УДК 532.5 + 69

Канд. физ.-мат. наук, доцент Мочалин Е. В.
старший преподаватель Мочалина И. Г.
(ДонГТУ, г. Алчевск, Украина)

ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ЗАКРУЧЕНЫХ ПОТОКОВ В ОБЛАСТЯХ С ПРОНИЦАЕМОЙ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Розкрито механізм формування значних гідродинамічних втрат у закручених потоках усередині обертового циліндра з проникною бічною поверхнею. Отримано напівемпіричні залежності для визначення сумарної інтенсивності завихреності та вихрових втрат напору в досліджуваних течіях.

Закрученные внутренние течения имеют самое широкое распространение в технике. Поэтому научные исследования, направленные на выявление закономерностей, присущих закрученным потокам со сложной структурой и на создание перспективных расчетных моделей таких потоков, безусловно, являются актуальными.

Использование закрученных течений обусловленно тем, что закрутка потока способна существенно интенсифицировать процессы тепло и массообмена а также перенос различных субстанций в сплошной среде. Отсюда постоянный большой интерес к изучению закрученных потоков, который подтверждается большим числом научных работ, посвященных этому вопросу. Не претендуя на полноту обзора, отметим работу [1], в которой изложены подходы к аналитическому решению уравнений гидродинамики применительно к вращающимся потокам с циркуляционными зонами, монографию [2], содержащую результаты экспериментальных исследований закрученных внутренних течений, а также некоторые подходы к приближенному расчету таких течений. Следует также упомянуть монографию [3], в которой приведены обширные данные экспериментальных исследований и численных расчетов закрученных внутренних течений в самых разнообразных технических устройствах. Перечисленные работы содержат обширную библиографию.

Несмотря на пристальный интерес и имеющиеся результаты, подробный расчет закрученных течений жидкости по-прежнему вызывает

большие затруднения, которые в некоторых случаях становятся непреодолимыми.

Приметой современного состояния в рассматриваемой области является распространенная практика численных расчетов закрученных течений в технологических устройствах. Однако, известно, что использование в численных расчетах традиционных моделей турбулентности, основанных на понятии изотропной вихревой вязкости, как правило, дает не достаточно адекватные результаты для закрученных течений. В настоящее время для расчета течений с доминирующей закруткой, в частности, рекомендуются: RNG k–ε модель [4] с поправкой к коэффициенту турбулентной вязкости, обусловленной закруткой потока; реализуемая (realizable) k–ε модель [5], в которой известный эмпирический коэффициент C_μ считается переменным и зависит от характеристик турбулентности и усредненного течения, в том числе от завихренности; модифицированная k–ε модель [6], которая допускает некоторую степень неизотропности турбулентной вязкости через различные значения турбулентных чисел Прандтля в уравнениях для осевой и окружной компонент скорости, а также дает поправку к одной из эмпирических констант стандартной k–ε модели через число Ричардсона, которое определяет влияние закрутки потока на процессы генерации - диссипации турбулентности. Различные типы закрученных течений имеют свои характерные особенности, поэтому использование той или иной базовой модели турбулентности или ее модификаций требует серьезного обоснования.

Экспериментальные исследования закрученных внутренних течений, на базе которых возможно как непосредственное открытие новых закономерностей и отработка оптимальных конструктивных решений, так и обоснование достоверности расчетных результатов, полученных с использованием в некоторой степени упрощенных моделей, очень дорогостоящи и поэтому мало доступны. Ситуация усложняется тем, что известных систематизированных экспериментальных данных по закрученным потокам намного меньше, чем по течениям в пограничных слоях и осевым течениям в каналах, на которых, кстати, и отрабатывались базовые модели турбулентности.

В такой ситуации весьма полезными могут быть интегральные соотношения полуэмпирического характера, устанавливающие зависимости между отдельными геометрическими и гидродинамическими параметрами, характерными для исследуемых закрученных течений. С одной стороны, такие зависимости отражают внутренние закономерности, присущие этим течениям. С другой стороны, на их основе можно проверять адекватность результатов численного моделирования, выбирать

наиболее приемлемую модель турбулентности, и, при необходимости, ее корректировать.

