

*к.т.н. Данько А.В.  
(ДонГТУ, Алчевск, Украина)*

## **МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МЕТОДОМ ЛИНИЙ СКОЛЬЖЕНИЯ С УЧЕТОМ НЕПОСТОЯНСТВА СОПРОТИВЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИИ**

*Розроблена методика побудови сітки ліній ковзання при плоскій деформації по експериментально знайденим граничним умовам з урахуванням непостійності опору деформації.*

**Ключові слова:** *поле напруг, експериментальні граничні умови, метод ліній ковзання.*

*Разработана методика построения сетки линий скольжения при плоской деформации по экспериментально найденным граничным условиям с учетом непостоянства сопротивления деформации.*

**Ключевые слова:** *поле напряжений, экспериментальные граничные условия, метод линий скольжения.*

Экспериментальное определение поля напряжений в пластической области по-прежнему является проблемой. Один из вариантов ее решения - использование экспериментально найденных статических граничных условий в виде напряжений на поверхности деформируемого тела для последующего вычисления напряженного состояния внутри тела каким-либо аналитическим методом. Получение таких граничных условий с достаточной степенью точности возможно поляризационно-оптическим методом или методом штифтовых месдоз.

Одним из самых распространенных и доступных аналитических методов определения полей напряжений является метод линий скольжения (МЛС). Известно несколько работ, в которых данный метод применяется для вышеуказанной цели [1,2].

Одной из предпосылок МЛС является постоянство сопротивления деформации (или пластической постоянной  $k$ ) по очагу деформации. Однако установлено [3], что адекватное граничным условиям поле напряжений может быть получено только при учете неравномерности распределения сопротивления деформации по пластической области.

Известно несколько попыток преодоления вышеуказанного недостатка МЛС. Одной из самых ранних является работа [4], в которой представлена модификация МЛС применительно к прокатке биметаллов. Предложено очаг деформации по высоте разбивать на несколько

зон с различными значениями  $k$ . Показано, что при переходе из одной зоны в другую угол наклона линий скольжения меняется скачком на величину, зависящую от отношения пластических постоянных. В работе [5] та же идея использована для анализа напряженного состояния при прокатке с неравномерным распределением температуры по высоте очага деформации. Однако при прокатке в низком очаге деформации, как это показано в работе [6], неравномерным является распределение  $k$  по длине очага деформации. Работ, в которых бы решалась эта задача, не обнаружено.

Задача данной работы состояла в том, чтобы разработать методику численного построения сетки линий скольжения по экспериментальным граничным условиям для процесса прокатки с неравномерным распределением сопротивления деформации по длине очага деформации.

Для этого очаг деформации разбивается на достаточно большое число сечений  $N$  линиями, параллельными оси  $Y$ , проходящими через точки контактных поверхностей валков, в которых экспериментально определены  $\sigma_n$  и  $\tau_k$  (рис. 1).

