

*к.т.н., доц. Денисенко В.П.,
аспирант Абакумова Е.В.,
к. т. н., доц. Лепило Н.Н.,
(ДонГТУ, Алчевск, Украина)*

**ОБОСНОВАНИЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ
ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛА
ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕССА МЕТАНОВЫДЕЛЕНИЯ
ДОБЫЧНЫХ УЧАСТКОВ ШАХТ**

Обґрунтовано застосування розподілу Вейбула для підвищення точності опису процесу метановиділення у виробки видобувної ділянки. Розроблено спосіб визначення коефіцієнтів цього розподілу, виконана перевірка відповідності обраної моделі розподілу фактичним даним за допомогою критерію Пірсона.

Проблема и ее связь с научными и практическими задачами.

Основные запасы угля в пределах горных отводов шахт Донбасса характеризуются высокой природной метаноносностью угольных пластов. Значительные объемы выделения метана при этом являются одним из факторов, который ухудшает безопасность ведения горных работ и сдерживает эффективное использование новой техники. На процесс газовыделения влияет много факторов, что затрудняет его аналитическое описание и приводит к необходимости использования статистических методов на основании обработки фактических данных о выделении метана. При использовании этих методов важно выбрать закон распределения, исходя из физической природы процесса и имеющихся фактических данных об изменении дебита метана, адекватно описывающий статистику процесса, особенно в области его высоких значений.

Анализ исследований и публикаций. В литературе [1-3] отмечается, что процесс метановыделения из углепородного массива в выработки добычных участков угольных шахт носит случайный характер, поэтому необходимо использовать теорию случайных процессов при его исследовании. Для характеристики процесса метановыделения исследователи применяют нормальный и логарифмически нормальный законы распределения, хотя рассчитанные по экспериментальным данным статистические характеристики зачастую свидетельствуют об отклонении от этих законов [4].

Многочисленными исследователями и опытом ведения горных работ установлено, что процесс изменения метановыделения в основном зависит от изменения напряженно-деформированного состояния углепородной толщи и геологических условий ведения горных работ [5-7]. Интенсивность метановыделения зависит от интенсивности разрушения углепородного массива и в основном имеет асимметричное распределение [1].

В работе [8] нами было предложено использовать распределение Вейбулла для описания процесса метановыделения в выработки добычного участка и приведен один из вариантов подбора его коэффициентов. Применение закона распределения Вейбулла для описания процесса газовыделения в скважины из подработанного углепородного массива в зависимости от расстояния до очистного забоя предложено в работе [9].

Постановка задачи. Целью данной работы являлось обоснование применения распределения Вейбулла для повышения точности описания процесса метановыделения в выработки добычного участка.

В задачи исследования входило:

- проанализировать существующие законы распределения для непрерывных случайных величин, к которым относится процесс метановыделения;
- разработать способ определения коэффициентов этого распределения;
- выполнить проверку соответствия выбранной модели распределения исходным данным с помощью статистических критериев.

Изложение материала и его результаты. В таблице 1 представлены основные непрерывные распределения и дана их краткая характеристика [10-11].

Широкое использование нормального распределения для многих физических явлений объясняется тем, что в соответствии с центральной предельной теоремой распределение среднего ряда наблюдений стремится к нормальному независимо от формы исходного распределения. Однако газонасыщенным углепородным массивам присущи как естественная трещиноватость, так и техногенная. От раскрытия трещин зависит интенсивность выделения метана. При пересечении трещиноватых зон, осадках кровли, прорывах метана из почвы наблюдаются кратковременные, интенсивные всплески газовыделения.

Таблица 1 – Краткая характеристика основных непрерывных распределений

| Закон распределения | Уравнение плотности распределения | Параметры распределения | Возможное применение |
|---------------------|---|--|---|
| нормальный | $f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$ | μ – среднее значение (параметр положения); σ – стандартное отклонение (параметр формы) | Основное распределение математической статистики |
| экспоненциальный | $f(x) = \lambda \cdot \exp(-\lambda x)$ | λ – параметр распределения, имеет смысл интенсивности отказа | Распределение времени между независимыми событиями, появляющимися с постоянной интенсивностью. Например, распределение времени безотказной работы системы при постоянной интенсивности отказов |
| гамма | $f(x) = \frac{1}{b \cdot \Gamma(c)} \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^{c-1} \cdot \exp\left[-\frac{x}{b}\right]$ | b – параметр масштаба; c – параметр формы | Для случайных величин, ограниченных с одной стороны. Описывает время, необходимое для появления определенного числа независимых событий при условии их появления с постоянной интенсивностью. Например, распределение времени безотказной работы системы с резервными компонентами, между моментами пополнения запасов и т.п. |