Целью настоящей работы является получение такого рода интегральных соотношений для одного класса закрученных внутренних течений на основе анализа механизма формирования вихревых потерь напора. Характерной особенностью рассматриваемых здесь течений является осесимметричная область с проницаемой боковой поверхностью, через которую осуществляется подача жидкости и практическое отсутствие закрутки потока в выходном сечении. При этом закрутка может создаваться либо за счет тангенциального подвода при неподвижной боковой поверхности, либо за счет вращения проницаемой поверхности. В настоящей работе остановимся на последнем варианте, который, в частности, имеет место в конструкции фильтров для очистки жидкостей с вращающимся фильтроэлементом.

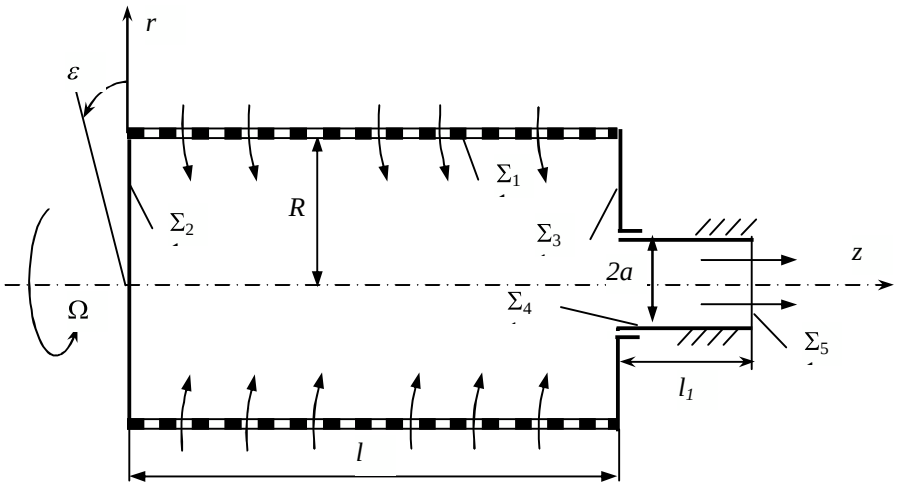


Рисунок 1 – Расчетная схема течения внутри вращающегося цилиндра с проницаемой боковой поверхностью

Расчетная схема задачи приведена на рисунке 1. Несжимаемая жидкость с секундным объемным расходом Q подается через проницаемую боковую поверхность внутрь цилиндра радиусом R и длиной l, вращающегося с угловой скоростью Ω и отводится через неподвижный патрубок радиусом a и длиной l_1. Характерной особенностью подобных течений являются значительные гидродинамические потери, сопровождающие работу технических устройств, в частности, для разделения фаз потока, в которых они реализованы. Наиболее вероятной причиной возникновения таких потерь является завихренность потока внутри области. Основанием для выбора направления исследования может послу-

жить следующая цитата [7]: «Существуют многочисленные поля течений, в которых суммарная величина завихренности возрастает и продолжает расти некоторым удивительным образом до тех пор, пока изменение распределения завихренности за счет уменьшения под действием сил вязкости не уравновесит ее прирост…». Таким образом, если в рассматриваемом нами случае существуют условия для достижения суммарной завихренностью больших значений, то этим можно объяснить имеющие место большие потери. Такая гипотеза качественно согласуется с отмеченным на практике фактом уменьшения потерь давления при увеличении вязкости жидкости при работе ротационных фильтров. Действительно, если имеющий место постоянный рост завихренности уравновешивается посредством механизма ее вязкой диссипации, то при большей вязкости уровень установившейся завихренности будет ниже.