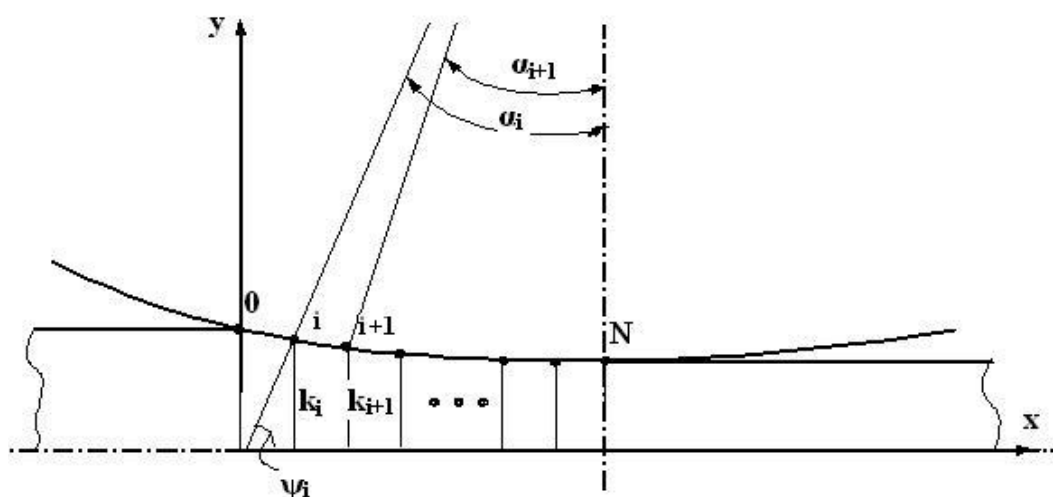


Рисунок 1 – Разбиение очага деформации на сечения с различной  $k$

При определении среднего нормального напряжения  $\sigma$  и угла наклона  $\alpha$ -линий  $\theta$  на контактной поверхности учитывается возникновение разрывов напряжений вдоль границ сечений. Поэтому в каждой  $i$ -той точке линии контакта, кроме 0-й и  $N$ -й, будет по две величины  $\sigma$  и  $\theta$ :

$$\theta_i = \psi_i - \frac{1}{2} a \cos\left(\frac{\tau_{ki}}{k_i}\right) \quad \theta'_i = \psi_i - \frac{1}{2} a \cos\left(\frac{\tau_{ki}}{k_{i+1}}\right)$$

$$\sigma_i = \sigma_{ni} - k_i \sin[2(\theta_i - \psi_i)] \quad \sigma'_i = \sigma_{ni} - k_{i+1} \sin[2(\theta_i - \psi_i)],$$

где  $\sigma_n, \tau_k$  – нормальное и касательное контактные напряжения;  
 $\psi$  - угол наклона нормали к контактной поверхности в данной точке.

Используется система координат по [7], в которой положительное направление линий  $\alpha$ -семейства получается поворотом на  $45^\circ$  против часовой стрелки от направления  $\sigma_1$ . Эта система удобна тем, что углы  $\theta$  получаются острыми и картина линий скольжения становится более наглядной.

Поскольку вдоль линии разрыва напряжений возможен разрыв только нормального напряжения, совпадающего с направлением линии разрыва, то в данном случае разрыв претерпевает только  $\sigma_y$ , а напряжения  $\sigma_x$  и  $\tau_{yx}$  непрерывны. Т.о. численно строится непрерывное поле напряжений в каждом  $i$ -том сечении, в котором компонента  $\sigma_y$  разрывна на границах сечений. Поэтому при переходе через границу сечений угол  $\theta$  должен изменяться в зависимости от соотношения  $k_i/k_{i+1}$  по [4].

На следующем шаге решения определяются параметры линий скольжения 2-го слоя (считается, что линия контакта является 1-м слоем сетки линий скольжения). Решается задача Коши в треугольниках  $1i-2i-1i+1$ , прилегающих к линии контакта (рис. 2).

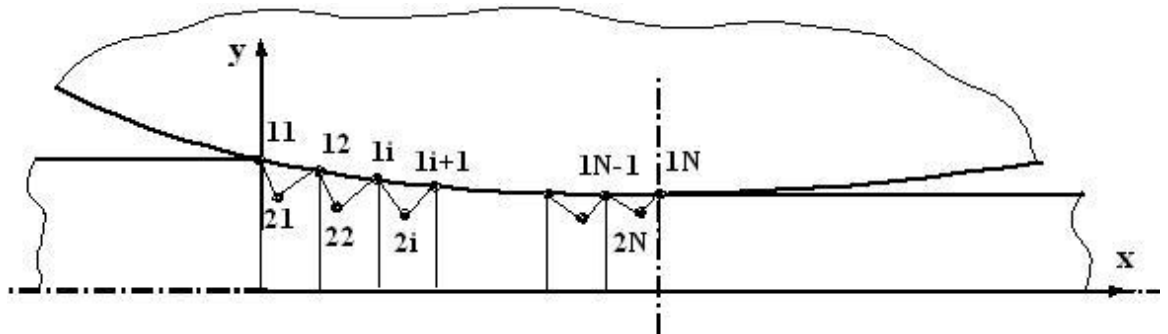


Рисунок 2 – Построение решения во 2-м слое

Принята следующая система индексации узлов: первый индекс обозначает номер слоя, второй – номер узла от начала системы координат. Определение  $\sigma$  и  $\theta$  производится по интегралам Генки:

$$\sigma_{2i} = \frac{1}{2}(\sigma_{1i+1} + \sigma_{1i}) + k_i(\theta_{1i+1} - \theta_{1i}), \quad (1)$$

$$\theta_{2i} = \frac{1}{2k_i}(\sigma_{1i+1} - \sigma_{2i}) + \theta_{1i+1}. \quad (2)$$

