

*Бревнов А.А.
(ДонГТУ, г.Алчевск, Украина)*

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ ЗАКРУЧЕННОГО ПОТОКА В КОЛЬЦЕВОМ ЗАЗОРЕ

Розглянуто питання з визначення гідродинамічних параметрів закрученого потоку в кільцевій області з проникною внутрішньою циліндричною поверхнею.

***Ключові слова:** гідродинамічний фільтр, закрутка потоку, поле швидкостей, кільцевий зазор, рівняння Нав'є-Стокса, осьова, радіальна та тангенціальна швидкість, проникна поверхня.*

Рассмотрен вопрос по определению гидродинамических параметров закрученного потока в кольцевой области с проницаемой внутренней цилиндрической поверхностью.

***Ключевые слова:** гидродинамический фильтр, закрутка потока, поле скоростей, кольцевой зазор, уравнения Навье-Стокса, осевая, радиальная и тангенциальная скорость, проницаемая поверхность.*

Потребность в больших объемах технической воды при работе металлургических предприятий представляет серьезную проблему для Донбасского региона. Требуемое количество необходимой для технических нужд воды может быть получено при повторном многократном ее использовании после прохождения через систему очистки.

Это, в свою очередь, предъявляет к очистителям свои требования, основными из которых являются невысокая стоимость и простота обслуживания в сочетании достаточной эффективностью очистки.

В работе [1] обоснована конструкция гидродинамического неполнопоточного фильтра, использующего закрутку потока, в котором улучшение условий гидродинамического фильтрования, может быть достигнуто наличием тангенциальной скорости потока, которая может принимать значения, большие, чем осевая скорость.

В работе [2] представлена схема расчета параметров закрученного течения в кольцевом зазоре с помощью упрощенных уравнений Навье-Стокса, но расчетное скачкообразное изменение формы профилей скорости в начальных сечениях расчетной области является нелогичным и говорит о нефизичности процесса.

Целью исследования является корректировка постановки задачи и описание алгоритма численного расчета закрученного потока в кольцевой области с проницаемой внутренней цилиндрической поверхностью.

Система дифференциальных уравнений, описывающих течение в расчетной области, в соответствии с рисунком 1 выглядит следующим образом [2]:

$$v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_1}{dz} + \mathcal{G} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (1)$$

$$\frac{w^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r}, \quad (2)$$

$$v \frac{\partial w}{\partial r} + u \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{v \cdot w}{r} = \mathcal{G} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + -\frac{w}{r^2} \right), \quad (3)$$

$$\int_{R_1}^{R_2} r \frac{\partial u}{\partial z} dr = R_1 v_1 = -\frac{\lambda}{\mu} p_1 R_1. \quad (4)$$

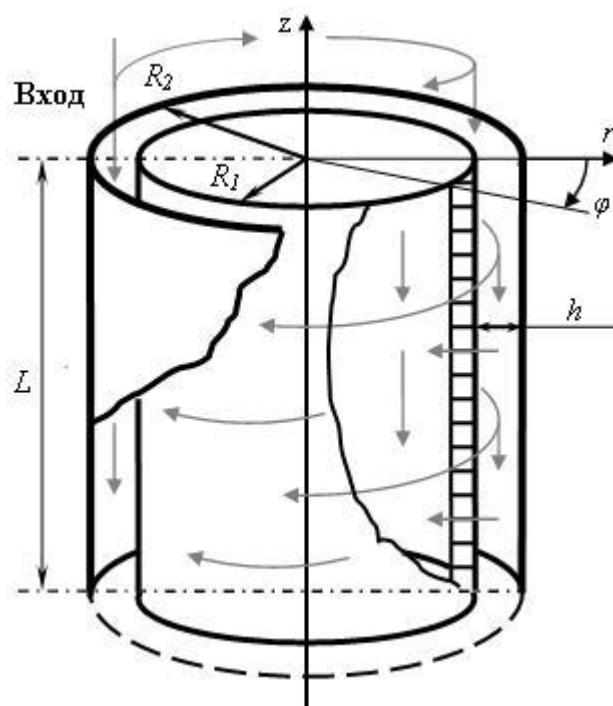


Рисунок 1 – Расчетная схема задачи

На проницаемой и непроницаемой стенках имеем следующие граничные условия:

