УДК 621. 771. 26. 001+669

к.т.н, доц. Шпаков В.А.,
аспирант Базарова Е.В.
(ДонГТУ, г. Алчевск, Украина)

О ТОЧНОСТИ НАНЕСЕНИЯ И ИЗМЕРЕНИЯ КООРДИНАТНЫХ СЕТОК

Наведені результати аналізу точності нанесення та вимірювання координатних сіток, застосованих при дослідженні деформацій фасонних профілів.

Результаты проведения исследований в технической области довольно часто содержат различные погрешности, наличие которых обусловлено влиянием ряда факторов. К числу таких факторов относятся ошибки измерения исследуемых параметров. Известны случаи, когда ошибки измерения параметров соразмерны с величиной измеряемых параметров. В связи с этим весьма важной является задача определения точности базовых параметров исследования, которые впоследствии будут непосредственно влиять на величины изучаемых характеристик.

В работе [1] приведены результаты исследования формоизменения металла в закрытом разрезном калибре методом конечных деформаций. При определении точности нанесения и измерения координатных сеток был предположительно принят закон нормального распределения случайной величины. Вследствие этого возникла потребность математического обоснования предполагаемого закона нормального распределения погрешности нанесения и измерения координатных сеток, используемых для исследования деформаций.

Целью работы является определение методом математической статистики закона распределения погрешностей нанесения и измерения координатных сеток.

В данной работе приведены результаты оценки точности нанесения и измерения координатных сеток. Для решения поставленной задачи в качестве выборочных данных были приняты результаты измерения размеров ячеек одного из столбцов координатной сетки.

На основе выборочных данных предварительно определен характер распределения генеральной совокупности, из которой сделана выборка.

Результаты указанных измерений сведены в таблицу 1.

Таблица 1 – Результаты измерений

№ п/п	Y	ΔY	$\alpha = h_{абс} - \Delta Y$	№ п/п	Y	ΔY	$\alpha = h_{абс} - \Delta Y$
$h_{нач}$	87,539	-	-	23	42,155	1,977	-0,023
1	86,152	1,387	-0,613	24	40,137	2,018	+0,018
2	84,170	1,982	-0,018	25	38,112	2,025	+0,025
3	82,152	2,018	+0,018	26	36,117	1,995	-0,005
4	80,167	1,985	-0,015	27	34,137	1,980	-0,020
5	78,144	2,023	+0,023	28	32,118	2,019	+0,019
6	76,144	2,000	0	29	30,132	1,986	-0,014
7	74,152	1,992	-0,008	30	28,117	2,015	+0,015
8	72,137	2,015	+0,015	31	26,109	2,008	+0,008
9	70,148	1,989	-0,011	32	24,133	1,976	-0,024
10	68,148	2,000	0	33	22,119	2,014	+0,014
11	66,159	1,989	-0,011	34	20,151	1,968	-0,032
12	64,141	2,018	+0,018	35	18,185	1,966	-0,034
13	62,130	2,011	+0,011	36	16,157	2,028	+0,028
14	60,124	2,006	+0,006	37	14,140	2,017	+0,017
15	58,124	2,000	0	38	12,144	1,996	-0,004
16	56,132	1,992	-0,008	39	10,132	2,012	+0,012
17	54,120	2,012	+0,012	40	8,171	1,961	-0,039
18	52,123	1,997	-0,003	41	6,108	2,063	+0,063
19	50,132	1,991	-0,009	42	4,132	1,976	-0,024
20	48,128	2,004	+0,004	43	2,117	2,015	+0,015
21	46,128	2,000	0	44	0,173	1,944	-0,066
22	44,132	1,996	-0,004				

Для удобства первичной обработки полученных результатов выборочные данные были сведены в таблицу 2 в порядке возрастания. Базовый размер ячейки составляет 2х2 мм. Первое значение было исключено из ряда размеров в силу значительного отклонения от базового значения и в математической обработке не использовалось.

Дальнейшие расчеты были проведены с использованием погрешностей размеров ячеек, значения которых были преобразованы в вариационный ряд (таблица 3).

Таким образом, объем выборки составляет N=43.

