

*Литвинский Г. Г.**Донбасский государственный технический университет**E-mail: ligag@ya.ru***ФОРМА И ПАРАМЕТРЫ МУЛЬДЫ СДВИЖЕНИЯ ПОДРАБОТАННОГО ПОРОДНОГО МАССИВА**

*На основе анализа существующих методов расчета параметров мульды сдвижения показана перспективность использования геомеханических моделей ее описания. Выполнен обзор базовых положений таких моделей и основных влияющих факторов. Задача исследований — разработка теоретического подхода к описанию мульды сдвижений подработанного массива пород на основе решения дифференциального уравнения для S-кривой полумульды вертикальных смещений земной поверхности. Решение проводилось в относительной системе переменных. Решение дифференциального уравнения было выражено в виде функции Ферхюльста, нашедшей применение в различных явлениях и процессах. Проведено исследование основного уравнения полумульды сдвижения и её параметров пространственного позиционирования. Впервые показано, что основные параметры S-кривой полностью определяют углы граничного сдвижения и полного опускания подработанного породного массива. Приведены оценки расположения центра полумульды и параметра её крутизны для типичных условий отработки пологих пластов в Донбассе. Проанализированы недостатки полученного решения, сформулированы нерешенные проблемы и задачи дальнейших исследований.*

**Ключевые слова:** *сдвижение, земная поверхность, породный массив, классификация факторов, геомеханическая модель, подработка, S-кривая, полумульда сдвижения, параметры сдвижения.*

**1 Анализ проблемы. Задачи исследований**

Изучением сдвижений земной поверхности при ведении горных работ предварительно занимались производственники, а затем проектировщики и исследователи уже с периода промышленного освоения подземных месторождений полезных ископаемых. Осадка дневной поверхности происходит в результате пространственного изменения положения породного массива при ведении горных работ из-за обрушения или провала слоев над выработанным пространством. Осадка поверхности земли обычно имеет форму впадины, которую называют мульдой сдвижения или оседания (рис. 1).

На рисунке 1 отражены основные элементы схемы образования S-кривой мульды сдвижения.

Пласт угля 1 мощностью  $m$  на глубине  $H$  отрабатывают очистным забоем 2, после которого образуется выработанное пространство 3. Земная поверхность 4, начиная

с зоны граничных смещений (штриховая линия), задаваемой граничным углом  $\delta$ , оседает в виде S-кривой мульды сдвижения 5, достигая предельных опусканий за линией полных смещений пород, задаваемой углом полных смещений  $\varphi$ . Начало координат  $x, y$  обычно помещают над линией фронта очистных работ 2. Здесь и далее вертикальный масштаб на рисунках увеличен в сотни раз для наглядного отражения вертикальных смещений земной поверхности.

Начиная с XIX века, в период бурного развития горнорудной и угольной промышленности в ведущих горнодобывающих странах (Англия, Бельгия, Германия) из-за возникающих при ведении горных работ повреждений поверхностных зданий и сооружений возникла необходимость глубокого изучения сдвижений земной поверхности. При её изучении на основе натуральных наблюдений была накоплена обширная база экспериментальных данных.

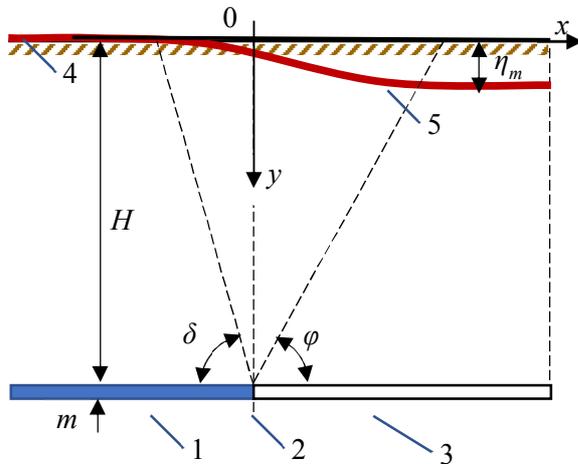


Рисунок 1 — Схема оседания подработанного массива пород и образования S-кривой полуволны мульды сдвижения

Поскольку сдвижение земной поверхности обусловлено опусканием и деформированием породных слоев под действием сил гравитации и включает в себя множество сопутствующих и следующих друг за другом процессов, целесообразно найти на основе полученных экспериментальных данных общие закономерности сдвижения в аналитическом виде.

Изучением процесса подработки горного массива и его влияния на подземные и поверхностные объекты занимались многие отечественные и зарубежные ученые. К настоящему времени по этому вопросу накопилась многочисленная литература [1–10], в том числе и обзорного характера [2, 4, 5, 8 и др.].