При этом учитывается изменение  $\sigma$  и  $\theta$  на границе сечений в точках  $1i$  и  $1i+1$  вследствие изменения  $k$ . Координаты узлов сетки затем находятся по известным зависимостям [7]:

$$x_{2i} = \frac{x_{1i+1} \cdot \operatorname{tg} \left[ \frac{1}{2} (\theta_{2i} + \theta_{1i+1}) \right] + x_{1i} \cdot \operatorname{ctg} \left[ \frac{1}{2} (\theta_{2i} + \theta_{1i}) \right] + y_{1i} - y_{1i+1}}{\operatorname{tg} \left[ \frac{1}{2} (\theta_{2i} + \theta_{1i+1}) \right] + \operatorname{ctg} \left[ \frac{1}{2} (\theta_{2i} + \theta_{1i}) \right]}, \quad (3)$$

$$y_{2i} = y_{1i} + (x_{2i} - x_{1i+1}) \cdot \operatorname{tg} \left[ \frac{1}{2} (\theta_{2i} + \theta_{1i+1}) \right]. \quad (4)$$

На рисунке 3 показана эта стадия построения сетки для случая симметричной прокатки с  $\varepsilon = 40,2\%$ ,  $l_d/h_{cp} = 1,76$  (эпюры контактных напряжений взяты из работы [2]).

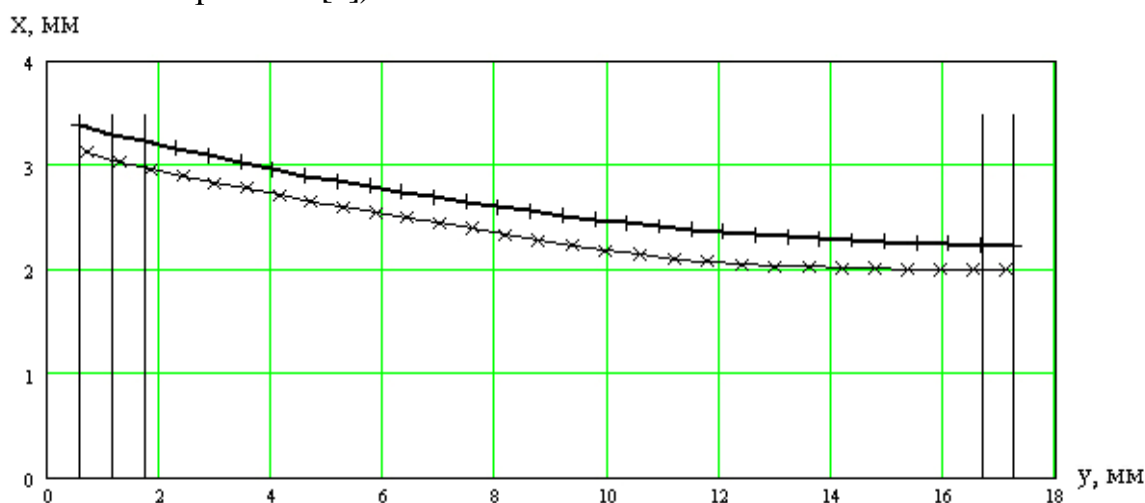


Рисунок 3 – Второй слой сетки линий скольжения

Для построения 3-го и последующих слоев находятся параметры узлов в первом приближении. Решается задача Римана в четырехугольниках  $2i-1i+1-2i+1-3i$  (рис.4). Вначале находятся параметры  $\xi$  и  $\eta$ , постоянные вдоль  $\alpha$  и  $\beta$ -линий соответственно:

$$\xi_i = \frac{\sigma_{2i+1}}{2k_{i+1}} + \theta_{2i+1}, \quad (5)$$

$$\eta_i = \frac{\sigma_{2i}}{2k_i} - \theta_{2i}. \quad (6)$$

Затем определяются  $\sigma_{3i}$  и  $\theta_{3i}$  первого приближения, причем возможны два варианта: а) в зоне отставания  $x_{3i} < x_{1i+1}$  (рис. 4.а), тогда

