УДК 621.71+669

д.т.н. Гринкевич В.А.,
к.т.н. Кузьмина О.М.
(НМетАУ, г. Днепропетровск, Украина)

К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ В РАМКАХ НЕПРЯМОЙ ГРАНИЧНО-ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМУЛИРОВКИ

Запропонований підхід до вирішення задач в рамках теорії в'язко-пластичного плину, що базується на методі граничних елементів. Вирішена тестова задача Пуазейля. Розглянуто непряме формулювання крайової жестко-пластичної задачі у вигляді граничних інтегральних рівнянь.

Ключові слова: *крайова задача ОМТ, метод кінцевих елементів, теорія пластичного плину.*

Предложен подход для решения задач в рамках теории вязко-пластического течения, основанный на методе граничных элементов. Решена тестовая задача Пуазейля. Рассмотрена непрямая линеаризованая формулировка краевой жестко-пластической задачи в виде граничных интегральных уравнений.

Ключевые слова: *краевая задача ОМД, метод граничных элементов, теория пластичного течения.*

Постановка проблемы. Кузнечно-штамповочное производство является технологической основой современного машиностроения: номенклатура кованых и штампованных поковок сегодня достигает более миллиона типоразмеров, и это количество продолжает увеличиваться. В данной ситуации резко увеличиваются трудозатраты на проектирование новых технологических процессов, в связи с чем возрастает роль расчетных методов.

Современные численные методы решения краевых задач пластического деформирования в упруго–пластической или жестко–пластической постановке позволяют получить необходимую информацию о кинематических, деформационных и силовых параметрах для проектирования, в частности, таких процессов обработки металлов давлением, как ковка и объемная штамповка.

Вместе с тем, численные методы решения краевых задач обработки металлов давлением предполагают проведение большого количества последовательных приближений (итераций), каждая из которых требует большого количества вычислений. Даже на современных мощных персональных компьютерах время решения таких задач исчисляется часами и сутками, что не всегда является приемлемым. Это приводит к увеличению общего времени, необходимого для проектирования новых технологических процессов.

Поэтому проблема разработки методов решения краевых задач пластического деформирования, которые сочетали бы точность современных численных методов со скоростью решения, достаточной для систем управления процессами обработки давлением в режиме реального времени, является актуальной.

Современные требования к математическим моделям процессов обработки металлов давлением предполагают возможно более полный учет физико-механических процессов, протекающих в очаге пластической деформации.

Анализ последних достижений и публикаций и виделение нерешенных ранее частей общей проблемы. Основными фундаментальными проблемами подобных моделей являются учет несжимаемости деформируемой среды, а также учет ее физической нелинейности. Одной из фундаментальных проблем подобных моделей является сложность учета условия несжимаемости ($\mathrm{div}\vec{V} = 0$). В частности, при использовании вариационно-энергетического подхода часто применяют метод штрафных функций. Слишком большие штрафные константы, как правило, ухудшают качество получаемых решений - условие несжимаемости подавляет вязкие свойства деформируемой среды. Кроме того, применяется подход, основанный на минимизация функционала Маркова-Германна [см., например, 1]. Но и в этом случае проблема полностью не решается.

Альтернативный подход, обходящий указанную проблему заключается в использовании метода граничных интегральных уравнений с дискретизацией граничными элементами. Заметим, что существует две основных формулировки данного подхода: прямая и непрямая [2]. Существуют также и некоторые промежуточные формулировки, например, метод разрывных смещений [3], однако их рассмотрение выходит за рамки данной работы.

Первоначально разработанный для решения задач линейной теории упругости, данный подход применим и для решения задач в рамках теории вязко-пластического течения. Возможность этого определяется формальным совпадением уравнений связи между девиаторами напряжений и деформаций (скоростей деформации), а также аналогичным математическим аппаратом теории напряжений и деформаций. В самом деле, заменив в фундаментальном решении Кельвина [4] модуль сдвига μ на условную вязкость G (определяемую как отношение интенсивности касательных напряжений к интенсивности скоростей сдвиговых деформаций) и положив коэффициент Пуассона ν=0,5 (для удовлетворения условия несжимаемости), получаем фундаментальные сингулярные решения для линейно-вязкой несжимаемой среды.