Проблема остается актуальной вплоть до настоящего времени, о чем свидетельствует постоянно возрастающий поток публикаций [7–11, 20–22 и др.], где рассматриваются различные методы наблюдения за процессом сдвижения дневной поверхности и прогноза его мульды сдвижения (рис. 1).

К настоящему времени было разработано множество методов исследования и расчета размеров мульды. В общем виде все известные классификации [3–7] методов прогноза в основном разделяют на основные группы:

- эмпирические или полуэмпирические методы, основанные на анализе и обработке накопленных данных натуральных наблюдений за поведением породного массива и инструментальных измерений;
- физическое или аналоговое моделирование на основе теории подобия и размерностей путем параметрического исследования в лабораторных условиях моделей подработанной области массива (метод эквивалентных материалов, электрогидродинамическое подобие, метод центробежного моделирования и др.);
- теоретические методы, основанные на применении концепций механики сплошной среды об упругих, пластических и реологических свойствах вскрышных пород;
- численные методы с использованием вычислительных алгоритмов и пакетов прикладных программ, в том числе методы конечных и граничных элементов;
- специальные методы прогноза оседаний (метод профильных функций, функций влияния и др.).

Следует признать, что еще доминируют эмпирические методы прогноза, созданные усилиями многих ученых и практиков в предшествующий период почти вековой продолжительности, однако при всех их достоинствах эти методы почти исчерпали свои возможности [1, 4, 6, 11 и др.].

Теоретические методы пока не заняли весомое место в практике прогнозирования процессов подработки породных массивов ввиду сложности описания их свойств и многочисленных процессов упругопластического деформирования и разрушения породных пластов при ведении горных работ.

Численное моделирование в настоящее время самый популярный и доступный метод оценки смещений земной поверхности. Однако всё многообразие численных методов с их мощными формальными алгоритмами и вычислительными процедурами требуют предварительного создания непротиворечивой математической модели процесса. Последняя оказывается далеко не всегда достоверной из-за многочисленных

принятых по умолчанию аксиом, посылок и предположений, из-за чего, как правило, обладает рядом существенных ограничений и недостатков. Кроме того, сложность корректно задать граничные и начальные условия обуславливает введение многочисленных эмпирических коэффициентов и поправок, что требует проведения экспериментальных изысканий и опытов, нередко длительных и трудоемких.

Подчеркнем, что почти все методы прогноза разработаны для условий полной подработки поверхности, а характерные для настоящего времени большие глубины разработки, когда преобладают процессы неполной подработки поверхности, связанные с появлением «породных мостов» и зависанием больших породных блоков, остаются недостаточно исследованными.

В последнее время были предложены и другие многообещающие теоретико-модельные методы расчета, которые использовались для определения оседания дневной поверхности различные вводимые априори функции влияния, однако ввиду сложности и недостаточной обоснованности они не получили широкого распространения [2–4, 6–10 и др.].

Присущие эмпирическим формулам и предложенным ранее вариантам прогноза недостатки, отраженные к тому же в существующих нормативных положениях и руководствах, делают оправданными дальнейшие исследования и разработки, направленные на их изменение, уточнение и корректировку. Поэтому до сих пор комплекс проблем о сдвигении подработанного породного массива сохраняет свою актуальность.

**Задачами исследований** являются:

- критический анализ предложенных методов и подходов по расчету сдвижений подработанного горного массива;
- разработка геомеханической модели для выбора адекватного дифференциального уравнения  $S$ -кривой мульды сдвижений;
- решение дифференциального уравнения  $S$ -кривой мульды сдвижения с учетом граничных условий в безразмерных координатах;

- пространственное позиционирование мульды сдвижения по отношению к геометрическим параметрам основных зон сдвижения подработанного массива пород.

## **2 Базовые положения геомеханической модели мульды сдвижения**

Как установлено практикой горных работ и натурными исследованиями, на процессы оседания подработанного массива влияют многочисленные и часто трудно учитываемые параметры, которые можно объединить в следующие группы факторов:

- **горно-геологические**: наличие линейментов, дизъюнктивных и пликативных дислокаций, топография поверхности (плоская, наклонная, холмистая, гористая местность), состав, структура и строение пород, глубины залегания, мощность и чередование пластов, их степень метаморфизма, газо- и водонасыщения;

- **физико-механические** свойства массива и пластов: плотностные, гидравлические, прочностные и деформационные показатели пород, их напряженно-деформированное состояние, скважность, пористость и степень нарушенности;

- **горно-технологические**: параметры системы разработки, размеры и расположение выработанных пространств и целиков, темпы и направления разработки месторождения, способы управления кровлей над выработанными пространствами, особенности горно-инженерных воздействий на массив (массовые взрывы, дамбы и др.).