Для установления соотношений, характеризующих уровень завихренности, запишем векторное уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости в следующем виде [7]:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = rot(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \ , \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\omega} = rot\,\mathbf{v}$,

$\mathbf{v}$ – вектор скорости,

ν – кинематическая вязкость жидкости.

Удобной интегральной характеристикой интенсивности завихренности в некоторой области V, как отмечено в [7], является скалярная величина

$$\Phi = \iiint\limits_V \frac{1}{2}\omega^2 \, dV \ . \tag{2}$$

Умножив уравнение (1) скалярно на $\boldsymbol{\omega}$, получим следующее выражение:

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial \omega^2}{\partial t} = \boldsymbol{\omega} \cdot rot(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) + \nu\, \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \, . \tag{3}$$

Путем преобразования слагаемых в уравнении (3) на основе соотношений между дифференциальными операторами теории поля [8],[9] приходим к следующему равенству:

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\omega^2\right)}{\partial t} = -div\left(\frac{1}{2}\omega^2\mathbf{v}\right) + \boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\mathbf{v} + div(\nu\, rot\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}) - \nu\, rot^2\boldsymbol{\omega}. \qquad (4)$$

Интегрируя соотношение (4) по объему рассматриваемой области, применяя формулу Гаусса-Остроградского, получим, с учетом обозначения (2), следующее выражение:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\iint_{\Sigma}\frac{1}{2}\omega^2 v_n\, d\sigma + \iint_{\Sigma}\nu(rot\,\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega})\cdot\mathbf{n}\, d\sigma + \iiint_{V}\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\mathbf{v}\, dV - \nu\iiint_{V} rot^2\boldsymbol{\omega}\, dV. \qquad (5)$$

Уравнение (5) можно рассматривать как баланс интенсивности завихренности в исследуемой области.

Примечательно, что все слагаемые в правой части уравнения (5) имеют вполне определенный смысл. Первое слагаемое характеризует изменение интенсивности завихренности за счет ее конвективного переноса через граничную поверхность. Второе слагаемое соответствует диффузии через граничную поверхность. Физический смысл третьего слагаемого рассмотрен в [7] как изменение завихренности за счет деформации вихревых линий. Последнее слагаемое, очевидно, соответствует вязкой диссипации завихренности в области. Остановимся подробнее на каждом из перечисленных слагаемых.

На основе анализа расчетной схемы, представленной на рис.1, и условий течения, можно обосновать для вихря скорости на участке Σ_1 полной граничной поверхности значение

$$\omega = 2\Omega. \qquad (6)$$

В выходном сечении Σ_5 считаем закрутку погашенной и поток осевым, что приводит к выражению

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Поскольку $\partial u/\partial r \approx 0$ в центральной части выходного сечения и завихренность сосредоточена вблизи стенок патрубка, где $u \approx 0$, то можно считать, что на Σ_5

$$\omega^2 v_n = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 u \approx 0. \qquad (7)$$

Равенства (6),(7) позволяют вычислить первый поверхностный интеграл в выражении (5):

$$-\iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{2}\omega^2 v_n \, d\sigma \approx -\iint\limits_{\Sigma_1} \frac{1}{2} \cdot 4\Omega^2 \cdot v \, d\sigma = 2Q\Omega^2 . \qquad (8)$$

Второй поверхностный интеграл в (5), как уже было отмечено, характеризует диффузию интенсивности завихренности через граничную поверхность. Очевидно, что направление диффузии определяется направлением градиента интенсивности завихренности вблизи границ. При безрасходном вращении граничной поверхности завихренность постоянна по области и на границах, поэтому диффузия сквозь границу отсутствует. При возрастании завихренности внутри, диффузия через границу способствует оттоку интенсивности завихренности из области.

Так как рассматривается внутренне течение в ограниченной области, можно предположить, что удлинение вихревых линий не является ведущим механизмом, обуславливающим в нашем случае значительный рост завихренности. Кроме того, при достижении в целом установившегося режима течения этот механизм перестает действовать. Поэтому будем считать, что третье слагаемое в правой части уравнения (5) играет в изменении завихренности в рассматриваемом течении существенно меньшую роль, чем первое.