Продолжение таблицы 1

| | | | |
|---------------------------|---|--|---|
| бета | $f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)} \cdot x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1}$ | <p>a и b – параметры формы. При $a = b$ распределение симметричное</p> | <p>Для случайных величин, ограниченных с обеих сторон. Применяется во многих областях, например для распределения доли совокупности, заключенной между наименьшим и наибольшим значениями выборки.</p> |
| логарифмически нормальный | $f(x) = \frac{1}{cx\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{\left[\ln\left(\frac{x}{b}\right)\right]^2}{2c^2}\right\}$ | <p>b – параметр масштаба; c – параметр формы</p> | <p>Позволяет описать процессы, логарифм которых распределен по нормальному закону. Например, распределение размеров кусков породы при ее дроблении, распределение размера дохода и т.п.</p> |
| Вейбулла | $f(x) = \frac{m}{\eta} \cdot \left(\frac{x-x_0}{\eta}\right)^{m-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{x-x_0}{\eta}\right)^m\right]$ | <p>x_0 – параметр положения; η – параметр масштаба; m – параметр формы</p> | <p>Характеризует распределение времени между независимыми событиями, появляющимися с любой интенсивностью. Например, разрушение материалов под влиянием микродефектов, коэффициент устойчивости подземных сооружений и т.п.</p> |

Это означает, что не выполняется основное требование, предъявляемое к выборке при нормальном законе распределения – равенство шансов для всех элементов генеральной совокупности попасть в выборку. Часто исследователи отмечают, что положительные отклонения в изменении метановыделения преобладают над отрицательными, поэтому закон нормального распределения имеет ограниченную область применения при описании процесса выделения метана из участков, лав и выработанного пространства: при коэффициенте вариации не выше 0,33 и асимметрии, находящейся в интервале от -0,25 до 0,25 [12].

Поскольку при разрушении газонасыщенных угленосных пород наблюдаются кратковременные всплески в области высоких значений, причем разной интенсивности, экспоненциальное, гамма- и бета-распределения не могут адекватно описывать процесс метановыделения.

Логарифмически нормальное распределение применимо, когда наблюдаемое значение случайной величины составляет случайную долю ранее наблюдаемого значения. Это распределение подходит лучше всех ранее рассмотренных для описания процесса метановыделения с учетом физики процесса, так как можно принять, что количество выделяющегося метана составляет случайную долю от его общего количества, определяемого газоносностью пласта. В работе [3] при создании имитационной модели процесса изменения концентрации метана на выемочном участке принято, что случайная часть процесса имеет логарифмически нормальное распределение. Однако проведенный анализ фактических данных свидетельствует об отклонении от этого закона [4].

Распределение Вейбулла удобно для прикладных задач, поскольку позволяет аппроксимировать широкий диапазон эмпирических зависимостей, в том числе и приближающихся к нормальному закону. Обработка фактических данных о метановыделении добычных участков шахт Донбасса показала, что изменение дебита метана (I) в горных выработках удовлетворительно характеризуется трехпараметрическим распределением Вейбулла [8], функция $F(I)$ и плотность $f(I)$ которого описываются уравнениями [13]

$$F(I) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{I - I_0}{\eta} \right)^m \right]; \quad (1)$$

$$f(I) = \frac{m}{\eta} \cdot \left(\frac{I - I_0}{\eta} \right)^{m-1} \cdot \exp \left[- \left(\frac{I - I_0}{\eta} \right)^m \right], \quad (2)$$

где I_0 – параметр положения, численно равный минимально возможному дебиту метана, причем $I > I_0$;

η – параметр масштаба;

m – параметр формы, определяющий форму кривой.

Чтобы воспользоваться распределением Вейбулла для математического описания процесса выделения метана, необходимо по имеющимся фактическим данным изменения дебита метана I определить параметры распределения. Основными методами получения оценок неизвестных параметров распределений, используемых на практике, являются методы моментов и максимального правдоподобия [11].

В работе [8] на основе метода моментов предложен следующий способ оценки параметров распределения Вейбулла: для параметра положения (I_0) задается наименьшее значение дебита метана за исследуемый временной период, а параметры масштаба (η) и формы (m) определяются на основе двух первых моментов (из соотношений для определения среднего и дисперсии путем решения полученной системы уравнений численным путем).