Учесть все эти факторы достаточно полно не представляется возможным хотя бы из-за их изменчивости и сложности получения достоверных исходных данных. Поэтому для определения параметров оседания земной поверхности наибольшее распространение получили специальные методы прогнозирования. Кратко рассмотрим некоторые из них.

К числу достаточно популярных и известных в Европе можно отнести метод Будрика — Кнота [3, 7, 12, 13 и др.]. Он разработан для расчета оседаний поверхности

в Верхне-Силезском районе (Польша) и был использован для некоторых других угольных регионов.

Метод Будрика — Кнота [3, 7, 12, 13 и др.] позволяет рассчитывать горизонтальные и вертикальные смещения, наклоны и деформации. В качестве функции влияния в нем используется колоколообразная кривая (функция Гаусса)  $g(x, y, s, t)$ , позволяющая при отработке элементарной площадки с координатами  $x, y$  определить оседание  $S(x, y, s, t)$  поверхности в произвольной точке  $s, t$ :

$$g(x, y, s, t) = \frac{1}{r^2} \exp \left[ -\pi \frac{(x-s)^2 + (y-t)^2}{r^2} \right] S(x, y) = (1)$$

$$= \iint_A S_0(x, y) \cdot g(x, y, s, t) \cdot dx dy,$$

где  $x, y$  — координаты элементарной площадки отработанного пласта полезного ископаемого;

$s, t$  — координаты точки, в которой рассчитывается оседание поверхности;

$r$  — радиус влияния, соединяющий точки  $x, y$  и  $s, t$ , где определяется оседание;

$S_0(x, y)$  — конвергенция кровли лавы;

Оседание в точке  $P(0,0)$  можно выразить в виде определенного интеграла:

$$S(x, y) = \frac{S_{\max}}{r^2} \int_{x1}^{x2} \exp \left( -\pi \frac{x^2}{r^2} \right) dx \times$$

$$\times \int_{y1}^{y2} \exp \left( -\pi \frac{y^2}{r^2} \right) dy. \quad (2)$$

Выражения (1, 2) довольно сложны для практического использования и обладают целым рядом недостатков: только квадратичные зависимости от координат, не учтены многие важные факторы (граничные углы сдвижения, различия в деформировании и неоднородность породного массива, изменение его трещинной пустотности, возможная несимметричность кривой мутьды оседания и др.). Отметим еще один недостаток: согласно этому методу, центр мутьды сдвижения всегда находится на

линии забоя лавы, что часто не выполняется. Такого же рода пробелы существуют и в других методах прогноза.

Еще одним примером использования функции влияния является работа [14]. Для полного описания процесса при относительно постоянной скорости подвигания очистных работ автор предлагает функцию

$$\eta(t) = \eta_k \left[ 1 - \exp \left[ -\beta_1 (t + t_0)^2 \right] \right], \quad (3)$$

где  $\eta(t)$  — оседание некоторой точки  $P$ , расположенной на земной поверхности в момент времени  $t$ ;

$\eta_k$  — конечное значение оседания точки поверхности  $P$ ;

$\beta_1$  — эмпирический коэффициент, определяемый по данным наблюдений;

$t_0$  — время, прошедшее от начала воздействия горной выработки на точку  $P$  до момента прохода створа лавы под данной точкой.

Однако функция (3) может использоваться лишь для приближенного описания частных экспериментальных данных, поскольку не получила научного обоснования, не связана с углами сдвижения и не является симметричной относительно своего центра, что противоречит данным практики.

Нельзя не отметить, что в ряде методов, в том числе и в нормативном методе прогноза [15], многие формулы и рекомендации получены эмпирически и не имеют аналитического обоснования. Так, для определения максимальных оседаний  $\eta_{\max}$  при неполной подработке поверхности рекомендована эмпирическая формула

$$\eta_{\max} = 0,9 \cdot q_0 \cdot m \cdot \cos \alpha \times$$

$$\times \sqrt{\left( \frac{D_1}{H} + a_1 \right) \cdot \left( \frac{D_2}{H} + a_2 \right)}, \quad (4)$$

где  $q_0$  — максимальное оседание при полной подработке поверхности, отнесенное к мощности пласта;

$m$  — мощность пласта по нормали к линии падения, м;

$\alpha$  — угол падения пласта;

**НЕДРОПОЛЬЗОВАНИЕ**

$D_1$  и  $D_2$  — размеры выработанного пространства соответственно по падению и простиранию пласта, м;

$H$  — средняя глубина разработки, м;

$\alpha_1, \alpha_2$  — эмпирические коэффициенты, которые учитывают целики возле лавы и прочность подработанных горных пород.

Из формулы (4) [15] и разъяснений к ней следует, что даже при  $H \rightarrow \infty$  оседания не равны нулю  $\eta_{\max} \rightarrow Const > 0$ , что противоречит граничным условиям, которым должен подчиняться процесс оседания массива. Во многие эмпирических зависимости введены многочисленные искусственные ограничения и логические условия.