Вязкая диссипация завихренности в области, характеризуемая последним объемным интегралом в правой части уравнения (5), является, как предположено выше, тем фактором, который вместе с диффузией через границу в конце концов компенсирует рост интенсивности завихренности.

На основе проведенного анализа представим равенство (5) в следующем виде:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 2Q\Omega^2 - F , \qquad (9)$$

где первое слагаемое в правой части в соответствии с (8) выражает рост интенсивности завихренности за счет конвекции через граничную поверхность. Второе слагаемое – функция F, объединяет в себе вязкую диссипацию и диффузию через границы.

Можно предположить, что среди величин, от которых зависит функция F в уравнении (9), есть в первую очередь интенсивность завихренности Φ и вязкость жидкости ν. Такой вывод следует из того факта, что величина диссипации завихренности и ее диффузии через границу тем больше, чем больше интенсивность завихренности в рассматриваемой области и вязкость жидкости. Естественно также считать, что значения функции F зависят от объема области и площади поверхности ее границ, поскольку слагаемые в уравнении (5), представляемые этой функцией, суть поверхностный и объемный интегралы. И площадь поверхности, и объем области определяются характерными размерами R, l. Таким образом, имеем:

$$F = F(\nu, \Phi, R, l). \tag{10}$$

В соответствии с теорией размерностей [10] зависимость (10) может быть преобразована к следующему виду:

$$F = \frac{\nu^3}{R^3} f\left(\frac{l}{R}, \frac{\Phi R}{\nu^2}\right). \tag{11}$$

При фиксированном отношении $l/R = const$, вместо (11) будем иметь:

$$F = \frac{\nu^3}{R^3} f\left(\frac{\Phi R}{\nu^2}\right). \tag{12}$$

То есть, в этом случае скорость диссипации интенсивности завихренности, выражаемая функцией F, зависит от одного безразмерного параметра. Предположим, что функция f в (12) есть линейная функция своего аргумента, обращающаяся в ноль при $\Phi = 0$. Тогда

$$F = b\frac{\nu^3}{R^3}\frac{\Phi R}{\nu^2} = b\frac{\nu\Phi}{R^2}, \tag{13}$$

где b – некоторый эмпирический коэффициент (в общем случае зависящий от параметра l/R). Если, напротив, предположить нелинейную зависимость f от $\frac{\Phi R}{\nu^2}$, то в итоге функция F не будет линейно зависеть от вязкости ν. В то же время явное выражение для слагаемых, характеризующих вязкую диссипацию и граничную диффузию интенсивности

завихренности (см. уравнение (5)), содержит ν именно как линейный множитель. Таким образом, зависимость (13) представляется правильной.

Подставляя выражение (13) в уравнение (9), придем к следующему дифференциальному уравнению для интенсивности завихренности:

$$\frac{d\Phi}{dt} = 2Q\Omega^2 - \frac{b\nu}{R^2}\Phi,$$

общее решение которого имеет вид:

$$\Phi = \frac{2QR^2\Omega^2}{b\nu} - \frac{R^2}{b\nu}Ce^{-\frac{b\nu}{R^2}t}, \tag{14}$$

где C – постоянная, определяемая начальными условиями.

При достижении квазиустановившегося режима течения жидкости в рассматриваемой области, интенсивность завихренности достигает своего максимального значения, которое, как следует из (14), равно

$$\Phi_* = \frac{2QR^2\Omega^2}{b\nu}. \tag{15}$$

Теперь рассмотрим вопрос о связи суммарной интенсивности завихренности с потерями напора. Будем называть отнесенные к единице массы жидкости потери напора, обусловленные нестационарным вихревым характером потока в исследуемой области, вихревыми потерями и обозначать H_w. Для определения количественного выражения этих потерь снова обратимся к соображениям теории размерностей. Чтобы установить перечень параметров, от которых зависит H_w, рассмотрим подробнее механизм образования этих потерь. Этот механизм известен из теории турбулентности и представляет собой обмен количеством движения между вихревыми массами. Указанный обмен количеством движения эквивалентен действию сил сопротивления и его интенсивность определяется пульсационными по отношению к осредненному движению скоростями. Последние, в свою очередь, определяются интенсивностью завихренности и размерами вихрей. Интенсивность завихренности характеризуется введенной выше величиной Φ_*.

