

*Ст. преподаватель Карапетян С.Х.
(ДонГТУ, г. Алчевск, Украина)*

**РАЗВИТИЕ МЕТОДА ФЕРЕ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ЗАКОНА
ДЕФОРМАЦИЙ БЕТОНА ИЗ ОПЫТА НА ВНЕЦЕНТРЕННОЕ
СЖАТИЕ ПРИ ОДНОКРАТНЫХ И НЕМНОГОКРАТНО
ПОВТОРНЫХ НАГРУЖЕНИЯХ**

В статі наведено розвиток метода Фере для установлення зв'язку між напруженнями та деформаціями бетону з опиту на позацентрове стиснення бетонних та залізобетонних елементів при одноразових та повторних навантаженнях.

Проблема и ее связь с научными и практическими задачами.

В настоящее время все большее внимание уделяется методам расчета железобетонных конструкций, основанным на учете реальных законов деформирования бетона, как при однократном, так и повторном действии нагрузок. Такие методы позволяют с высокой точностью оценить не только напряженно-деформированное состояние конструкций, но и ее несущую способность в целом [1, 2, 3].

Правомерность использования диаграмм деформирования бетона “ $\sigma_b - \varepsilon_b$ ”, полученных при центральном сжатии к расчету изгибаемых и внецентренно сжатых железобетонных элементов при подобного рода воздействиях до сих пор поддается сомнению. Для решения данного вопроса необходимо одновременно с испытаниями на центральное сжатие получить диаграмму состояния бетона “ $\sigma_b - \varepsilon_b$ ” непосредственно по результатам испытания железобетонных внецентренно сжатых или изгибаемых элементов [1, 2].

Анализ исследований и публикаций. Для построения указанных диаграмм, как следует из работ [1, 2, 4, 8] наиболее приемлем дифференциальный метод Фере.

Однако, данный метод разработан только для случая однократного статического приложения нагрузки при изгибе бетонных и железобетонных элементов [5, 6, 7]. Справедливость и применимость указанного метода, модифицированного для случая немногократно повторных нагрузений (в частности при разгрузке и последующем нагружении) при изгибе экспериментально доказана в работе [4].

В качестве исходной информации в рамках метода Фере используются экспериментальные кривые “нагрузка - фибровые (на сжатой и растянутой гранях) деформации” и “нагрузка – средние деформации (напряжения)” в арматуре [7].

Постановка задачи. Таким образом, для экспериментального обоснования возможности использования диаграмм деформирования $\sigma_b - \varepsilon_b$, полученных на бетонных призмах в расчетах железобетонных внецентренно сжатых элементов, как при однократных, так и немного-кратно повторных нагрузлениях необходима разработка метода Фере, устанавливающего связи между напряжениями и деформациями бетона и в случае внецентренного сжатия.

Изложение материала и его результаты. Ниже приведено развитие метода Feret для установления закона деформаций бетона внецентроно сжатых железобетонных элементов.

Рассмотрим железобетонную стойку прямоугольного сечения, загруженную внецентроно сжатой нагрузкой (рис. 1), размеры поперечного сечения которой характеризуются следующими величинами:

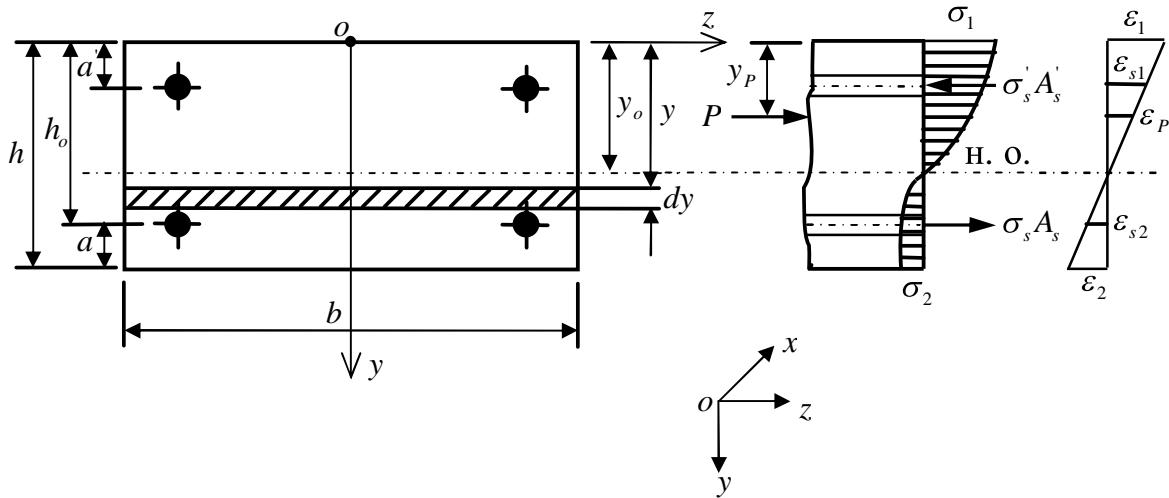


Рисунок 1 – Расчетная схема внецентроно сжатой стойки:

a, a' – защитные слои растянутой и сжатой арматуры; b – ширина поперечного сечения; h, h_0 – полная и рабочая высота поперечного сечения A_s, A'_s – площади сечения растянутой и сжатой арматуры; y_P – расстояние от внешней сжатой грани поперечного сечения стойки до точки приложения нагрузки P .

В условиях внецентроно сжатия стойки при постепенно увеличивающейся нагрузке P измеряем относительные деформации крайних

волокон сжатия ε_1 и растяжения ε_2 , соответствующих каждому значению P .

Для установления последующих аналитических зависимостей отнесем рассматриваемое сечение стойки к координатной системе указанной на рис. 1.

В каком либо волокне стойки, имеющем ординату y , относительная деформация может быть выражена следующей известной формулой:

$$\varepsilon = \frac{y - y_0}{\rho}, \quad (1)$$

где ρ - радиус кривизны нейтрального волокна стойки в рассматриваемом поперечном сечении;

y_0 - ордината нейтрального волокна стойки.

Из общей формулы (1) относительные деформации для волокон, имеющих ординаты $y = 0$, $y = h$, $y = a'$, $y = h_0$, $y = y_p$ соответственно:

$$\varepsilon_1 = -\frac{y_0}{\rho}, \quad \varepsilon_2 = \frac{h - y_0}{\rho}, \quad \varepsilon_{a'} = \frac{a' - y_0}{\rho}, \quad \varepsilon_s = \frac{h_0 - y_0}{\rho}, \quad \varepsilon_p = \frac{y_p - y_0}{\rho}. \quad (2)$$

Сумму абсолютных значений деформаций крайних волокон поперечного сечения стойки ε_1 и ε_2 обозначим буквой e :

$$e = |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| = \frac{y_0}{\rho} + \frac{h - y_0}{\rho} = \frac{h}{\rho}. \quad (3)$$

С учетом формулы (2) радиус кривизны нейтральной оси $\rho = \frac{h}{e}$ общее выражение для деформации любого волокна может быть записано в следующем виде:

$$\varepsilon = \frac{(y - y_0)e}{h}. \quad (4)$$

Из этой формулы получим:

для крайнего сжатого волокна

$$\varepsilon_1 = -\frac{y_0 e}{h}; \quad (5)$$

для крайнего растянутого волокна

$$\varepsilon_2 = \frac{(h - y_0)e}{h} = e + \varepsilon_1; \quad (6)$$

для среднего волокна сжатой арматуры

$$\varepsilon_s' = \frac{(a' - y_0)e}{h} = \beta e + \varepsilon_1; \quad (7)$$

для среднего волокна растянутой арматуры

$$\varepsilon_s = \frac{(h_0 - y_0)e}{h} = \eta e + \varepsilon_1; \quad (8)$$

для волокна имеющего ординату y_p

$$\varepsilon_p = \frac{(y_p - y_0)e}{h} = ce + \varepsilon_1, \quad (9)$$

$$\text{где } \eta = \frac{h_0}{h}, \quad \beta = \frac{a'}{h}; \quad c = \frac{y_p}{h}.$$