$$\sigma_{3i} = k_i (\xi_i + \eta_i)$$

$$\theta_{3i} = \xi_i - \frac{\sigma_{3i}}{2k_i} \quad (7)$$

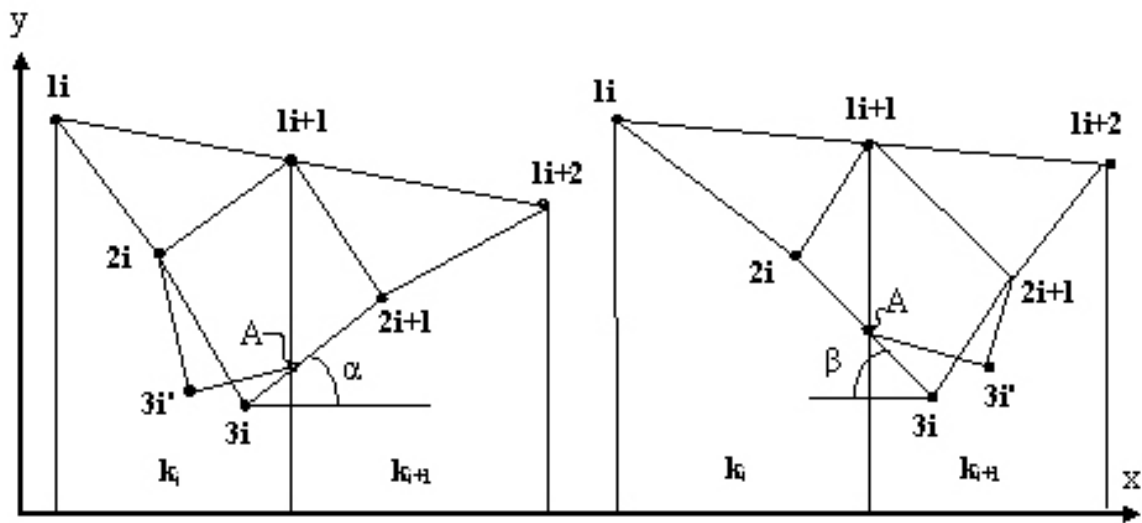


Рисунок 4 – К построению третьего слоя сетки линий скольжения

б) в зоне опережения  $x_{3i} > x_{1i+1}$  (рис. 4.б), тогда

$$\theta_{3i} = \xi_i - \frac{\sigma_{3i}}{2k_{i+1}}. \quad (8)$$

Координаты узлов находятся по (3) и (4) с подстановкой соответствующих параметров 2-го и 3-го слоев.

Для определения параметров 3-го слоя во втором приближении находится координата  $y$  точки  $A$  пересечения границы сечений (рис.4):

$$y_{A_i} = \frac{y_{2i+1} - y_{3i}}{x_{2i+1} - x_{3i}} (x_{1i+1} - x_{3i}) + y_{3i}, \text{ если } x_{3i} < x_{1i+1},$$

$$y_{A_i} = y_{3i}, \text{ если } x_{3i} = x_{1i+1}$$

$$y_{A_i} = \frac{y_{2i} - y_{3i}}{x_{3i} - x_{2i}} (x_{3i} - x_{1i+1}) + y_{3i}, \text{ если } x_{3i} > x_{1i+1}.$$

Затем определяется изменение угла  $\theta$  при пересечении линиями скольжения границ сечений. Т.к.  $\tau_{yx}$  непрерывно, то:

$$k_i \cos 2\theta_i^+ = k_{i+1} \cos 2\theta_i^-$$

Отсюда следует:

$$\theta_{A_i}^+ = \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{k_{i+1} \cos 2\theta_{3i}}{k_i} \right), \text{ если } x_{3i} \leq x_{1i+1},$$

$$\theta_{A_i}^- = \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{k_i \cos 2\theta_{3i}}{k_{i+1}} \right), \text{ если } x_{3i} < x_{1i+1}.$$

Напряжение  $\sigma_i$  в точке А после пересечения границы сечений находится из условия непрерывности напряжения  $\sigma_x$ :

$$\sigma_i^+ + k_i \sin 2\theta_i^+ = \sigma_i^- + k_{i+1} \sin 2\theta_i^-$$

Поэтому:

$$\sigma_{A_i}^+ = \sigma_{2i+1} + k_{i+1} \sin 2\theta_{3i} - k_i \sin 2\theta_{A_i}^+, \text{ если } x_{3i} \leq x_{1i+1},$$

$$\sigma_{A_i}^- = \sigma_{2i} + k_i \sin 2\theta_{3i} - k_{i+1} \sin 2\theta_{A_i}^-, \text{ если } x_{3i} < x_{1i+1}.$$