Базируясь на результатах, полученных в работах [16–18], перейдем к рассмотрению проблемы определения формы и пространственного позиционирования мульды сдвижения. Сложность решения состоит в том, что эта задача зависит от многочисленных факторов, в ряде случаев плохо поддающихся цифровому или однозначному выражению, и скорее носит характер качественных оценок. Поэтому порождающее решение упрощенной геомеханической модели основано, как всегда, на принятии целого ряда идеализаций и исходных предположений (гипотез), которые будут в дальнейшем подвергнуты корректировке и уточнению при их последующей экспериментальной проверке.

Предполагается, что принятая исходная модель процесса или явления должна быть дополнена экспериментальным определением численных значений неизбежно вводимых постоянных коэффициентов, имеющих вполне ясную физическую трактовку.

Цель данного раздела исследований — получить математическую модель в виде исходного порождающего решения (функции влияния) для описания оседаний подработанных массива горных пород. Математическая модель позволяет получить структуру функциональных зависимостей (формул), которые в виде исходного шаблона могут быть использованы для данного класса описываемых явлений после

конкретных для каждого случая наборов дополнений, уточнений и исправлений.

Для описания оседаний земной поверхности рассмотрим её сечение по оси симметрии очистного забоя, обрабатывающего пологий пласт полезного ископаемого мощностью  $m$  на глубине  $H$  (рис. 2) в квазиоднородном и изотропном массиве горных пород, где действуют массовые силы  $\gamma H$ , где  $\gamma$  — объемная масса пород.

Вводим нормированные безразмерные координаты  $\xi, \zeta$ , в которых будем записывать определяющие процесс соотношения:

$$\begin{aligned} 0 \leq \xi = x / H \leq 1, \\ 0 \leq \zeta = \eta / \eta_m \leq 1, \end{aligned} \tag{5}$$

где  $h$  — текущая глубина,  $0 \leq h \leq H$ , м;  
 $x$  — расстояние от линии очистного забоя, м;

$\eta$  — оседание земной поверхности,  $0 \leq \eta \leq \eta_m$ , м;

$\eta_m$  — вертикальная координата дна мульды оседания при полной подработке поверхности, м.

Начало координат в относительных переменных  $\xi, \zeta$  поместим над линией очистного забоя и будем рассматривать образующую мульду оседания при движущемся влево очистном забое.

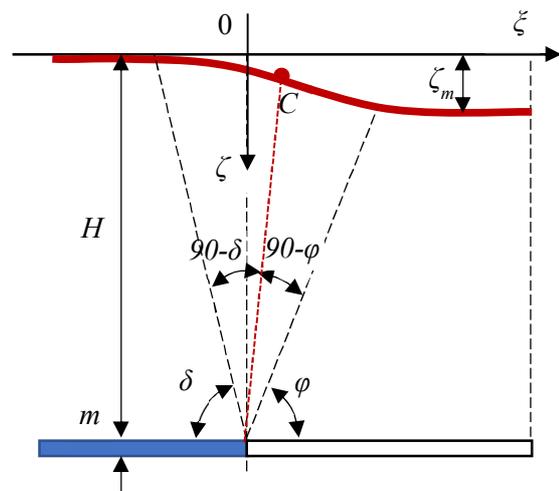


Рисунок 2 — Расчетная схема мульды оседания в безразмерных координатах  $\xi, \zeta$

**НЕДРОПОЛЬЗОВАНИЕ**

Из физических соображений следует, что градиент оседания  $\zeta'$  земной поверхности в произвольной точке с координатой  $\xi$  при подработке земной поверхности будет изменяться в пределах

$$\frac{d\zeta}{d\xi} \Big|_{\xi \rightarrow -\infty}^{\xi \rightarrow \infty} = 0, \quad (6)$$

т. е. будет представлять собой полуволну, обеспечивающую плавный переход от верхнего уровня значения переменной к нижнему. Такое поведение кривой часто встречается при описании различных явлений и процессов в демографии, химии, физике, экономике, науках о земле и др. и было, по-видимому, впервые рассмотрено Ферхюльстом [19] в модели роста народонаселения.

Следовательно, чтобы удовлетворить условию (6), функция кривой оседаний должна подчиняться дифференциальному уравнению, которое в простейшем случае имеет вид

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = \zeta \cdot (1 - \zeta), \quad (7)$$

т. е. при малых значениях опускания  $\zeta$  градиент ему пропорционален  $\zeta' \approx \zeta$ , а функция  $\zeta(\xi)$  близка к экспоненциальной, затем по мере роста  $\zeta$  происходит замедление, и при  $\zeta \rightarrow \zeta_m$  рост оседаний прекращается, т. к. градиент оседаний вновь становится нулевым.