В соответствии с известным каскадным механизмом Ричардсона – Колмогорова, отбор энергии от основного потока в турбулентных течениях осуществляется в вихрях наиболее крупных масштабов. В нашем случае максимальный масштаб вихревых масс оценивается поперечным размером области течения R. Время пребывания транзитного объема в

завихренной области определяется среднерасходной скоростью и размерами области R, l. Таким образом, вихревые потери можно представить в следующем обобщенном виде:

$$H_w = H_w(\Phi_*, Q, R, l).$$

Применяя π - теорему теории размерностей, и учитывая равенство (15), получим:

$$H_w = \frac{Q\Omega^2 R^2}{\nu l} h_w\left(\frac{l}{R}, \frac{\sqrt{Q\nu l}}{\Omega R^3}\right). \tag{16}$$

При записи равенства (16) неопределенный пока эмпирический коэффициент b включен неявно в функциональную зависимость. Безразмерные вихревые потери

$$h_w = \frac{H_w \nu l}{Q\Omega^2 R^2}. \tag{17}$$

уместно называть коэффициентом вихревых потерь. Аргументы же функциональной зависимости

$$\frac{l}{R},\ \xi = \frac{\sqrt{Q\nu l}}{\Omega R^3}, \tag{18}$$

выступают в качестве критериев подобия. Для геометрически подобных областей $\left(\frac{l}{R} = idem\right)$ задача определения коэффициента вихревых потерь становится автомодельной относительно определенного в (18) критерия ξ.

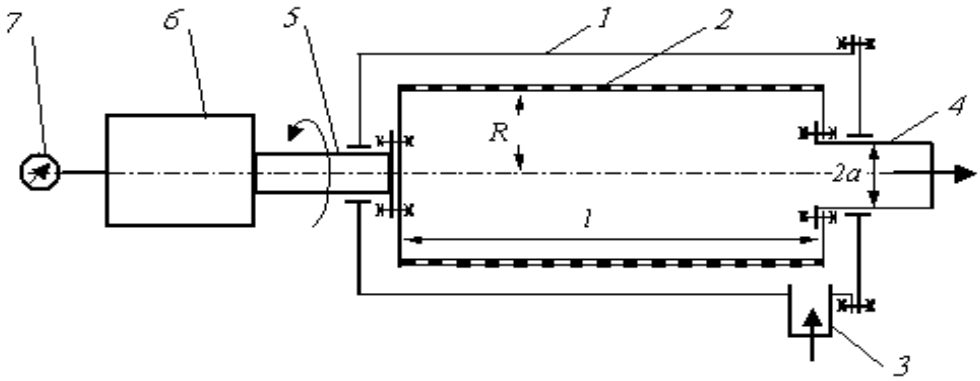
$$h_w = f(\xi). \tag{19}$$

Для подтверждения правильности выдвинутых предположений и непосредственного определения функциональной зависимости коэффициента вихревых потерь от критериального параметра ξ, были подготовлены и проведены экспериментальные исследования. Одним из проверяемых предположений является зависимость коэффициента вихревых потерь h_w от исходных геометрических (l, R), конструктивных (Ω) и гидродинамических (Q, ν) характеристик через единственный (при $l / R = idem$) критериальный параметр ξ. Для проверки необходимо определить экспериментальным путем фактический вид функциональной за-

висимости (19). При этом, экспериментальные значения h_w следует получать несколько раз для близких значений параметра ξ, полученных при различных комбинациях расхода Q, угловой скорости Ω и размеров области l, R (при фиксированном отношении l/R). Для подтверждения справедливости высказанных теоретических предположений и зависимостей (в частности формулы (16) для определения вихревых потерь напора), необходимо, чтобы все, полученные таким образом экспериментальные точки, ложились на одну кривую регрессии.