Если считать неизвестными все три параметра распределения, можно взять за основу их определения 3 первых момента [11]. Тогда параметр m можно определить из соотношения для расчета коэффициента асимметрии

$$\gamma = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{3}{m}\right) - 3\Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) + 2\Gamma^3\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right]^{3/2}}, \quad (3)$$

где Γ – гамма-функция.

Для этого в левую часть выражения (3) необходимо подставить значение коэффициента асимметрии, полученное на основании обработки фактических данных за исследуемый период. Однако полученное уравнение не может быть решено аналитически относительно m , поэтому оно решается численным путем. Практически параметр m находится методом итераций с использованием инструмента Excel Подбор параметра. Для этого вначале задаем начальным значением параметра m , затем определяем γ по формуле (3). Полученное расчетное значение γ сравнивается со значением коэффициента асимметрии, полученным на основании обработки фактических данных за исследуемый период. Рас-

чет повторяется до совпадения расчетного и фактического значений коэффициента асимметрии с заданной точностью (обычно 0,001).

Для определения параметра масштаба можно воспользоваться соотношением для расчета дисперсии

$$D = \eta^2 \cdot \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{m}\right) \right]. \quad (4)$$

Для этого в левую часть выражения (4) подставляется значение стандартного отклонения $\delta = \sqrt{D}$, полученного на основании обработки фактических данных за исследуемый период. Тогда из уравнения (4) получим

$$\eta = \frac{\delta}{\sqrt{\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{m}\right) \right]}} \quad (5)$$

Для определения параметра формы используется соотношение для расчета среднего арифметического

$$M = I_0 + \eta \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right). \quad (6)$$

Для этого в него вместо математического ожидания подставляется среднее значение дебита метана I_{cp} , полученное на основании обработки фактических данных за исследуемый период. Тогда из уравнения (6) получим

$$I_0 = I_{cp} - \eta \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \quad (7)$$

Эта методика подбора коэффициентов опробована на фактических данных для участка 35-ой Западной лавы пласта i_3^1 шахты «Суходольская-Восточная». Полученные значения параметров распределения приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Значения параметров распределения Вейбулла для данных об изменении дебита метана

| Обозначение параметра | I_0 | η | m |
|-----------------------|-------|--------|------|
| Значение параметра | 2,83 | 3,08 | 1,59 |

После подстановки в выражение (1) определенных параметров распределения Вейбулла получим выражение, позволяющее определить долю метановыделения, величина которого не превышает I . Так, функция распределения дебита метана для 35-ой западной лавы шахты «Суходольская-Восточная» примет вид

$$F(I) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-\left(\frac{I - 2,83}{3,08}\right)^{1,59}\right] & \text{при } I > 2,83; \\ 0 & \text{при } I \leq 2,83 \end{cases} \quad (8)$$

Выполнена проверка гипотезы о совпадении между эмпирическими (экспериментальными) частотами изменения дебита метана и теоретическими (контрольными) частотами, рассчитанными по распределению Вейбулла, с помощью критерия согласия χ^2 Пирсона [13]. Критическое значение критерия χ^2 определялось при обычно используемом уровне значимости $\alpha=0,05$ и числе степеней свободы

$$m = n - l - 1,$$

где n – число интервалов;

l – число параметров в законе распределения.

Расчетное значение критерия χ^2 составило 6,60, что существенно меньше критического значения 11,07 при $m = 5$ (9 интервалов, 3 параметра в законе распределения), что подтверждает приемлемость использования закона распределения Вейбулла для описания статистических характеристик процесса метановыделения.

Если использовать нормальный закон распределения, расчетное значение критерия χ^2 составит 45,78, что значительно превышает уровень критического значения 12,59 (те же условия, но $m=6$, так как 2 параметра в законе распределения) и свидетельствует о наличии существенных расхождений между эмпирическим и теоретическим распределениями.

Однако в некоторых случаях подбор коэффициентов по методу моментов дает не столь эффективные результаты. Как отмечается в [11], метод максимального правдоподобия также необязательно дает лучшие оценки для выборок конечного объема, так как этот метод не использует заключенную в данных информацию наилучшим образом.

Для определения параметров масштаба и формы можно использовать регрессию. Дважды прологарифмировав уравнение (1), получим:

$$\left(\frac{I - I_0}{\eta}\right)^m = \ln \frac{1}{1 - F(I)}, \quad (9)$$

$$m \cdot \ln(I - I_0) - m \cdot \ln \eta = \ln \left[\ln \frac{1}{1 - F(I)} \right] \quad (10)$$

Используя соотношение (10), строим уравнение регрессии в логарифмических координатах. Угловый коэффициент полученной прямой соответствует значению параметра формы m . Параметр масштаба вычисляется из соотношения

$$\eta = \exp\left(-\frac{a}{m}\right),$$

где a – значение отрезка, отсекаемого уравнением регрессии на оси ординат.