Постановка задачи. Целью данной работы является разработка подхода к решению краевых задач ОМД, который предусматривал бы получение решений с точностью, не уступающей известным численным методам, и обладающего скоростью получения результата, пригодной для использования их в режиме реального времени.

Изложение основного материала исследования. С этой целью была разработана математическая модель. В качестве тестовой была выбрана классическая задача о плоском течении линейно-вязкой несжимаемой среды в полуограниченном канале с параллельными стенками (задача Пуазейля). Решение этой задачи методом конечных элементов изложено, в частности, в [5]. В [6] было проведено тестирование предлагаемой модели для случая плоской деформации.

В качестве базового был использован кусочно-постоянный граничный элемент с узловой точкой в середине. Разбиение контура на элементы и соответствующие граничные условия показаны на рисунке 1.

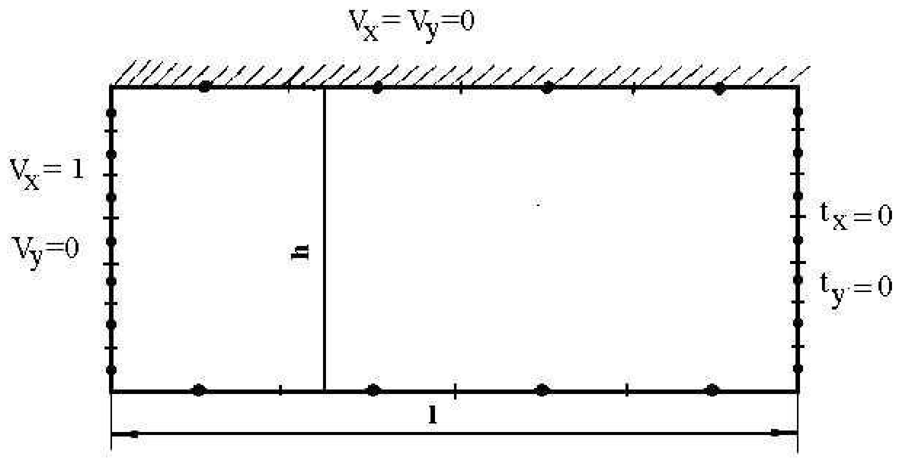

Рисунок 1 – Прямолинейный канал, дискретизация контура и граничные условия

Известно, что на относительно небольшом удалении от входа в канал течение становится одномерным, и профиль скорости потока не меняется. Вертикальная составляющая V_y=0, горизонтальная V_x уже не зависит от X. Распределение скорости на установившемся участке задается формулой:

$$V_x = \frac{3B}{2h^3}(h^2 - y^2), \qquad (1)$$

где h – высота канала. Величина $2B$ представляет собой расход сплошной среды в поперечном сечении канала.

При расчетах было принято l=3h для заведомого попадания в зону установившегося течения. На рис. 2 приведены эпюры горизонтальной составляющей скорости V_x, построенные для различных значений X/h. Анализ результатов показывает, что на достаточном удалении от входа в канал вычисленные значения V_x незначительно отличаются от аналитического решения (1); средняя относительная погрешность составляет 8,3% , причем в точках, близких к оси канала, она не превышает 5%.