Для проведения экспериментальных исследований были изготовлены гидравлический стенд и модель, реализующая течение в соответствии с расчетной схемой на рис. 1. Устройство экспериментальной модели представлено на рисунке 2.

В трех различных сериях экспериментальных исследований были определены по 5 экспериментальных точек на плоскости (ξ, h_w) в едином диапазоне изменения критерия ξ. В каждой серии для получения каждой экспериментальной точки проводилось 4 параллельных опыта. При обработке результатов, в пределах каждой серии оценивались однородность результатов для всех точек и погрешность воспроизводимости с доверительной вероятностью 95%. Близкие значения безразмерного аргумента ξ в различных сериях эксперимента получались, в соответствии с формулой (18), при различном сочетании основных физических факторов рассматриваемой задачи: расхода жидкости Q, угловой скорости вращения проницаемой поверхности Ω, длины и радиуса внутренней полости вращающегося цилиндра l, R (при $l/R = idem$), вязкости жидкости ν.



1-корпус; 2-вращающийся пустотелый цилиндр с проницаемой боковой поверхностью; 3- патрубок подвода жидкости; 4- патрубок отвода жидкости; 5- приводной вал; 6- электропривод с плавным регулированием частоты вращения; 7- тахометр.

Рисунок 2 – Схема экспериментальной модели

На рисунке 3 представлены результаты обработки экспериментальных исследований. На графике отмечены экспериментальные точки и кривая регрессии, описываемая уравнением

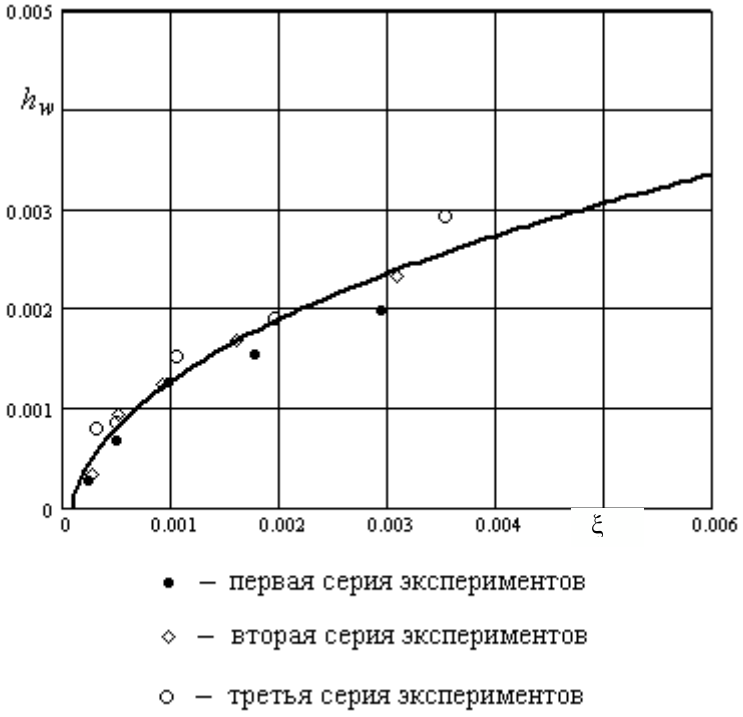


Рисунок 3 – Результаты экспериментального определения зависимости $h_w = f(\xi)$.

$$h_w = 0.035\xi^{0.427} - 5.391 \cdot 10^{-4}. \qquad (20)$$

Как видно по рисунку 3, все экспериментальные точки из различных серий достаточно хорошо ложатся на одну кривую, определяемую уравнением (20). Это подтверждает сформулированную выше роль безразмерного параметра ξ, определяемого выражением (18), как критерия подобия процесса образования вихревых потерь в рассматрваемых закрученных течениях.