Составим два условия равновесия внешних и внутренних сил, действующих в поперечном сечении стойки:

1. Равенство нулю суммы проекций всех нормальных усилий на продольную ось элемента X

$$\int_0^h \sigma_b b dy + \sigma_s A_s - \sigma_s' A_s' + P = 0. \quad (10)$$

2. Равенство нулю суммы моментов всех сил относительно нейтральной оси сечения

$$\int_0^h \sigma_b b(y - y_0) dy + \sigma_s A_s (h_0 - y_0) + \sigma_s' A_s' (a' - y_0) - P(y_p - y_0) = 0. \quad (11)$$

При составлении уравнений 10 и 11 сделаны упрощения, вполне допустимые ввиду незначительности вызываемых ими погрешностей, а именно:

- в интегралах все сечение стойки предполагается бетонным, то есть без вычета сечения арматуры;
- напряжение в сечении арматуры предполагается равномерно-распределенным и равным его средней величине (для центра тяжести арматуры).

Закон, связывающий напряжения и деформации в бетоне, задаем в общей форме:

$$\sigma_b = f(\varepsilon). \quad (12)$$

Что же касается арматуры, то здесь допускаем справедливость закона Гука:

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s; \quad \dot{\sigma}_s = E_s \dot{\varepsilon}_s. \quad (13)$$

Выразим теперь в уравнениях равновесия переменные σ и y в функции ε , пользуясь равенством (4), а также имея в виду следующее соотношения:

$$y - y_0 = \frac{h\varepsilon}{e}, \quad dy = \frac{hde}{e}. \quad (14)$$

После подстановки 12...14 в уравнения равновесия находим:

$$\frac{bh}{e} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\varepsilon) d\varepsilon + E_s \varepsilon_s A_s - E_s \dot{\varepsilon}_s \dot{A}_s + P = 0, \quad (15)$$

$$\frac{bh^2}{e^2} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon + E_s \varepsilon_s A_s (h_0 - y_0) + E_s \dot{\varepsilon}_s \dot{A}_s (a - y_0) - P(y_p - y_0) = 0. \quad (16)$$

Первое из уравнений делим на $\frac{bh}{e}$, а второе - $\frac{bh^2}{e^2}$ и вводим обозначения: $\mu = \frac{A_s}{bh}$, $\dot{\mu} = \frac{\dot{A}_s}{bh}$, $p = \frac{P}{bh}$.

$$\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{E_s \varepsilon_s A_s e}{bh} - \frac{E_s \dot{\varepsilon}_s \dot{A}_s e}{bh} + \frac{Pe}{bh} = 0, \quad (17)$$

$$\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon + \frac{E_s \varepsilon_s A_s (h_0 - y_0) e^2}{bh^2} + \frac{E_s \dot{\varepsilon}_s \dot{A}_s (a - y_0) e^2}{bh^2} - \frac{P(y_p - y_0) e^2}{bh^2} = 0. \quad (18)$$

Таким образом, получаем:

$$\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\varepsilon) d\varepsilon + E_s \varepsilon_s \mu e - E_s \dot{\varepsilon}_s \dot{\mu} e + pe = 0, \quad (19)$$

$$\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon + E_s \varepsilon_s^2 \mu e + E_s \varepsilon_s^{'}^2 \mu' e - p \varepsilon_p e = 0, \quad (20)$$

где p - величина, измеряющая интенсивность нагружения стойки или приведенная сжимающая сила; μ и μ' - коэффициенты армирования.