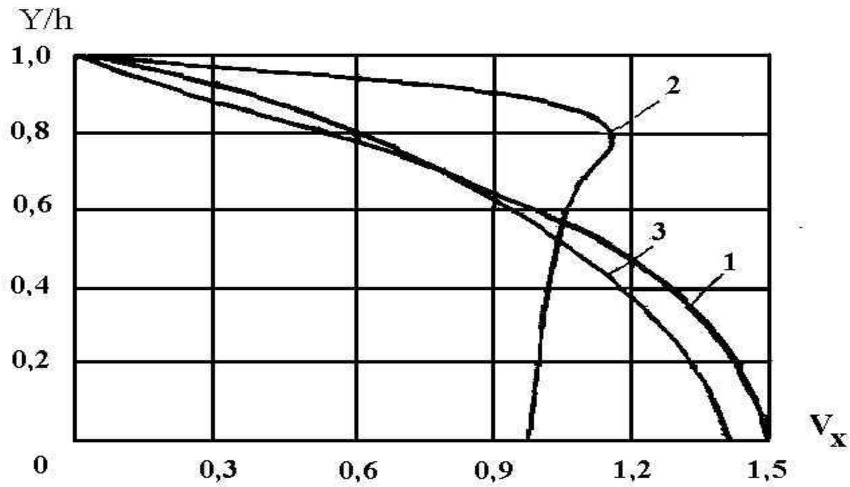

Рисунок 2 – Эпюры горизонтальной составляющей скорости V_x, построенные для различных значений X/h:

$1 - X = \infty$; $2 - X = 0{,}2h$; $3 - X = 3h$

Как уже говорилось выше, метод граничных интегральных уравнений изначально был предназначен для решения физически линейных задач. Однако существует возможность его адаптации и для задач с существенной физической нелинейностью, в частности, для задач обработки металлов давлением.

В рамках теории пластического течения Сен-Венана–Леви–Мизеса и непрямой формулировки метода граничных интегральных уравнений мы можем представить себе воображаемое линейно-вязкое тело, для которого объемные силы и внешние фиктивные нагрузки модифицированы таким образом, что поле скоростей, полученное при решении краевой задачи, будет соответствовать реальному телу с заданной реологической зависимостью. Обычно эти модифицированные нагрузки подбираются путем последовательных приближений в рамках методов дополнительных сил (напряжений). Поэтому целесообразно было бы сформулировать краевую задачу таким образом, чтобы исключить применение итерационных процедур. Для этого необходимо получить разрешающую систему уравнений, линейных относительно неизвестных краевой задачи.

Сформулируем следующее утверждение [7].

Для краевой жестко-пластической задачи с корректно заданными граничными условиями существует разрешающая система уравнений, линейная относительно неизвестных данной задачи.

Как известно, краевая задача линейной упругости (вязкости) может быть корректно сформулирована в виде системы граничных интегральных уравнений:

$$V_i(x_0,\tau)=\int_S V_{ik}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+\int_V V_{ik}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV, \qquad (2)$$

$$t_i(x_0,\tau)=\frac{1}{2}\delta_{ik}t_k^*(x_0,\tau)+\int_S T_{ik}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+\int_V T_{ik}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV. \qquad (3)$$

В приведенных формулах: V_{ik} – функции влияния на скорость от воздействия единичной сосредоточенной силы, приложенной к границе деформированного тела; T_{ik} - функции влияния на напряжения от воздействия единичной сосредоточенной силы, приложенной к границе деформированного тела; t_k* - интенсивность фиктивных нагрузок; E – формальный аналог модуля Юнга, характеризующий линейно-вязкие свойства среды; τ - время; x_0 – координата точки приложения сосредоточенной силы; δ_{ik} – компонента тензора Кронекера; F_k – компонента реальных объемных сил, приложенных к телу.

Переход к физически нелинейной краевой задаче производится путем добавления поля фиктивных объемных сил, $F_k^{*доп.}(E,\tau)$, распределенных таким образом, чтобы напряженно-деформированное состояние в любой точке тела V соответствовало реальной жестко-пластической среде с заданными реологическими свойствами, т. е. чтобы выполнялось также и уравнение связи:

$$V_i(x_0,\tau)=\int_S V_{ij}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+\int_V V_{ij}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV+$$

$$+\int_V V_{ij}(x,E,\tau)F_k^{*доп.}(E,\tau)dV, \qquad (4)$$

$$t_i(x_0,\tau)=\frac{1}{2}\delta_{ik}t_k^*(x_0,\tau)+\int_S T_{ij}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+$$

$$+\int_V T_{ij}(x_0,E,\tau)F\ (E,\tau)dV+\int_V T_{ij}(x,\tau)F_k^{*\text{доп.}}(E,\tau)dV \qquad (5)$$

В уравнениях (4) и (5) неизвестными являются распределение интенсивности фиктивных нагрузок $t_k^*(E,\tau)$ на поверхности S и распределение интенсивности фиктивных дополнительных объемных сил $F_k^{*\text{доп.}}(E,\tau)$ внутри V.