Размах выборки

$$R = X_{\max} - X_{\min} = 0{,}063 - (-0{,}066) = 0{,}129 \quad (1)$$

Таблица 2 – Размеры ячеек координатной сетки

1,944	1,961	1,966	1,968	1,976	1,976	1,977
1,980	1,982	1,985	1,986	1,989	1,989	1,991
1,992	1,992	1,995	1,996	1,996	1,997	2
2	2	2	2,004	2,006	2,008	2,011
2,012	2,012	2,014	2,015	2,015	2,015	2,017
2,018	2,018	2,018	2,019	2,023	2,025	2,028
2,063						

Таблица 3 – Вариационный ряд погрешностей размеров ячеек α

-0,066	-0,039	-0,034	-0,032	-0,024	-0,024	-0,023
-0,020	-0,018	-0,015	-0,014	-0,011	-0,011	-0,009
-0,008	-0,008	-0,005	-0,004	-0,004	-0,003	0
0	0	0	+0,004	+0,006	+0,008	+0,011
+0,012	+0,012	+0,014	+0,015	+0,015	+0,015	+0,017
+0,018	+0,018	+0,018	+0,019	+0,023	+0,025	+0,028
+0,063						

Количество интервалов разбиения находим по формуле Стэрджесса [2]:

$$k \approx 1 + 3{,}322 \lg N = 1 + 3{,}322 \lg 43 = 6{,}426. \qquad (2)$$

Принимаем

$$k = 7. \qquad (3)$$

Длина интервала:

$$\Delta = \frac{R}{k} = \frac{0{,}129}{7} = 0{,}01843. \qquad (4)$$

Разбиение выборки на интервалы представлено в виде таблицы 4, в которую также занесены абсолютное число попаданий значений случайной величины в определенный интервал (т.е. накопленная частота) и относительное число попаданий указанных значений (т.е. накопленная частость).

При группировании данных в интервалы и определении частоты попадания случайной величины в заданный интервал верхнюю границу интервала будем относить к последующему интервалу.

Таблица 4 – Разбиение выборки на интервалы

Интервал			Накопленная частота	Накопленная частость, %
Нижняя граница	Середина	Верхняя граница		
-0,066	-0,056785	-0,04757	1	2,326
-0,04757	-0,038355	-0,02914	3	6,977
-0,02914	-0,019925	-0,01071	9	20,93
-0,01071	-0,001495	+0,00772	13	30,233
+0,00772	+0,016935	+0,02615	15	34,884
+0,02615	+0,035365	+0,04458	1	2,326
+0,04458	+0,053795	+0,06301	1	2,326

На основе данных таблицы 4 построена диаграмма накопленных частостей, представленная на рисунке 1, графическое изображение которой, именуемое гистограммой частот, изображено на рисунке 2. Эмпирическую функцию распределения случайной величины можно изобразить также в виде полигона частот, приведенного на рисунке 3.