Допустим существование двух интегралов следующего типа

$$\int_0^{\varepsilon} f(\varepsilon) d\varepsilon = A; \quad \int_0^{\varepsilon} f(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon = B \quad (21)$$

и подстрочными индексами 1 и 2 обозначим их величину, когда переменная ε принимает значения ε_1 или ε_2 . В таком случае предыдущие уравнения переписываются в следующем виде:

$$A_1 - A_2 = E_s \varepsilon_s \mu e - E_s \varepsilon_s^{'} \mu' e + pe, \quad (22)$$

$$B_2 - B_1 = p \varepsilon_p e - E_s \varepsilon_s^2 \mu e - E_s \varepsilon_s^{'}^2 \mu' e. \quad (23)$$

Вводим на основании формул (5 и 9) следующие обозначения:

$$\left. \begin{array}{l} e \varepsilon_s = e(\eta e + \varepsilon_1) = P2 \\ e \varepsilon_s^{'} = e(\beta e + \varepsilon_1) = P1 \\ e \varepsilon_s^2 = e(\eta e + \varepsilon_1)^2 = Q2 \\ e \varepsilon_s^{'2} = e(\beta e + \varepsilon_1)^2 = Q1 \end{array} \right\}, \quad (24)$$

где $P1$, $P2$, $Q1$ и $Q2$ функции, зависящие от деформаций крайних волокон стойки ε_1 и ε_2 .

Тогда окончательно уравнения равновесия представим в форме:

$$A_1 - A_2 = E_s \mu P2 - E_s \mu' P1 + pe, \quad (25)$$

$$B_2 - B_1 = p \varepsilon_p e - E_s \mu Q2 - E_s \mu' Q1. \quad (26)$$

При изменении нагрузки, т.е. величины p , меняются и деформации крайних волокон сечения ε_1 и ε_2 , а вместе с ними функции

A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , $P1$, $P2$, $Q1$ и $Q2$. Продифференцируем последние уравнения (25) и (26):

$$dA_1 - dA_2 = E_s \mu dP2 - E_s \mu' dP1 + dpe + pde, \quad (27)$$

$$dB_2 - dB_1 = dp\varepsilon_p e + d\varepsilon_p pe + dep\varepsilon_1 - E_s \mu dQ2 - E_s \mu' dQ1, \quad (28)$$

или имея в виду значения функций A и B

$$\sigma_1 d\varepsilon_1 - \sigma_2 d\varepsilon_2 = E_s \mu dP2 - E_s \mu' dP1 + dpe + pde, \quad (29)$$

$$\sigma_2 \varepsilon_2 d\varepsilon_2 - \sigma_1 \varepsilon_1 d\varepsilon_1 = dp\varepsilon_p e + d\varepsilon_p pe + dep\varepsilon_p - E_s \mu dQ2 - E_s \mu' dQ1. \quad (30)$$

Из полученных дифференциальных уравнений (29 и 30) определяем напряжения σ_1 и σ_2 :

При $\mu \neq \mu'$:

$$\sigma_1 = \frac{dp}{d\varepsilon_1} \left[\varepsilon_2 + \varepsilon_p + p \frac{de}{dp} \cdot \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_p}{e} + \frac{d\varepsilon_p}{dp} - \frac{E_s}{e} \left(\mu \frac{dQ2}{dp} - \mu \frac{dP2}{dp} \varepsilon_2 + \mu' \frac{dQ1}{dp} + \mu' \frac{dP1}{dp} \varepsilon_2 \right) \right], \quad (31)$$

$$\sigma_2 = \frac{dp}{d\varepsilon_2} \left[\varepsilon_1 + \varepsilon_p + p \frac{de}{dp} \cdot \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_p}{e} + \frac{d\varepsilon_p}{dp} - \frac{E_s}{e} \left(\mu \frac{dQ2}{dp} - \mu \frac{dP2}{dp} \varepsilon_1 + \mu' \frac{dQ1}{dp} + \mu' \frac{dP1}{dp} \varepsilon_1 \right) \right]. \quad (32)$$