$$u(R_1) = 0, \quad u(R_2) = 0, \quad (5)$$

$$v(R_1) = v_1, \quad v(R_2) = 0, \quad (6)$$

$$w(R_1) = 0, \quad w(R_2) = 0. \quad (7)$$

В основу решения положен приближенный подход, основанный на сведении уравнений в частных производных к многократному решению ОДУ в итерационном цикле. Особенностью предложенного метода приближенного решения является пошаговое решение в итерационном цикле краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Заменяя $\frac{\partial u}{\partial z}$, на участке $z_0 \leq z \leq z_0 + \Delta z$ при $z \in [z_0, z_0 + \Delta z]$, разностным выражением $\frac{u - u_0}{\Delta z}$, где $u_0 = u(z_0)$ - осевая скорость на предыдущем шаге, Δz - шаг по продольной координате, дифференциальное уравнение для определения осевой скорости, можно записать для сечения $z = const$ в следующем виде:

$$u'' = u' \cdot \left(\frac{V(r)}{\vartheta} - \frac{1}{r} \right) + u^2 \frac{1}{\vartheta \cdot \Delta z} - u \frac{u_0}{\vartheta \cdot \Delta z} + \frac{1}{\vartheta \cdot \rho} \cdot \frac{dp_1}{dz}, \quad (8)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по координате r .

Вводя в правую часть (8) значение производной $\frac{dp_1}{dz}$, которое уточняется в итерационном цикле, из решения краевой задачи для ОДУ с граничными условиями (5), определяется распределение осевой скорости в рассматриваемом сечении.

В соответствии с уравнением неразрывности [2]

$$\frac{\partial(ru)}{\partial z} + \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0,$$

можно определить граничные значения производной $\frac{\partial v}{\partial r}$:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=R_1} = -\frac{v_1}{R_1}, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=R_2} = 0, \quad (9)$$

и аппроксимировать радиальную скорость в начальном сечении по высоте зазора с помощью полинома Эрмита [3]:

$$v(r) = \sum_{k=1}^4 z_k \cdot q_k(r), \quad (10)$$

где коэффициенты аппроксимации принимают значения

$$z_1 = v(R_1), \quad z_2 = v'(R_1), \quad z_3 = v(R_2) = 0, \quad z_4 = v'(R_2) = 0 \quad (11)$$

и выражаются граничными условиями (5)-(7). Базисные функции $q_k(r)$ имеют следующий вид:

$$q_1(r) = \left(1 - \frac{2 \cdot (R_1 - r)}{h} \right) \cdot \frac{(r - R_2)^2}{h^2}, \quad (12)$$

$$q_2(r) = \frac{1}{h^2} (R_1 - r) \cdot (r - R_2)^2, \quad (13)$$

$$q_3(r) = \left(1 + \frac{2 \cdot (R_2 - r)}{h} \right) \cdot \frac{(r - R_2)^2}{h^2}, \quad (14)$$

$$q_4(r) = \frac{1}{h^2} (r - R_2) \cdot (r - R_1)^2. \quad (15)$$

По имеющимся значениям осевой скорости в текущем и предыдущем сечениях и распределению радиальной скорости в предыдущем сечении, используя разностный аналог уравнения неразрывности (4), определяем распределение радиальной скорости в текущем сечении $i = 0, 1, \dots, n_r$, где n_r – число участков разбиения по радиальной координате.

$$v_{i+1} = v_i \cdot \frac{r_i}{r_{i+1}} - \frac{r_i [u(r_i) - u_0(r_i)] + r_{i+1} [u(r_{i+1}) - u_0(r_{i+1})]}{2 \cdot r_{i+1} \cdot \Delta z} \Delta r_i. \quad (16)$$

Аналогичным образом представим уравнение (3) в виде:

$$w'' = \left(\frac{v}{g} - \frac{1}{r} \right) w' + \left(\frac{v}{r \cdot g} + \frac{1}{r^2} \right) w + \frac{u}{g} \cdot \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (17)$$