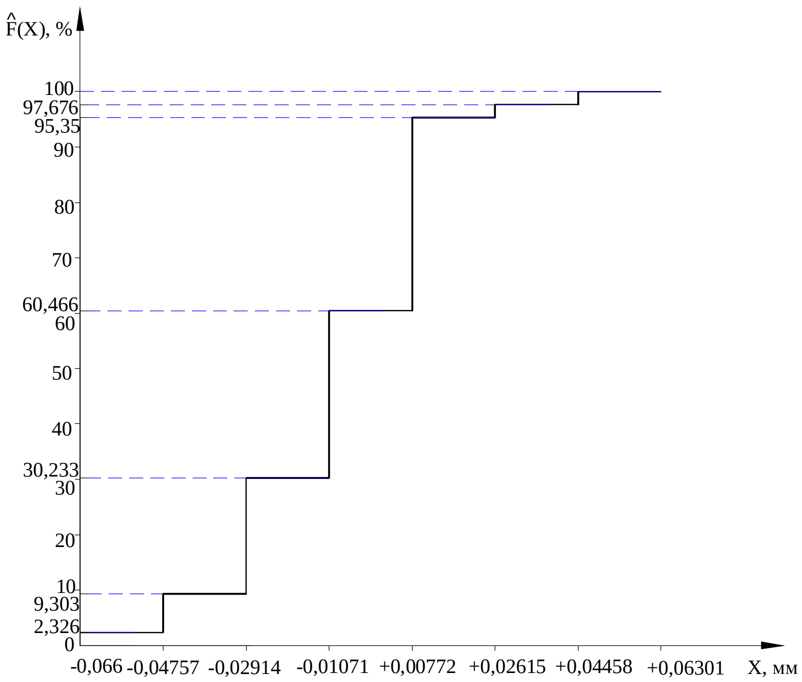

Рисунок 1 – Диаграмма накопленных относительных частостей

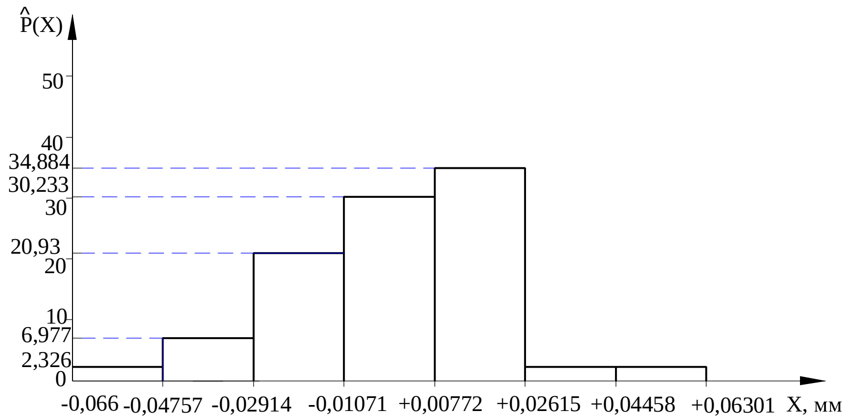

Рисунок 2 – Гистограмма частот

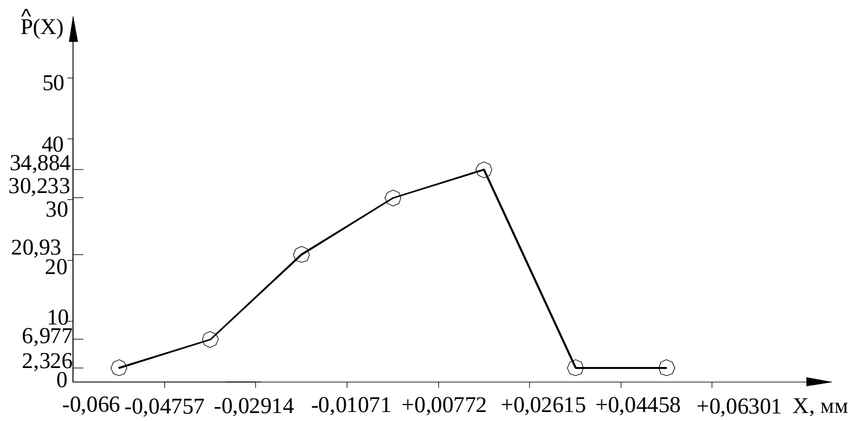

Рисунок 3 – Полигон частот

Согласно рисунков 1÷3 можно сделать вывод, что распределение погрешностей нанесения координатной сетки близко к нормальному. Достоверность нормального закона распределения рассматриваемой величины была подтверждена посредством приближенной проверки и проверки нормальности по критерию χ^2 («хи»-квадрат). Математическая обработка данных выполнена согласно методике [2, 3].

Приближенная проверка нормальности распределения

Проверка заключается в определении величин асимметрии g_S и эксцесса E. Если характер распределения близок к нормальному, то оба этих параметра должны иметь малые значения. Степень малости указанных величин устанавливается в сравнении с их средними квадратичными ошибками.

Средняя квадратичная ошибка асимметрии g_S:

$$Sg_S = \sqrt{\frac{6(N-1)}{(N+1)(N+3)}} = \sqrt{\frac{6(43-1)}{(43+1)(43+3)}} = 0{,}35285, \qquad (5)$$

где N = 43 – объем выборки случайной величины X.