Параметры 3-го слоя находятся по зависимостям:

$$\text{а) если } x_{3i} \leq x_{1i+1} \quad \xi_i' = \frac{\sigma_{A_i}}{2k_i} + \theta_{A_i}; \quad \eta_i' = \frac{\sigma_{2i}}{2k_i} - \theta_{2i};$$

$$\sigma'_{3i} = k_i (\xi'_i + \eta'_i); \quad \theta'_{3i} = \xi'_i - \frac{\sigma'_{3i}}{2k_i}.$$

Координаты узлов 3-го слоя во втором приближении:

$$x'_{3i} = \frac{x_{1i+1} \cdot \operatorname{tg} \left[ \frac{1}{2} (\theta'_{3i} + \theta A_i) \right] + x_{2i} \cdot \operatorname{ctg} \left[ \frac{1}{2} (\theta_{2i} + \theta A_i) \right] + y_{2i} - y A_i}{\operatorname{tg} \left[ \frac{1}{2} (\theta'_{3i} + \theta A_i) \right] + \operatorname{ctg} \left[ \frac{1}{2} (\theta_{2i} + \theta A_i) \right]}$$

$$y'_{3i} = y A_i + (x'_{3i} - x_{1i+1}) \cdot \operatorname{tg} \left[ \frac{1}{2} (\theta'_{3i} + \theta A_i) \right]$$

б) если  $x_{3i} < x_{1i+1}$        $\xi'_i = \frac{\sigma_{2i+1}}{2k_{i+1}} + \theta_{2i+1};$        $\eta'_i = \frac{\sigma A_i}{2k_{i+1}} - \theta A_i;$

$$\sigma'_{3i} = k_{i+1} (\xi'_i + \eta'_i); \quad \theta'_{3i} = \xi'_i - \frac{\sigma'_{3i}}{2k_{i+1}}.$$

$$x'_{3i} = \frac{x_{2i+1} \cdot \operatorname{tg} \left[ \frac{1}{2} (\theta'_{3i} + \theta_{2i+1}) \right] + x_{1i+1} \cdot \operatorname{ctg} \left[ \frac{1}{2} (\theta'_{3i} + \theta A_i) \right] + y A_2 - y_{2i+1}}{\operatorname{tg} \left[ \frac{1}{2} (\theta'_{3i} + \theta_{2i+1}) \right] + \operatorname{ctg} \left[ \frac{1}{2} (\theta'_{3i} + \theta A_i) \right]}$$

$$y'_{3i} = y_{2i+1} + (x'_{3i} - x_{2i+1}) \cdot \operatorname{tg} \left[ \frac{1}{2} (\theta'_{3i} + \theta_{2i+1}) \right].$$

На рисунке 5 показано построение сетки линий скольжения до третьего слоя включительно в первом приближении (сплошная линия) и во втором (пунктирная с маркерами).

Видно, что отличие между первым и вторым приближениями заметно только на входе в очаг деформации, где разница в  $k$  по сечениям значительна.

При построении 4-го слоя приходится каждую ячейку сетки разбивать на две, т.к.  $\alpha$ -линии при  $x_{3i} \leq x_{1i+1}$  и  $\beta$ -линии при  $x_{3i} < x_{1i+1}$  имеют точки перегиба. В зоне отставания, при условии  $x_{3i} \leq x_{1i+1}$ , построение осуществляется согласно схеме рисунок 6.