При этом разностное представление для продольного градиента тангенциальной скорости

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{w - w_0}{\Delta z}, \quad (18)$$

позволяет уравнение (17) записать в виде:

$$w'' = \left(\frac{v}{g} - \frac{1}{r} \right) w' + \left(\frac{v}{r \cdot v} + \frac{1}{r^2} + \frac{u}{v \cdot \partial z} \right) w - \frac{u}{v} \cdot \frac{w_0}{\Delta z}. \quad (19)$$

В качестве начальных условий принимаем равномерное распределение осевой скорости во входном сечении, распределение радиальной скорости в соответствии с выражением (10) считаем, а тангенциальную скорость считаем распределенной по закону твердого тела, т.е.

$$u(0, r) = \frac{Q}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} = const, \quad (20)$$

$$v(0, r) = v_1 \left[1 - \frac{2 \cdot (R_1) - r}{R_2 - R_1} \right] \cdot \frac{(r - R_2)^2}{(R_2 - r_1)^2}, \quad (21)$$

$$w(0, r) = \omega_0 \cdot r. \quad (22)$$

С использованием библиотек математических подпрограмм путем пошагового решения сформулированных краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений можно рассчитать поле осевой, радиальной и тангенциальной скоростей течения жидкости в рассматриваемой зоне, а также изменение давления в расчетной облас-

ти. При этом для определения давления на основе уравнения неразрывности понадобится использование итерационной процедуры.

Сгущение сетки в радиальном направлении целесообразно выполнять таким образом, чтобы отношение двух последовательных шагов сетки было постоянным [4].

$$k = \frac{r^{j+1} - r^j}{r^j - r^{j-1}}. \quad (23)$$

Расчеты проводились на сетке, равномерной по осевой координате, и с переменным шагом по радиусу. Число шагов по осевой координате определяется расчетом при фиксированной, определенной в исходных данных, величине шага. Закон изменения шага по радиусу определяется заданием коэффициента k .

Для реализации численного решения была разработана программа на языке «Фортран» с использованием стандартных подпрограмм из математической библиотеки для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений на основе конечно-разностного метода с переменным порядком аппроксимации и переменным шагом.

Исходные данные к расчету:

R_1 – радиус внутренней проницаемой поверхности, (м);

R_2 – радиус внешней непроницаемой поверхности, (м);

Δz – шаг по оси z , (м);

ρ – плотность жидкости, (кг/м³);

\mathcal{G} – кинематическая вязкость жидкости, (м²/с);

L – длина фильтра, (м);

Q – расход жидкости в начальном сечении, (м³/час);

$p_1(0)$ – перепад давления на проницаемой поверхности в начальном сечении, (Па);

ω_0 – начальная угловая скорость закрутки, (1/с);

λ – коэффициент проницаемости поверхности, (м);

Q_L – расход в конечном сечении.

Распределение осевой, радиальной и тангенциальной скоростей в сечении $z = 0$ определяется по формулам (20)-(22).

1.) Координата z на каждом шаге определяется как

$$z^i = z^{i-1} + \Delta z. \quad (24)$$

2.) Выбираем ориентировочное значение добавки давления Δp_1^i на участке длиной Δz .

3.) Определяем изменение давления вдоль координаты z по формуле:

$$\frac{dp_1}{dz} \approx \frac{\Delta p_1}{\Delta z}. \quad (25)$$

4.) Давление в текущем сечении определяем как сумму величины давления p в предыдущем сечении по координате z и добавки давления Δp в направлении координаты z :

$$p_1(z^i) = p_1(z^{i-1}) + \Delta p_1. \quad (26)$$

5.) Определяем радиальную скорость жидкости V_1 на внутренней проницаемой поверхности по формуле [2]:

$$v_1 = -\frac{\lambda}{\mu} p_1.$$

6.) Расход в текущем сечении определяем как разность между расходом в предыдущем сечении и расходом сквозь проницаемую поверхность на участке длиной Δz :

$$Q^i = Q^{i-1} - v_1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_1 \cdot \Delta z. \quad (27)$$

7.) Путем численного решения уравнения (8) с граничными условиями (5), получаем распределение значений осевой скорости в текущем сечении $U(z^i, r)$.