Средняя квадратичная ошибка эксцесса E:

$$S_E = \sqrt{\frac{24N(N-2)(N-3)}{(N-1)^2(N+3)(N+5)}} = \sqrt{\frac{24x43(43-2)(43-3)}{(43-1)^2(43+3)(43+5)}} = 0{,}6592. \qquad (6)$$

Подтверждением нормальности распределения является условие

$$\frac{g_S}{Sg_S} < (2 \div 3) \qquad (7)$$

и

$$\frac{E}{S_E} < (2 \div 3). \qquad (8)$$

Вычислим величины:

асимметрии g_S

$$g_S = \frac{\mu_3}{S^3} = \frac{-0{,}14561 \cdot 10^{-5}}{0{,}02139^3} = -0{,}1489, \qquad (9)$$

эксцесса

$$E = \frac{\mu_4}{S^4} - 3 = \frac{6{,}776 \cdot 10^{-7}}{0{,}02139^4} - 3 = 0{,}2394, \qquad (10)$$

где μ_3 – центральный момент распределения 3-ого порядка,

$S = \Delta\sqrt{\overline{X}^2 - (\overline{X})^2}$ – эмпирический стандарт ошибки,

$\overline{X}$ – среднее значение случайной величины X_i,

$\overline{X}^2$ – среднее значение квадратов случайной величины X_i,

$(\overline{X})^2$ – квадрат среднего значения случайной величины X_i,

μ_4 – центральный момент распределения 4-ого порядка.

Определим числовые характеристики выборки по признаку X. Вычисления будем выполнять, используя метод «условного нуля». При расчете центральних моментов распределения в качестве случайной величины X_i взята середина интервала. Выберем условный нуль C из вариационного ряда признака X. Обычно этому параметру придают значение, равное середине вариационного ряда, т.е. $C = -0{,}001495$. Для упрощения расчетов введена новая переменная – условная варианта u_i:

$$u_i = \frac{X_i - C}{\Delta}, \tag{11}$$

где $C = -0{,}001495$ – значение середины размаха выборки, принятое за начало отсчета.

Тогда

$$u_1 = \frac{-0{,}056785 - (-0{,}001495)}{0{,}01843} = -3.$$

Результаты вычислений значений u_i для последующих интервалов сведены в таблицу 5.

Таблица 5 – Результаты этапов расчета μ_3 и μ_4

N класса	X_i	m_i	u_i	m_iu_i	$m_iu_i^2$	$m_iu_i^3$	$m_iu_i^4$
1	-0,056785	1	-3	-3	9	-27	81
2	-0,038355	3	-2	-6	12	-24	48
3	-0,019925	9	-1	-9	9	-9	9
4	-0,001495	13	0	0	0	0	0
5	+0,016935	15	1	15	15	15	15
6	+0,035365	1	2	2	4	8	16
7	+0,053795	1	3	3	9	27	81
$\sum$	-	43	-	2	58	-10	250

Среднее значение условной варианты u_i:

$$\overline{U} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} m_i u_i = \frac{1}{43} x2 = 0{,}0465. \tag{12}$$

Квадрат среднего значения новой случайной величины u_i:

$$(\overline{U})^2 = 0{,}002163. \tag{13}$$

Среднее значение квадратов переменной u_i:

$$\overline{U}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} m_i u_i^2 = \frac{1}{43} x58 = 1{,}3488. \tag{14}$$

Эмпирический стандарт ошибки:

$$S = \Delta\sqrt{\overline{U}^2 - (\overline{U})^2} = 0{,}01843\sqrt{1{,}3488 - 0{,}002163} = 0{,}02139\,. \qquad (15)$$

Центральный момент распределения 3-ого порядка:

$$\mu_3 = \Delta^3\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} m_i u_i^3 - 3\overline{U}^2 \cdot \overline{U} + 2\cdot(\overline{U})^3\right] =$$

$$= 0{,}01843^3\left[\frac{1}{43}\left(-10\right) - 3x1{,}3488x0{,}0465 + 2\cdot 0{,}0465^3\right] = -0{,}14561\cdot 10^{-5}. \qquad (16)$$

Центральный момент распределения 4-ого порядка:

$$\mu_4 = \Delta^4\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} m_i u_i^4 - 4\frac{\overline{U}}{N}\sum_{i=1}^{k} m_i u_i^3 + 6\cdot\overline{U}^2\cdot\left(\overline{U}\right)^2 - 3\cdot(\overline{U})^4\right] =$$

$$= 0{,}01843^4\left[\frac{1}{43}\cdot 250 - 4\cdot\frac{0{,}0465}{43}\cdot\left(-10\right) + 6\cdot 1{,}3488\cdot 0{,}002163 - 3\cdot 0{,}0465^4\right] =$$

$$= 6{,}776\cdot 10^{-7}\,. \qquad (17)$$

Определим отношения асимметрии и эксцесса к соответствующим квадратичным ошибкам:

$$\left|\frac{g_S}{Sg_S}\right| = \left|\frac{-0{,}1489}{0{,}35285}\right| = 0{,}42192 \approx 0{,}422\,, \qquad (18)$$

$$\left|\frac{E}{S_E}\right| = \left|\frac{0{,}2394}{0{,}6592}\right| = 0{,}36314 \approx 0{,}363\,. \qquad (19)$$

Полученные отношения не превышают допустимой величины 2÷3. Это обстоятельство подтверждает нормальность данного распределения.