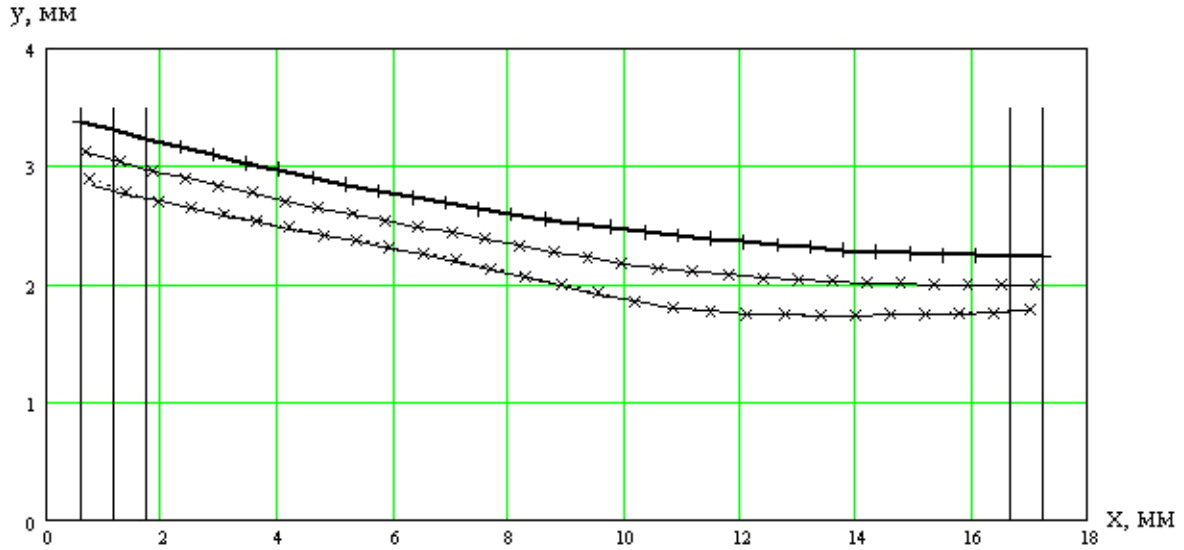


Рисунок 5 – Третий слой в первом и втором приближениях

Находятся параметры точки  $B_i$  в сечении с  $k_{i+1}$  по зависимостям, аналогичным (1)÷(4), т.к. эта точка всегда находится внутри сечения и для нее  $k$  постоянна. Далее определяются параметры и положение точки  $4i$  первого приближения так же, как и точки  $3i$ , по (5)÷(7) и (3),(4).

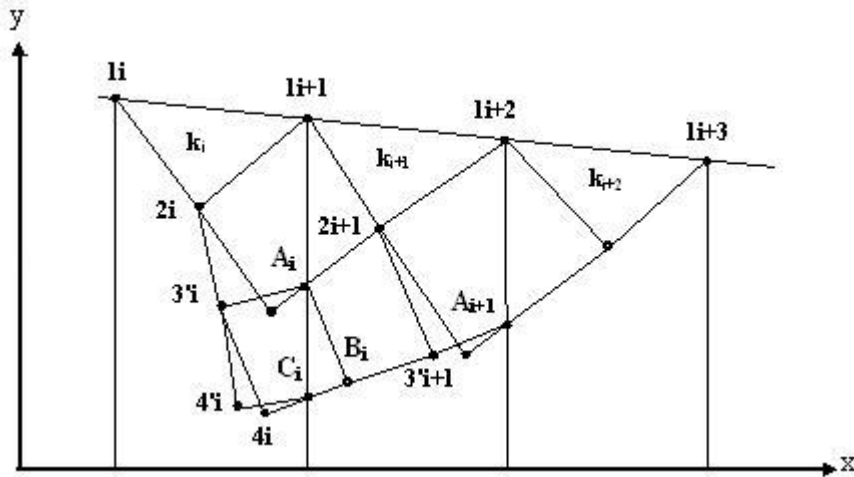


Рисунок 6 – К построению четвертого слоя в зоне отставания

В зоне опережения построение производится аналогично, с той лишь разницей, что точки  $C$  будут на границах с  $i+2$  сечениями по ходу расчета (рис.7) поэтому вместо (7) здесь следует использовать (8).

Построение пятого и последующих слоев осуществляется аналогично, хотя количество определяемых узлов существенно увеличивается.



