазовом пространстве исходных координат

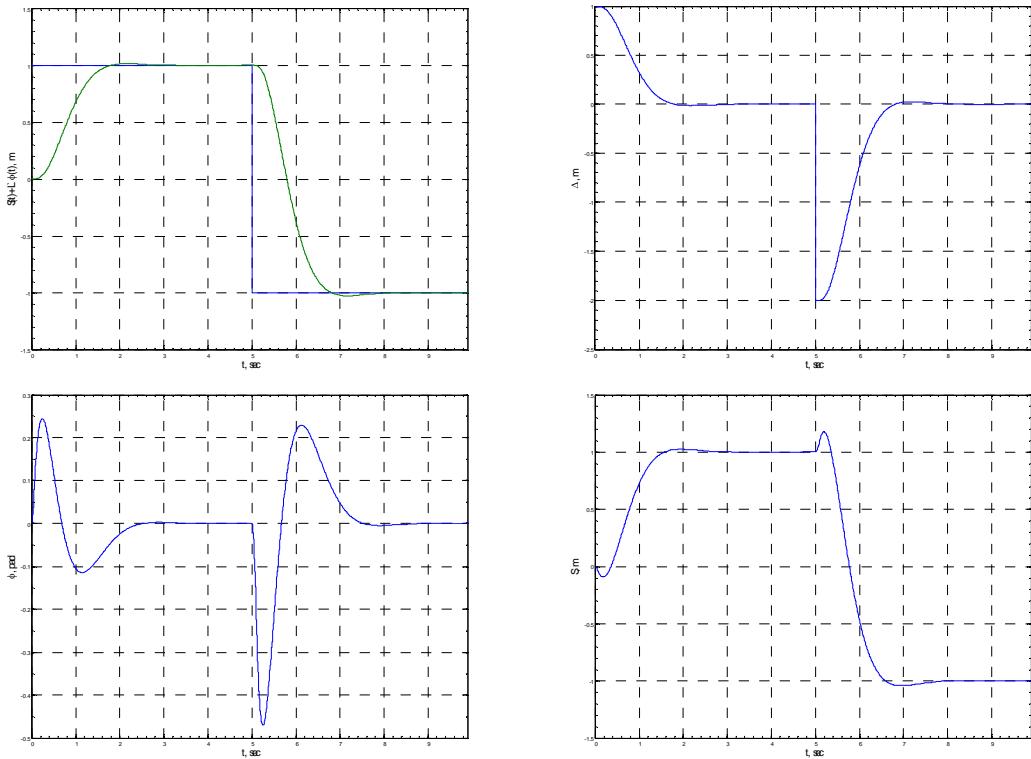


Рисунок 3 - Графики переходных процессов в релейной САРП-ОМ, синтезированной в фазовом пространстве исходных координат

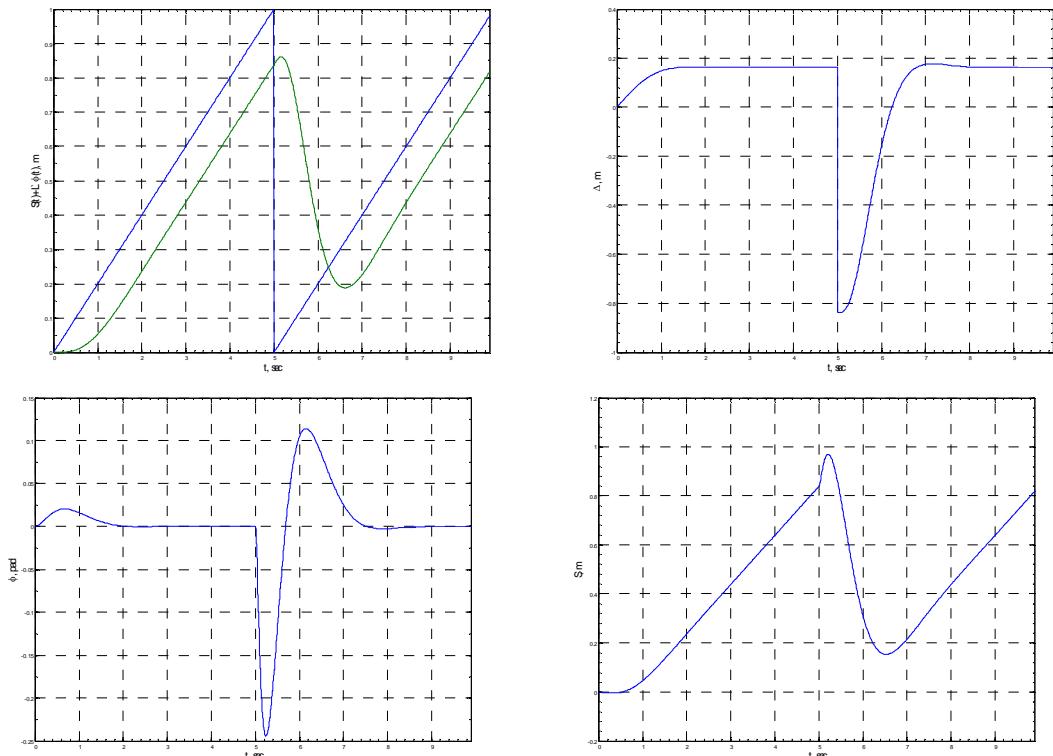


Рисунок 4 - Графики переходных процессов в релейной САРП-ОМ, синтезированной в фазовом пространстве исходных координат