Выводы. Для внутренних течений в цилиндрической области, отличающихся подводом жидкости через боковую поверхность с одновременной ее закруткой получено уравнение балланса суммарной интенсивности завихренности (5). На основе интерпретации и анализа всех слагаемых в этом уравнении выдвинуто предположение о том, что причиной больших гидродинамических потерь в рассматриваемых течениях, является значительное возрастание интенсивности завихренности

внутри вращающегося цилиндра с проницаемой боковой поверхностью. Причиной такого роста является конвективный перенос, своего рода нагнетание завихренных вращающейся поверхностью масс жидкости, через эту поверхность внутрь области. С позиций такого предположения при использовании методов теории размерностей и подобия получены соотношения, определяющее максимальное значение суммарной интенсивности завихренности в области течения и величину вихревых потерь напора. Соотношение(15) для максимальной интенсивности завихренности содержит эмпирический коэффициент, который для геометрически подобных областей является постоянной величиной. Вихревые потери напора в соответствии с формулой (16) определяются безразмерным коэффициентом, который для геометрически подобных областей является функцией одного комплексного безразмерного параметра. Тем самым установлены критерии подобия процесса образования вихревых потерь напора в исследуемых течениях, определяемые равенствами (18). Эмпирическая зависимость (20) вместе с формулами (16),(18) позволяет для условий течения в соответствии с расчетной схемой на рис. 1 определять количественно вихревые потери.

В дальнейших исследованиях в первую очередь необходимо выяснить, каким образом коэффициент вихревых потерь h_w зависит от геометрических и конструктивных особенностей области течения. Частью такого исследования является выяснение возможности и диапазона применимости результатов, полученных для вращающегося отсасывающего цилиндра, к циклонным камерам различной конструкции.

Следующим направлением является использование полученных зависимостей для вихревых потерь напора и суммарной интенсивности завихренности для тестирования и обоснования расчетной модели при численных исследованиях рассматриваемого класса закрученных течений.

Раскрыт механизм формирования значительных гидродинамических потерь в закрученных потоках внутри вращающегося цилиндра с проницаемой боковой поверхностью. Получены полу эмпирические зависимости для определения суммарной интенсивности завихренности и вихревых потерь напора в исследуемых течениях.

Mechanism of sufficient hydrodynamic loss formation in swirl flows inside of rotating cylinder with permeable lateral surface is revealed. Semi – empirical dependence for total vorticity intensity and vortex loss in head determination in flows under consideration are obtained.

Библиографический список

1. Гольдштик М.А. Вихревые потоки.- Новосибирск: Наука, 1981.- 368 с.

2. Щукин В.К., Халатов А.А. Теплообмен, массообмен и гидродинамика закрученных потоков в осесимметричных каналах.- М.: Машиностроение, 1982.- 199с.

3. Гупта А., Лилли Д., Сайред Н. Закрученные потоки.- Пер. с англ.- М.: Мир, 1987.- 588с.

4. V. Yakhot, S. A. Orszag. Renormalization Group Analysis of Turbulence. I. Basic theory// J. Sci. Comput., 1986.- No. 1.- P.1–51.

5. T.-H. Shih, W. W. Liou, A. Shabbir, Z. Yang, and J. Zhu. A New k-ε Eddy-Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows// Model Development and Validation. Computers Fluids, 1995.- № 24(3).-P. 227-238.

6. O. V. Matvienko. Analysis of Turbulence Models and Investigation of the Structure of the Flow in a Hydrocyclon// Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 2004.-Vol. 77, No. 2.- P.316-323.

7. Бетчелор Дж. Введение в динамику жидкости.- М.: Мир, 1973.- 757с.

8. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.- М.: Наука, 1973.- 848 с.

9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров.- М.: Наука, 1984.- 831с.

10. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике.- М.: Физматгиз, 1981.- 359с.

11. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.- М.: Наука, 1973.- 848 с.