При $\mu = \mu'$:

$$\sigma_1 = \frac{dp}{d\varepsilon_1} \left[\varepsilon_2 + \varepsilon_p + p \frac{de}{dp} \cdot \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_p}{e} + \frac{d\varepsilon_p}{dp} - \frac{E_s \mu}{e} \left(\frac{dQ2}{dp} - \frac{dP2}{dp} \varepsilon_2 + \frac{dQ1}{dp} + \frac{dP1}{dp} \varepsilon_2 \right) \right], \quad (33)$$

$$\sigma_2 = \frac{dp}{d\varepsilon_2} \left[\varepsilon_1 + \varepsilon_p + p \frac{de}{dp} \cdot \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_p}{e} + \frac{d\varepsilon_p}{dp} - \frac{E_s \mu}{e} \left(\frac{dQ2}{dp} - \frac{dP2}{dp} \varepsilon_1 + \frac{dQ1}{dp} + \frac{dP1}{dp} \varepsilon_1 \right) \right]. \quad (34)$$

Формулы метода для нахождения фибрьных напряжений в бетоне на каждом этапе нагружения используются в виде, например, при $\mu = \mu'$:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,i} = & \left(\frac{dp}{d\varepsilon_1} \right) \left\{ \varepsilon_{2,i} + \varepsilon_{p,i} + p_i \left(\frac{de}{dp} \right)_i \frac{\varepsilon_{2,i} + \varepsilon_{p,i}}{e_i} + \left(\frac{d\varepsilon_p}{dp} \right)_i - \frac{E_s \mu}{e_i} \left[\left(\frac{dQ2}{dp} \right)_i - \left(\frac{dP2}{dp} \right)_i \varepsilon_{2,i} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{dQ1}{dp} \right)_i + \left(\frac{dP1}{dp} \right)_i \varepsilon_{2,i} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\sigma_{2,i} = \left(\frac{dp}{d\varepsilon_2} \right) \left\{ \varepsilon_{1,i} + \varepsilon_{P,i} + p_i \left(\frac{de}{dp} \right)_i \frac{\varepsilon_{1,i} + \varepsilon_{P,i}}{e_i} + \left(\frac{d\varepsilon_P}{dp} \right)_i - \frac{E_s \mu}{e_i} \left[\left(\frac{dQ2}{dp} \right)_i - \left(\frac{dP2}{dp} \right)_i \varepsilon_{1,i} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{dQ1}{dp} \right)_i + \left(\frac{dP1}{dp} \right)_i \varepsilon_{1,i} \right] \right\}, \quad (36)$$

где $\sigma_{1,i}$, $\sigma_{2,i}$ - фибрьные напряжения в бетоне на i -ом этапе нагружения;

$\varepsilon_{1,i}$, $\varepsilon_{2,i}$ - полные фибрьные деформации бетона с учетом начальных (до приложения нагрузки) [7]; $e_i = \varepsilon_{1,i} + \varepsilon_{2,i}$.

Значения производных в формулах (35-36) приближенно определяются по формулам конечных разностей (см. рис. 2):