Проверка нормальности распределения по критерию соответствия χ^2 («хи» - квадрат)

Для выполнения проверки нормальности по критерию χ^2 результаты измерений предварительно группируются по интервалам с учетом следующих условий:

1) интервалы должны покрывать всю ось (– ∞, + ∞);

2) количество данных в каждом интервале должно быть не менее 5.

Разобьем выборку на интервалы с учетом указанных условий. Результаты разбиения сведены в таблицу 6.

Таблица 6 – Разбиение выборки на интервалы

Интервал		m_i	P_i	$\frac{(m_i - NP_i)^2}{NP_i}$
Нижняя граница	Верхняя граница			
$-\infty$	-0,023	6	0,140188	0,000131
-0,023	-0,011	5	0,168207	0,689329
-0,011	-0,004	6	0,127108	0,052242
-0,004	+0,004	7	0,153118	0,026275
+0,004	+0,014	6	0,171456	0,255548
+0,014	+0,018	5	0,055771	2,822842
+0,018	$+\infty$	8	0,184152	0,000838
$\sum$		43	1	3,847204=χ^2

Определим вероятность попадания в каждый интервал при нормальном распределении Xi

$$P_i = \Phi\left(\frac{X_i - \overline{X}}{S'}\right) - \Phi\left(\frac{X_{i-1} - \overline{X}}{S'}\right), \qquad (20)$$

где Ф – интеграл вероятности нормального распределения ($\int\limits_0^X$),

$\overline{X} = C + \Delta \cdot \overline{U} = -0{,}001495 + 0{,}01843 \cdot 0{,}0465 = -0{,}000638$ – среднее по всей выборке значение случайной величины,

$S' = \sqrt{S^2 - \frac{\Delta^2}{12}} = 0{,}02071$ – исправленный эмпирический стандарт (для интервального ряда при неизвестной средней квадратичной ошибке σ).

Результаты вычислений сведем в таблицу 6.

Рассчитаем эмпирическое значение критерия χ^2

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - NP_i)^2}{NP_i} = 3{,}847\,. \qquad (21)$$

Выберем уровень значимости ошибки $\alpha = 0{,}05$.

Определим число степеней свободы

$$f = k - 3 = 7 - 3 = 4\,, \qquad (22)$$

где $k = 7$ – количество интервалов разбиения выборки.

Критическое значение $\chi^2_{кр}$ для выбранных параметров составляет 9,49. Сравнение расчетного значения χ^2 с критическим (χ^2=3,847< $\chi^2_{кр}$=9,49) показывает, что нет оснований сомневаться в нормальности распределения.

Выполнен анализ точности нанесения и измерения координатных сеток, которые применены при исследовании деформаций фасонных профилей. Полученные результаты подтвердили предполагаемую ранее нормальность исследуемого распределения. Посредством анализа обоснована правомерность использования принятого ранее распределения. Дальнейшие исследования планируется проводить в области повышения точности размеров проката и жесткости прокатного оборудования.

Приведены результаты анализа точности нанесения и измерения координатных сеток, применяемых при исследовании деформаций фасонных профилей.

The results of the analyses of the exact drawing and measuring of the co-ordinates while investigating the cut profiles deformations are set.

Библиографический список

1. В.А. Шпаков, К.В. Базарова. Дослідження формозміни в закритому розрізному калібрі методом кінцевих деформацій /http://alma-mater.lnpu.edu.ua/elect_v/N4/07svamkd.pdf.

2. Румшиский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента: Справочник, – М.: Наука, 1971. – 192с.:ил.

3. Лапач С.Н., Чубенко А.В., Бабич П.Н. Статистика в науке и бизнесе. - Киев: МОРИОН, 2002. – 640 с.

Рекомендовано к печати к.т.н., проф. Ульяницким В.Н.