Если известно распределение $F_k^{*\text{доп.}}(E,\tau)$, то уравнения (4) и (5) определяют решение любой корректно поставленной краевой жестко-пластической задачи.

Таким образом, приведена непрямая формулировка краевой жестко-пластической задачи в виде граничных интегральных уравнений. Интегральные уравнения (4) и (5) в общем случае являются нелинейными вследствие нелинейности реологических свойств жестко-пластической среды.

Поскольку при выполнении условия сплошности компоненты напряженно-деформированного состояния в любой точке деформированного тела являются непрерывными, то непрерывным является и распределение $F_k^{*\text{доп.}}(E,\tau)$. Следовательно, можно воспользоваться обобщенной теоремой о среднем значении определенного интеграла и записать выражения (4) и (5) следующим образом:

$$V_i(x_0,\tau)=\int_S V_{ij}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+\int_V V_{ij}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV+$$

$$+F_k^{*\text{доп.ср.}}(\tau)\int_V V_{ij}(x,E,\tau)dV, \qquad (6)$$

$$t_i(x_0,\tau)=\frac{1}{2}\delta_{ik}t_k^*(x_0,\tau)+\int_S T_{ij}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+$$

$$+\int_V T_{ij}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV+F_k^{*\text{доп.ср.}}(\tau)\int_V T_{ij}(x,\tau)dV, \qquad (7)$$

где $F_k^{*доп.ср.}(\tau)$ – среднеинтегральное значение проекции вектора фиктивных дополнительных объемных сил.

Уравнения (6) и (7) являются линейными относительно неизвестных краевой задачи. Однако, поскольку были введены дополнительные неизвестные краевой задачи, для замыкания разрешающей системы необходимы дополнительные уравнения.

В качестве дополнительных уравнений используем условие глобального равновесия:

$$\int_S t_k^*(E,\tau)dS + \int_V F_k(E,\tau)dV + F_k^{*доп.ср.}(\tau)\int_V dV = 0\,. \tag{8}$$

Физический смысл уравнения (8) заключается в следующем: сумма равнодействующих от всех фиктивных нагрузок должна быть равна нулю в направлении осей выбранной системы координат. Таких уравнений необходимо три для объемной задачи и два – для двумерной.

Таким образом, получена замкнутая разрешающая система линейных уравнений (6 – 8) краевой жестко-пластической задачи с корректно заданными граничными условиями.

Здесь необходимо дать дополнительные пояснения. В некоторых случаях одно из условий обобщенной теоремы о среднем (а именно, неизменность знака функции, которая остается под знаком интеграла) может не выполняться. В этих случаях решение системы (6 - 8), полученной в [7], будет приближенным решением краевой задачи.

Преобразуем систему (3 - 5) несколько иначе. Дополнительно приложим к телу две равномерно распределенные объемные силы, имеющие одинаковую плотность распределения C и противоположные по знаку. Тогда имеем:

$$V_i(x_0,\tau) = \int_S V_{ij}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS + \int_V V_{ij}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV +$$

$$+\int_V V_{ij}(x,E,\tau)(F_k^{*доп.}(\tau) + C - C)dV\,, \tag{9}$$

$$t_i(x_0,\tau) = \frac{1}{2}\delta_{ik}t_k^*(x_0,\tau) + \int_S T_{ij}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS +$$

$$+\int_V T_{ij}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV + \int_V T_{ij}(x,\tau)(F_k^{*доп.}(\tau) + C - C)dV\,. \tag{10}$$