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}. \quad (37)$$

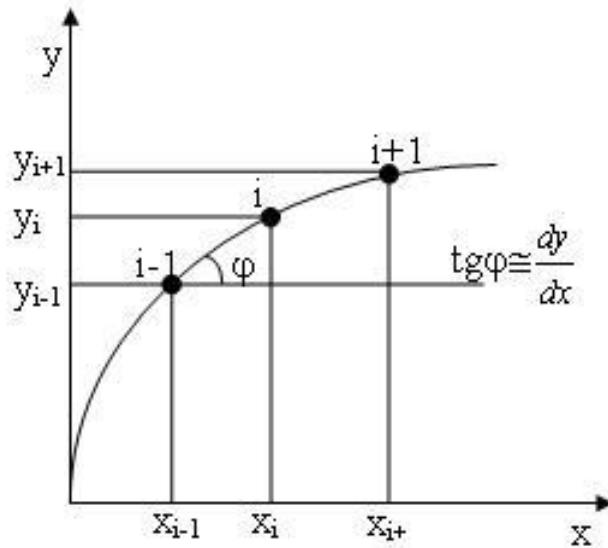


Рисунок 2 – К определению частных производных

Формулы для определения фибрьных напряжений при действии повторных нагрузений получаются из (31 – 36) в которых величины σ_1 , σ_2 , ε_1 , ε_2 , ε_P , e , p , $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$, $d\varepsilon_P$, de , dp , $P1$, $P2$, $Q1$, $Q2$, $dP1$, $dP2$, $dQ1$, $dQ2$ необходимо заменить соответственно на: $\sigma_1(n)$, $\sigma_2(n)$, $\varepsilon_1(n)$, $\varepsilon_2(n)$, $\varepsilon_P(n)$, $e(n)$, $p(n)$, $d\varepsilon_1(n)$, $d\varepsilon_2(n)$, $d\varepsilon_P(n)$, $de(n)$, $dp(n)$, $P1(n)$, $P2(n)$, $Q1(n)$, $Q2(n)$, $dP1(n)$, $dP2(n)$, $dQ1(n)$, $dQ2(n)$,

где n - номер цикла повторных нагрузений.

Исходной информацией в данном случае, как и при однократных нагрузлениях, являются экспериментальные циклические кривые “нагрузка - фибровые (на сжатой $\varepsilon_1(n)$ и растянутой $\varepsilon_2(n)$ гранях) деформации” и “нагрузка – средние деформации (напряжения)” в арматуре. Полные фибровые деформации бетона определяются с учетом начальных (до приложения нагрузки) [7], а после первого цикла нагрузений – с учетом остаточных деформаций.

Выводы и направление дальнейших исследований. Полученные зависимости связывают напряжения крайних волокон стойки с их деформациями, т.е. выражают закон деформаций для бетона и могут быть использованы для внецентренно сжатых бетонных и железобетонных элементов прямоугольного и квадратного сечений. В дальнейшем на основе, построенных по данному методу диаграмм деформирования сжатого бетона в условиях немногократно повторных нагрузений получить зависимости модуля упругости от количества циклов “ $E_b - n$ ”.

В статье изложено развитие метода Фере для установления связи между напряжениями и деформациями бетона из опыта на внецентрное сжатие бетонных и железобетонных элементов при однократных и повторных нагрузлениях.

The article present of the development the method Feret for establish dependence between stresses and deformations concrete from the experiment on the eccentrically stressed concrete and reinforced concrete elements at one repeated and repeated loadings.

Библиографический список.

1. Бачинский В.Я. Бамбура А.Н., Ватагин С.С. Связь между напряжениями и деформациями бетона при кратковременном неоднородном сжатии// Бетон и железобетон, 1984, № 10, С. 18-19.
2. Бамбура А.Н, Гурковський А.Б. К построению деформационной теории железобетона стержневих систем на экспериметальной основе// Будівельні конструкції: Зб. наук. праць.- Київ. НДІБК. 2003. -вип. 59.- книга 1.- С. 121-130.
3. Методические рекомендации по уточненному расчету железобетонных элементов с учетом полной диаграммы сжатия бетона // А.Н. Бамбура, В.Я. Бачинский и др. - Киев, 1987. - 24 с.
4. Подобенко Т.Н. Напряженно-деформированное состояние железобетонных изгибаемых элементов при кратковременных повторных

нагружениях: Автореф. дис. на соиск. уч. степени канд. тех. наук.- Киев.1991. - 17 с.

5. Столяров Я.В. Введение в теорию железобетона. - М.: Стroi-издат Наркомстроя, 1941. - 446 с.

6. Столяров Я.В. Теория железобетона на экспериментальной основе. - Х.: ГНТИУ, 1934.

7. Методические рекомендации по определению параметров диаграммы “ $\sigma - \varepsilon$ ” бетона при кратковременном сжатии/ В.Я. Бачинский, А.Н. Бамбура и др. - Киев, - 1985. - 16 с.

8. Ватагин С.С. Связь между напряжениями и деформациями бетона в сжатой зоне ж/б элементов. Интегральная оценка работы растянутого бетона. Автореф. дис. на соиск. уч. степени канд. тех. наук.- Киев, 1987. 19 с.

Рекомендовано к печати д.т.н., проф. Давиенко А.И.