Решая дифференциальное уравнение (7) с учетом граничного условия  $\zeta(\infty) = 1$ , получим уравнение мульды сдвижения:

$$\zeta(\xi) = [1 + \exp(-\xi)]^{-1}. \quad (8)$$

Данное решение является уравнением Ферхюльста и представляет собой канонический вид логистической кривой, которая нашла широкое распространение в различных отраслях знания.

Для адекватного описания экспериментальных данных необходимо ввести три постоянных, позволяющих вполне удовлетво-

рительно согласовать прогнозные решения с практикой.

Учитывая граничные условия ( $\xi \rightarrow \infty \Rightarrow \zeta \rightarrow 1$ ), ( $\xi \rightarrow -\infty \Rightarrow \zeta \rightarrow 0$ ) и сделав привязку к началу координат, расположенному на поверхности в центре линии очистного забоя ( $\xi = 0 \Rightarrow \zeta \rightarrow \zeta_0$ ), получим окончательное решение:

$$\zeta(\xi) = \left\{ 1 + \left( \frac{1}{\zeta_0} - 1 \right) \exp[-k_\eta (\xi - \xi_0)] \right\}^{-1}, \quad (9)$$

где  $\zeta_0$  — оседание в точке  $\xi = \xi_0$ ;

$k_\eta$  — коэффициент крутизны кривой опусканий, растягивает или сжимает кривую вдоль оси  $\xi$ ,  $k_\eta \geq 0$ ;

$\xi_0$  — смещение кривой опусканий относительно начала координат по оси  $\xi$ .

Переходя к реальным размерным переменным, которые соответствуют общепринятым обозначениям, получим

$$\eta(x) = \eta_m \left[ 1 + \left( \frac{\eta_m}{\eta_c} - 1 \right) \exp\left(-k_\eta \frac{x - x_c}{H}\right) \right]^{-1}, \quad (10)$$

где  $\eta(x)$ ,  $\eta_m$  — опускание земной поверхности соответственно на расстоянии  $x$  от начала координат и максимальное в центре мульды сдвижений, м;

$\eta_0$  — оседание поверхности в начале координат  $x = 0$ , м;

$x_0$  — смещение кривой мульды сдвижения относительно начала координат по оси  $x$ .

Сравнивая выражения (3–5) с полученными уравнениями (9–10), можно судить об их удобстве практического применения, не говоря уже о достоверности прогнозных результатов.

**3 Параметры пространственного позиционирования мульды сдвижения**

Проследим степень влияния коэффициента крутизны  $k_\eta$  на форму кривой опускания по уравнению (9) в виде разных кривых мульды сдвижения на рисунке 3, приняв в качестве постоянных остальные коэффициенты  $\xi_0 = 0,2$  и  $\zeta_0 = 0,2$ . Графики пока-

**НЕДРОПОЛЬЗОВАНИЕ**

зывают, что их форма значительно меняется при изменении параметра  $k_\eta$ : при его возрастании они становятся все круче, а область, занимаемая мульдой, — уже.

Рассмотрим поведение пучка кривых мульды сдвижения при изменении положения её центральной точки. Из рисунка 4 можно судить о том, как сдвигается этот пучок кривых, если сменить относительное опускание от значения  $\zeta_0 = 0,2$  на рисунке 3 до  $\zeta_0 = \zeta_C = 0,5$ .

Из такого сравнения следует, что кривые мульды сдвижения обладают свойством антисимметричности относительно своего центра и конгруэнтно смещаются вдоль горизонтальной оси при изменении параметра смещения  $\xi_0$  в формуле (9).

Центр всякой мульды сдвижения  $\xi_C$  поэтому должен находиться между точками, отсекаемыми на горизонтальной оси  $\xi$  углами граничных сдвижений  $\delta, \varphi$  (рис. 2), т. е. его координата  $\xi_C$  в точке С, показанная на рисунке 2, равна полусумме координат точек, отсекаемых углами  $\delta, \varphi$ :

$$\xi_C = \xi_0 = \frac{\xi_\delta + \xi_\varphi}{2} = \frac{-ctg\delta + ctg\varphi}{2}, \quad (11)$$

где  $\xi_\delta, \xi_\varphi$  — относительные координаты, отсекаемые на горизонтальной оси  $\xi$  граничными углами сдвижения  $\delta, \varphi$ .

Заметим, что формула (11) была получена без учета величин второго порядка малости по вертикальной координате  $\zeta$ .

Таким образом, одна из характеристик пространственного позиционирования мульды сдвижения, а именно положение центра кривой мульды С, определено уравнением (11). При этом в данной точке  $\xi_C = \xi_0$  всегда будет наблюдаться опускание земной поверхности, равное  $\zeta_C = \zeta_0 = 0,5\zeta_m$ , т. е. половине максимального вертикального опускания поверхности.