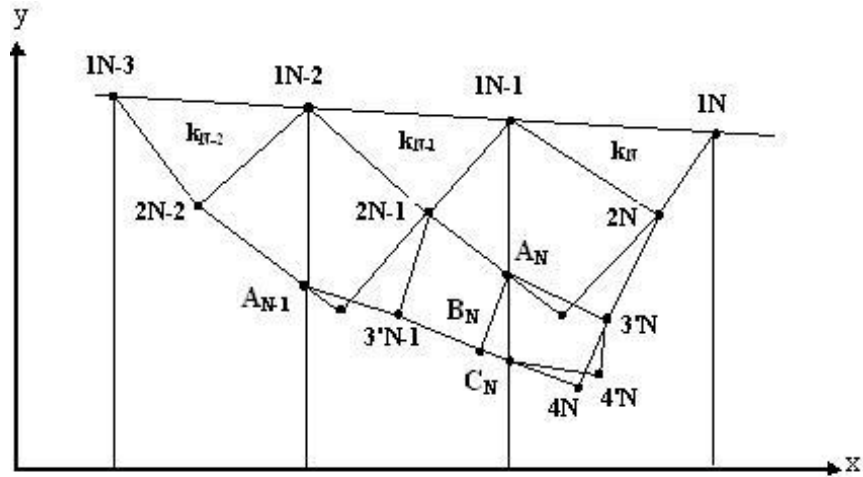


Рисунок 7 – К построению четвертого слоя в зоне опережения

На рисунке 8 показан пример построения сетки линий скольжения первого приближения по предложенной методике при прокатке на гладкой бочке с параметрами  $\epsilon = 40,2\%$ ,  $l_d/h_{cp} = 1,76$ . Построение осуществлено посредством программы SLN-2 в среде MathCad-7. Распределения напряжений на контактной поверхности получены в лаборатории физического моделирования процессов ОМД НМетАУ проф. Шломчака Г.Г. [2]. Последующее определение поля напряжений по сетке линий скольжения не представляет никаких трудностей [7].

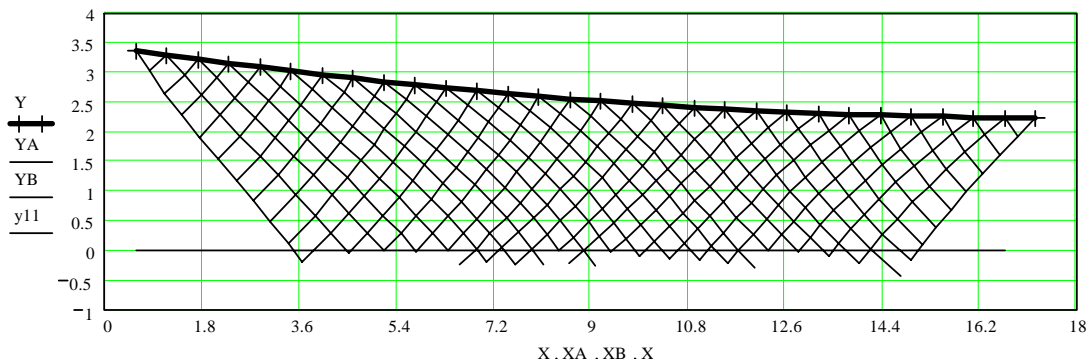


Рисунок 8 – Сетка линий скольжения при  $\epsilon = 40,2\%$ ,  $l_d/h_{cp} = 1,76$ .

### Выводы

Разработана методика построения сетки линий скольжения по экспериментальным статическим граничным условиям с учетом неравномерности распределения сопротивления деформации по длине очага деформации при прокатке.

### **Библиографический список**

1. Использование эюр контактных напряжений для построения поля линий скольжения. / Клименко П.Л., Потапкин В.Ф., Журавлев А.С. и др. // *Обработка металлов давлением. Научн. тр. ДМети*, вып. 59, 1972. – с.23- 26.
2. Федоринов В.А. и др. Исследование контактных напряжений при асимметричной прокатке методом фотоупругости. /В.А.Федоринов, А.Н.Кулик, А.В.Данько //Удосконалення процесів і обладнання обробки тиском в металургії і машинобудуванні. Тем. збірн. наук. праць. Краматорськ, 2007.- с.369-373.
3. Данько А.В. Математическое моделирование напряженного состояния по экспериментальным граничным условиям /А.В.Данько, А.Н.Кулик // *Сб. научн. тр. ДонГТУ*, вып. 25.- Алчевск, 2007.-с.195-203.
4. Бровман М.Я. Некоторые вопросы обработки давлением биметалла /М.Я. Бровман, Ю.С.Додин // *КШП*. – 1963. - №1. – С.3÷5.
5. Прокатка толстых листов /П.И.Полухин, В.М.Клименко, В.П.Полухин и др. // *М.: Металлургия*, 1984ю - 287с.
6. Данько А.В. Розподіл опору деформації при кінематично симетричному і асиметричному плющенні / А.В.Данько, О.М. Кулік // *Луганськ, Вісник СУНУ ім. Даля*, №8 (126), ч.2., 2008. – С.127-132.
7. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. *М.: Машиностроение*, 1975. – 399с.

*Рекомендовано к печати д.т.н., проф. Луценко В.А.*