8.) Вычисляем значение функционала

$$f(\Delta p_i) = Q - \sum_{j=1}^n 2 \cdot \pi \cdot \frac{r_{j+1} + r_j}{2} \cdot \frac{u_{j+1} + u_j}{2} \cdot (r_{j+1} - r_j), \quad (28)$$

определяющего разность между текущим расходом Q^i и расходом, соответствующим вычисленному распределению скорости $u(z^i, r)$.

9.) Из условия минимизации функционала (28) методом Ньютона [5], определяем уточненное значение Δp_1^i . При выполнении условия $f(\Delta p_1^i) < \delta$, где δ – установленная минимальная величина, переходим к следующему пункту. В противном случае возвращаемся к пункту 3.

10.) Определяем распределение радиальной скорости с помощью выражения (16).

11.) Путем численного решения уравнения (19) с граничными условиями (7), получаем распределение значений тангенциальной скорости в текущем сечении $w(z^i, r)$.

12.) Сравниваем значение расхода на текущем шаге Q^i с величиной расхода в конечном сечении Q_L . При условии $Q^i > Q_L$ возвращаемся к пункту 1. В случае достижения расхода Q^i величины Q_L расчет останавливаем.

Обычным правилом для обоснования точности решения является исследование поведения решения при сгущении сетки для того, чтобы обосновать сходимость численного решения с увеличением численной дискретизации и обосновать использование в дальнейших вычислениях размер шагов сетки. Кроме этого, рекомендуется тестировать полученное приближенное решение, путем сравнения результатов решения на ее основе с известными экспериментальными данными, либо с точным решением для упрощенной модельной задачи, представляющей собой частный случай исследуемой, более общей проблемы.

В качестве характерных интегральных параметров, поведение которых исследовалось при сгущении сетки были выбраны:

1. Параметр закрутки потока вблизи проницаемой поверхности $\text{tg}\varphi$ [6];
2. Коэффициент трения на проницаемой стенке

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_{cp}^2}, \quad (29)$$

где u_{cp} – среднерасходная скорость в расчетной области,

τ_w – касательное напряжение на проницаемой стенке, которое определяется следующим образом [7]:

$$\tau_w = \sqrt{\tau_{rz}^2 + \tau_{r\varphi}^2}, \quad (30)$$

$$\tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad (31)$$

$$\tau_{r\varphi} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right), \quad (32)$$

где μ – динамическая вязкость жидкости.

Исследование сходимости численного решения производилось при увеличении степени дискретизации, т.е. как соотносятся между собой значения $tg\varphi$, определенные несколько раз с последовательным увеличением числа узлов аппроксимации профилей скорости потока в расчетной области. Та же самая операция была проделана для коэффициента трения на проницаемой поверхности.

Параметром, который определяет степень дискретизации при выбранном способе построения сетки, является величина пристеночного шага Δr_1 . Рассматривались 4 значения из диапазона $\Delta r_1 = 5 \cdot 10^{-2} h - 1 \cdot 10^{-3} h$.

Вычисление параметра закрутки и коэффициента трения при указанных значениях Δr_1 производилось по всей длине расчетной области.

Полученные результаты показали сходимость разработанного расчетного метода.

Для тестирования полученного численного решения было использовано известное решение задачи о ламинарном течении в кольцевой трубе, которое дает распределение осевой скорости в виде профиля Пуазейля.

Полученное решение в кольцевой трубе при нулевом отсосе через проницаемую поверхность показало хорошую сходимость. Поэтому можно сказать, что практически полное совпадение приведенных профилей дает возможность считать разработанную схему численного решения адекватной и, с достаточной точностью отражающей течение в расчетной области.