Если перейти к размерным переменным в обычных координатах, то уравнение (11) примет вид

$$x_C = x_0 = \frac{x_\delta + x_\varphi}{2} = H \frac{-ctg\delta + ctg\varphi}{2}. \quad (12)$$

Следующий параметр пространственного позиционирования мульды сдвижения — коэффициент крутизны кривой мульды опусканий  $k_\eta$ , который можно определить, исходя из условия соблюдения необходимой длины мульды по горизонтали, протяженность которой отсекается на горизонтальной оси  $\xi$  линиями граничных сдвижений, проходящими под углами  $\delta, \varphi$  (рис. 2). При этом воспользуемся условием равенства длины антисимметричных ветвей мульды сдвижения относительно ее центра С.

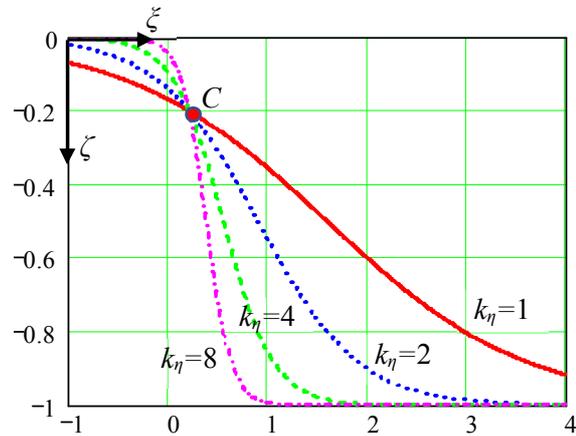


Рисунок 3 — Влияние параметра  $k_\eta$  на вид кривой мульды оседания

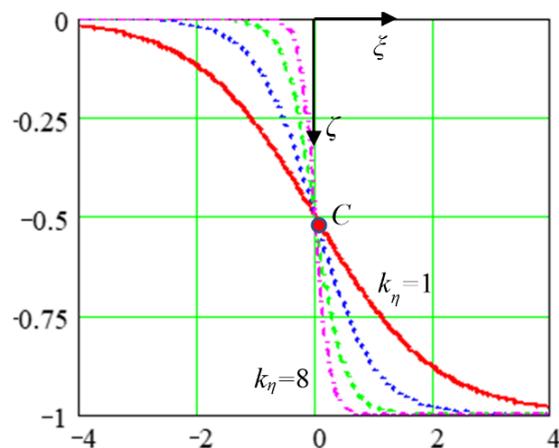


Рисунок 4 — К определению центра  $\xi_0$  мульды сдвижения на горизонтальной оси  $\xi$

**НЕДРОПОЛЬЗОВАНИЕ**

Примем во внимание, что граничные углы сдвига  $\delta$ ,  $\varphi$  определяются с примерно одинаковой точностью по вертикальным смещениям поверхности, у которых допустимые согласно [15] ошибки равны  $\zeta_\delta = \zeta_\varphi = \pm 0,01\zeta_m$  ( $\approx \pm 10$  мм).

Приравняем вертикальные относительные смещения  $\zeta_\delta = \zeta_\varphi$  в точках  $\xi_\delta, \xi_\varphi$  на линиях граничных сдвижений согласно (9), когда центр мульды сдвижений  $C$  помещен в точку с абсциссой  $\xi_C = (-ctg\delta + ctg\varphi) / 2$ , получим уравнения для определения параметра  $k_\eta$  крутизны кривой мульды сдвижения:

$$\zeta_\delta (\xi_\delta = -ctg\delta) = \zeta_\varphi (\xi_\varphi = ctg\varphi). \quad (13)$$

Подставляя в (9) с учетом равенств (11, 13), приходим к необходимости решить уравнение относительно неизвестной  $k_\eta$ :

$$\left\{ 1 + (\xi_\delta^{-1} - 1) \exp[-k_\eta (\xi_\delta - \xi_C)] \right\}^{-1} = \left\{ 1 + (\xi_\varphi^{-1} - 1) \exp[-k_\eta (\xi_\varphi - \xi_C)] \right\}^{-1}. \quad (14)$$