В силу аддитивности определенного интеграла:

$$V_i(x_0,\tau)=\int_S V_{ij}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+\int_V V_{ij}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV+$$

$$+\int_V V_{ij}(x,E,\tau)(F_k^{*доп.}(\tau)+C)dV-\int_V V_{ij}(x,E,\tau)C)dV, \qquad (11)$$

$$t_i(x_0,\tau)=\frac{1}{2}\delta_{ik}t_k^*(x_0,\tau)+\int_S T_{ij}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+$$

$$+\int_V T_{ij}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV+\int_V T_{ij}(x,\tau)(F_k^{*доп.}(\tau)+C)dV-\int_V T_{ij}(x,\tau)CdV. \qquad (12)$$

Предположим, что величина C такова, что заведомо обеспечивается неизменность (положительность) знака $(F_k^{*доп.}(\tau)+C)$. Заметим также, что для сингулярных функций (функций влияния) существует интеграл в смысле главного значения Коши. Тогда условия обобщенной теоремы о среднем будут выполнены, и выражения (11) и (12) преобразовываются к виду:

$$V_i(x_0,\tau)=\int_S V_{ij}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+\int_V V_{ij}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV+$$

$$+V_{ij}^{ср.}(x,E,\tau)\int_V(F_k^{*доп.}(\tau)+C)dV-\int_V V_{ij}(x,E,\tau)C)dV, \qquad (13)$$

$$t_i(x_0,\tau)=\frac{1}{2}\delta_{ik}t_k^*(x_0,\tau)+\int_S T_{ij}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+$$

$$+\int_V T_{ij}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV+T_{ij}^{ср.}(x,\tau)\int_V(F_k^{*доп.}(\tau)+C)dV-\int_V T_{ij}(x,\tau)CdV. \qquad (14)$$

Условие глобального равновесия (8) в этом случае принимает следующий вид:

$$\int_S t_k^*(E,\tau)dS+\int_V F_k(E,\tau)dV+\int_V(F_k^{*доп.}(\tau)+C)dV-\int_V CdV=0. \qquad (15)$$

Таким образом, получена разрешающая система уравнений, также линейная относительно неизвестных краевой задачи, но вместо усредненной дополнительной объемной силы появляется другая неизвестная - $\int\limits_V (F_k^{*\text{доп.}}(\tau) + C)dV$, которая является компонентой равнодействующей дополнительных объемных сил с точностью до постоянной.

Решение системы (13 - 15) и будет решением корректно сформулированной жестко-пластической задачи.

Выводы.

1. Получена разрешающая система уравнений, линейная относительно неизвестных краевой задачи ОМД, позволяющая получать решение с высокой скоростью.
2. Разработан подход к решению краевых задач ОМД, позволяющий рассчитывать формоизменение металла в режиме реального времени.

Библиографический список

1. В.Н. Данченко, А.А. Миленин, В.И. Кузьменко, В.А. Гринкевич Компьютерное моделирование процессов обработки металлов давлением. – Дніпропетровськ: Системні технології, 2005.– 488 с.

2. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. Пер.с англ. – М.: Мир, 1984. – 494 с.

3. Крауч С., Старфилд Л. Методы граничных элементов в механике твердого тела. Пер. с англ.– М.: Мир, 1987. – 328 с.

4. Бреббия К, Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. Пер.с англ. – М: Мир, 1982. – 248 с.

5. Гун Г.Я. Математическое моделирование процессов обработки металлов давлением. – М.: Металлургия, 1983. – 352 с.

6. Гринкевич В.А. К вопросу о применении метода граничных элементов для решения технологических задач теории пластичности / Математические методы и компьютерное моделирование в исследовании и проектировании механических систем: Сб. науч. тр. / НАН Украины. Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова. Науч. совет НАН Украины по проблеме «Кибернетика». – Киев, 1995. – С. 20 – 26.

7. Grynkevych V., Danchenko V. On The Solution Of Metal Forming Boundary Value Problems In Real Time Mode // Proc. International Conference «Advances in metallurgical processes and materials». – Dnipropetrovsk. - May 27-30. – V.2. - 2007. - P.272-278.

Рекомендовано к печати д.т.н., проф. Луценко В.А.