Для параметра положения принимается наименьшее значение дебита метана за исследуемый временной период. Полученные таким способом коэффициенты затем уточняются, исходя из требований минимизации расчетного значения критерия χ^2 .

Выводы.

Установлено, что процесс метановыделения наиболее адекватно описывается законом распределения Вейбулла. Предложен способ уточнения коэффициентов этого распределения, исходя из требований минимизации расчетного значения критерия Пирсона. Проверка с помощью критерия Пирсона подтвердила соответствие выбранной модели распределения фактическим данным.

Обосновано применение распределения Вейбулла для повышения точности описания процесса метановыделения в выработки добычного участка. Разработан способ определения коэффициентов этого распределения, выполнена проверка соответствия выбранной модели распределения фактическим данным с помощью критерия Пирсона.

The application of Veybull distribution for increasing the preciseness of methane secretion process description to mining extraction area is grounded. The method of coefficient definition of this distribution is worked out. The examination of the chosen model of distribution correspondence to the facts with the help of Pirson's criterion is executed.

Библиографический список.

1. Пигида Г.Л. *Элементы теории автоматической газовой защиты очистных участков угольных шахт*/ Г.Л. Пигида. – М.: Недра, 1975. – 80 с.
2. Бусыгин К.К. *Колебания концентраций метана в исходящих вентиляционных струях лав и участков*// Труды / МакНИИ. – М., 1969. – Т. XX: *Вопросы безопасности в угольных шахтах.* – С. 3-12.
3. Иванов Ю.А. *Имитационная модель процесса изменения концентрации метана на выемочном участке*/ Ю.А. Иванов // *Способы и средства создания безопасных условий труда в шахтах.* – Макеевка, 1984. – С. 135-141.
4. Иванов Ю.А. *Математическая модель и методы экстраполяции изменения содержания метана на выемочных участках*/ Ю.А. Иванов // *Матеріали міжнародної конференції "Форум гірників - 2007".* – Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2007. – Т. 1. – С. 92-100.
5. *Прогнозирование нарушенности подработанного массива и зон скопления метана акустическим методом*/ В.А. Баранов, П.С. Пащенко, Б.В. Бокій, Д.П. Гуня// *Матеріали міжнародної конференції "Форум гірників - 2005".* – Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2005. – Т. 1. – С. 62-65.
6. *Сдвигение массива горных пород и влияние скорости подвигания очистного забоя на выделение метана*/ М.С. Четверик, Е.В. Андрощук, Е.А. Бубнова, Г.Ф. Гаврюк// *Сб. науч. трудов/ Национальный горный университет, 2003.* – № 16. – С. 42-53.
7. *Экспериментально-аналитический метод прогноза направлений и интенсивности газовых потоков*/ А.Ф. Булат [и др.]// *Геотехническая механика: Межвед. сб. научн. трудов/ Институт геотехнической механики НАН Украины.* – Днепропетровск. – 2005. – Вып. 59. – С. 10-21.
8. Денисенко В.П. *О статистических характеристиках процессов выделения метана из выработок добычного участка*/ В.П. Денисенко, Н.Н. Лепило, Г.А. Склярова// *Алчевск.* – 2007. – С. 88-98.
9. Бокій Б.В. *Фізико-технічні основи управління газовиділенням на виймальних ділянках високопродуктивних вугільних шахт: автореф. дис. ...док. техн. наук : 05.15.02 : захищена 28.09.07* / Бокій Борис Всеволодович; *Ін-т геотехнічної механіки.* – Дніпропетровськ, 2007. – 33 с.
10. Хан Г. *Статистические модели в инженерных задачах*/ Г. Хан, С. Шатино. – М.: Мир, 1969. – 395 с.
11. Петрович М.Л. *Статистическое оценивание и проверка гипотез на ЭВМ*/ М.Л. Петрович, М.И. Давидович. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 191 с.
12. Скобенко А.В. *Обоснование применения распределения Вейбулла для вероятностной оценки устойчивости подземных выработок*/ А.В. Скобенко // *Науковий вісник НГА України.* –1998. – №3. – С. 18-19.
13. Мюллер П. *Таблицы по математической статистике*/ П. Мюллер, П. Нойман, Р. Шторм. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 278 с.