В качестве иллюстрации результатов расчета на рисунке 2 показаны наиболее характерные профили осевой и тангенциальной скорости в относительных безразмерных координатах \bar{z} , \bar{r} , \bar{u} , \bar{w} :

$$\bar{z} = \frac{z}{L}, \quad \bar{r} = \frac{r - R_1}{R_2 - R_1}, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_{cp}}, \quad \bar{w} = \frac{w}{u_{cp}}. \quad (33)$$

Расчет произведен для следующих исходных данных:

- расход $Q = 2$ м³/час;
- радиус проницаемого цилиндра $R_1 = 0,048$ м;
- ширина кольцевого зазора $h = 0,003$ м;
- длина области фильтрования $L = 0,13$ м;
- жидкость, не прошедшая сквозь проницаемую поверхность: 5%;
- кинематическая вязкость жидкости $\nu = 1 \cdot 10^{-6}$ м²/с;
- угловая скорость закрутки во входном сечении $\omega_0 = 25$ рад/с.

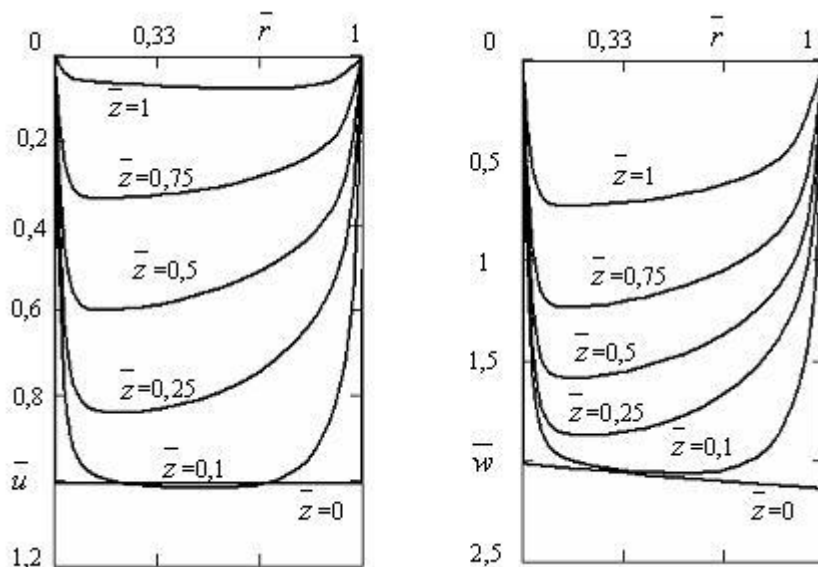


Рисунок 2 – Профили осевой и тангенциальной скорости в разных сечениях кольцевой рабочей полости при зазоре $h=3$ мм

Таким образом, в результате данного исследования получено численное решение задачи движения закрученного потока в кольцевой области между двумя цилиндрическими поверхностями с проницаемым внутренним цилиндром. Полученное решение отличается тем, что не требует больших вычислительных ресурсов и может быть задействовано в общей методике расчета устройства очистки. В то же время оно дает возможность определить три компоненты скорости жидкости и распределение давления в исследуемых областях.

Направление дальнейших исследований состоит в подборе наиболее рациональных параметров течения в условиях гидродинамических фильтров, за счет изучения гидродинамики несущего потока и определения траекторий движения взвешенных твердых частиц в рассчитанном поле скоростей.

Библиографический список

1. Бревнов А.А. Обоснование конструкции гидродинамического неполнопоточного фильтра с закруткой потока. Сборник научных трудов ДонГТУ. Алчевск, Вып. 25. – 2007, с.208-218.
2. Бревнов А.А., Мочалин Е.В. Расчет поля скоростей закрученного потока в кольцевой области с проницаемой стенкой. Вісник СумДУ. № 12(58), 2003, с. 65-69.
3. Молчанов И.Н., Николенко Л.Д. Основы метода конечных элементов. - Киев: Наукова думка, 1989. - 269с.
4. Андерсон Д., Таннекилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2х томах: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990.

5. Г. Корн, Т. Корн. *Справочник по математике* (для научных работников и инженеров). М., 1978 г., 832 с., ил.

6. Халатов А.А. *Теория и практика закрученных потоков*. – Киев: Наук. думка, 1989. - 192с.

7. Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа*. Изд. 5-е, переработанное, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1978, 736 с.

Рекомендовано к печати д.т.н., проф. Финкельштейном З.Л.