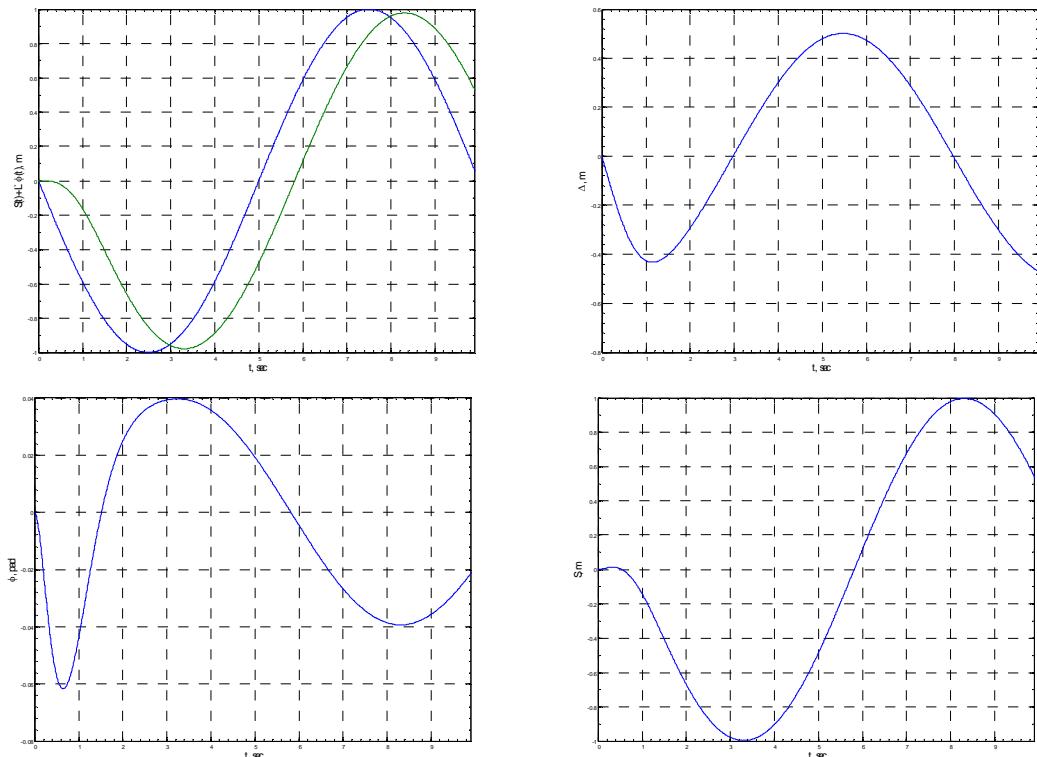


Рисунок 5 - Графики переходных процессов в релейной САРП-ОМ, синтезированной в фазовом пространстве исходных координат

Полученные графики переходных процессов подтверждают высокую эффективность синтезированных алгоритмов управления. Из всех синтезированных алгоритмов позиционирования выбор конкретной САРП-ОМ должен производиться в зависимости от требований, предъявляемых разработчиками к точности воспроизведения заданной траектории движения центра масс маятника.

Выводы и направление дальнейших исследований. Применительно к объекту управления тележка – перевёрнутый маятник впервые показана возможность использования релейных систем управления. Синтезированные алгоритмы и структуры релейных САРП-ОМ и САРУ-ОМ могут быть использованы при проектировании всех объектов, в которых центр масс и точка приложения силы не совпадают.

Показана возможность использования релейных систем управления применительно к объекту управления тележка – перевёрнутый маятник. Синтезированы алгоритмы и структуры релейных систем автоматического регулирования положения и угла отклонения обратного маятника.

Possibility of the use of the relays control systems is rotined as it applies to the object of management light cart is the inverted pendulum. Algorithms and structures of the relays systems of automatic control of position and corner of declining of reverse pendulum are synthesized.

Библиографический список

1. Квакернаак Х, Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. – М.: Мир, 1977. – 653 с.
2. Полилов Е.В., Солдатенко Н.А., Щёлоков А.Г. Математическое описание нелинейной динамической системы тележка - обратный маятник // Зб-к наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету. Тематичний випуск «Проблеми автоматизованого електроприводу» / Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2007.- С. 275 – 279.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.- М.: Наука, 1970.- 460 с.
4. Яблонь В.П. Синтез релейных систем следящего электропривода повышенной точности с низкой чувствительностью к параметрическим и координатным возмущениям: Дис ... канд. техн. наук: 05.09.03.- Донецк, 1999.- 207 с
5. Долголенко Ю.В. Скользящие режимы в релейных системах непрямого регулирования // Тр. 2-го всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. - М.: АН СССР, 1955. - Т.1. - С. 428-438.
6. Батенко А.П. Управление конечным состоянием движущихся объектов.- М.: Сов. радио, 1977.
7. Осичев А.В., Котляров В.О., Марков В.С. Стандартные распределения корней в задачах синтеза в электроприводе // Проблемы автоматизированного электропривода. Теория и практика. Труды науч.-техн. конф. Крым, Алушта, 15-20 сентября 1997.- Харьков, 1997.- С. 159-161.

Рекомендовано к печати д.т.н., проф. Зеленовым А.Б.