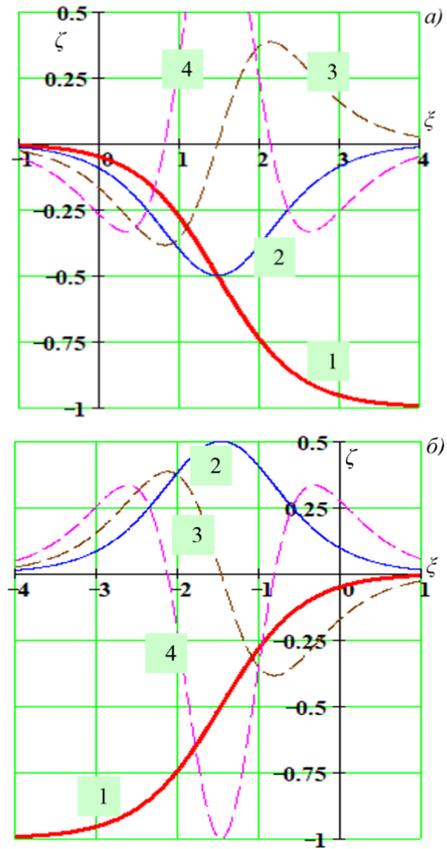
После несложных алгебраических преобразований и подстановок в результате получим функциональную зависимость параметра крутизны  $k_\eta$  S-кривой мульды сдвижения от граничных углов  $\delta$ ,  $\varphi$ :

$$k_\eta = (\xi_\varphi - \xi_\delta)^{-1} \ln \left( \frac{-\xi_\delta^{-1} + 1}{\xi_\varphi^{-1} - 1} \right) = (ctg\varphi + ctg\delta)^{-1} \ln \left( \frac{tg\delta + 1}{tg\varphi - 1} \right). \quad (15)$$

Произведем приблизительную оценку параметра  $k_\eta$  для обычных горно-геологических условий Донбасса, где хорошо изучены граничные  $\delta = 73^\circ \pm 2^\circ$  и полные  $\varphi = 55^\circ \pm 2^\circ$  углы сдвига [15]. Подставляя эти значения в формулу (15), получим следующие пределы изменения параметра относительно среднего значения  $k_\eta \approx 1,1 \pm 0,2$ . Чем больше в породной толще прочных пластов пород, тем выше значение параметра  $k_\eta$ : так, для антрацитов он может доходить до значения 1,3 и больше.

На рисунке 5 показаны типичные линии, воспроизводящие мульду сдвижения при полной подработке дневной поверхности по обе стороны от очистного забоя.

Как следует из графиков на рисунке 5, показаны две симметричные полумульды над подработанным массивом пород. На самом деле такая симметрия возможна только на боковых участках мульды, вдоль которых движется очистной забой. Поэтому полученные закономерности простейшей геомеханической модели не следует рассматривать как окончательные, поскольку они должны будут в последующем корректироваться при учете других влияющих факторов.



1 — кривая оседаний  $\zeta = \eta / \eta_m$ ; 2 — наклоны  $\eta' = d\eta / dx$ ; 3, 4 — вторая  $\eta''$  и третья  $\eta'''$  производные оседаний

Рисунок 5 — Результаты расчета левой (а) и правой (б) полумульды сдвижения по формулам (9–15) геомеханической модели оседания подработанного массива пород одиночной лавой при значениях параметров  $k_\eta = 2$ ;  $\zeta_0 = \eta_0 / \eta_m = 0,05$ ;  $x_0 = 0$

В частности, полученные закономерности будут, начиная с некоторой предельной глубины, не соблюдаться, в первую очередь ниже глубины зоны самоподбучивания пород, а при неполной подработке массива — выше глубины зоны полных смещений. Эти аспекты проблемы будут рассмотрены в последующих публикациях. Можно отметить, что, несмотря на обилие публикаций по этой проблеме (см., например, [20–22] и др.), эти вопросы пока не привлекли достаточного внимания исследователей.

### Выводы

Предложенная геомеханическая модель сдвижений в целом вполне удовлетворительно отражает поведение подработанного массива. Получены общего вида функциональные зависимости для замкнутого описания *S*-кривых мульды сдвижения подработанного массива, в том числе его вертикальных смещений, наклонов, кривизны и рывков, что позволяет использовать их для описания разнообразных горно-геологических условий.

Уместно отметить, что модель сдвижений земной поверхности еще нуждается в дополнениях, в частности её следует обобщить на более сложные случаи горно-геологических условий: наклонное падение пластов, наличие наносов и четвертичных

отложений; неполная или кратная подработка горного массива, учет влияния фактора времени, наличие целиков разных размеров и ориентации и др.

В то же время следует обратить внимание на присущие многим методам прогноза, в том числе и предложенной модели, ограничения и недостатки, для преодоления которых необходимо проводить дальнейшие исследования: не определены теоретически граничные углы сдвижения, не установлены зависимости показателей сдвижения от деформационно-прочностных, фильтрационных и гидродинамических параметров наклонно-слоистого горного массива; нет обоснованного учета реологических свойств массива для описания процессов сдвижения породной толщи во времени при неравномерном движении или остановке очистных работ.

Кроме того, при управлении кровлей полным обрушением периодические осадки кровли могут инициировать и изменять сдвижение пород вплоть до горных ударов (особенно в районах с углями высокой степени метаморфизма), что неминуемо снизит надежность охраны зданий и сооружений.

Этот далеко не полный перечень пробелов проблемы сдвижений может быть положен для формулирования дальнейших задач исследований.

### Список источников

1. Авершин С. Г. *Сдвижение горных пород при подземных разработках*. М. : Углетехиздат, 1947. 245 с.
2. *Surface Subsidence Engineering: Theory and Practice* / ed. by Syd S. Peng. CRC Press, 2020. 216 p.
3. Tajduš K. Numerical simulation of underground mining exploitation influence upon terrain surface // *Archives of Mining Sciences*. 2013. Vol. 58. № 3. P. 605–616. DOI: 10.2478/amsc-2013-0042
4. Kratzsch H. *Mining Subsidence Engineering*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1983. 551 p.
5. *Механика сдвижения и разрушения горных пород* / С. Д. Викторов, С. А. Гончаров, М. А. Иофис, В. М. Закалинский. М. : ИПКОН РАН, 2019. 360 с.
6. *Surface Subsidence Monitoring of Mining Areas in Hunan Province Based on Sentinel-1A and DS-InSAR* / L. Zhang [et al.] // *Sensors (Basel)*. 2023. Vol. 23 (19). Article number: 8146. DOI: 10.3390/s23198146
7. Puertas J. J. G. *Estimating highway subsidence due to longwall mining : Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy*. University of Pittsburgh, 2010. 160 p.
8. *Prediction of mining-induced subsidence at Barapukuria longwall coal mine, Bangladesh* / A. K. M. Badrul Alam [et al.] // *Scientific Reports*. 2022. Vol. 12 (1). Article number: 14800. DOI: 10.1038/s41598-022-19160-1

9. Cao J., Huang Q., Guo L. Subsidence prediction of overburden strata and ground surface in shallow coal seam mining // *Scientific Reports*. 2021. Vol. 11 (1). Article number: 18972. DOI: 10.1038/s41598-021-98520-9
10. Jahanmiri S., Noorian-Bidgoli M. Environ Sci Pollut. Land subsidence prediction in coal mining using machine learning models and optimization techniques // *Environmental Science and Pollution Research*. 2024. Vol. 31 (22). P. 31942–31966. DOI: 10.1007/s11356-024-33300-2
11. Kulibaba S., Miletenko N. Influence of the mining depth factor on accuracy of the forecast of the earth's surface subsidence in Kuzbass // *Problems of Complex Development of Georesources : VIII International Scientific Conference. E3S Web of Conferences*. 2020. Vol. 192. Article number: 04009. EDN QLYTPC. DOI: 10.1051/e3sconf/202019204009
12. Tajduś K., Misa R., Sroka A. Analysis of the surface horizontal displacement changes due to longwall panel advance // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2018. Vol. 104. P. 119–125. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2018.02.005
13. Knothe S. Prediction of mining influence. Katowice, 1984. 214 p.
14. Гавриленко Ю. Н. Математическое описание динамики процесса сдвижения на угольных шахтах Донбасса // *International Society for Mine Surveying. XIII International Congress, Budapest, Hungary, 24–28 September. 2007. Report 032*. 6 p.
15. ГСТУ 101.00159226.001-2003. Правила подработки зданий, сооружений и природных объектов при добыче угля подземным способом. К. : УкрНИИМИ НАН Украины, 2004. 128 с.
16. Strzałkowski P., Ścigala R., Szafulewa K. Some aspects of forecasting the post-mining substratum deformation for evaluation of its influence on constructions // *E3S Web of Conferences*. 2018. Vol. 36. Article number: 01008.
17. Литвинский Г. Г. Геомеханические модели процессов сдвижения подработанного горного массива. Труды РАНИМИ. 2024. Т. 1. № 3 (41). С. 101–128.
18. Литвинский Г. Г. К теории сдвижения подработанного породного массива // *Научные технологии и оборудование в промышленности и строительстве*. 2024. № 22 (79). С. 5–20.
19. Verhulst P. F. Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement // *Correspondance mathématique et physique*. Vol. 10. 1838. P. 13–121.
20. Sensors Surface Subsidence Monitoring of Mining Areas in Hunan Province Based on Sentinel-1A and DS-InSAR / L. Zhang [et al.] // *Sensors (Basel)*. 2023. Vol. 23 (19). Article number: 8146. DOI: 10.3390/s23198146
21. Jahanmiri S., Noorian-Bidgoli M. Land subsidence prediction in coal mining using machine learning models and optimization techniques // *Environ Sci Pollut Res Int*. 2024. Vol. 31 (22). P. 31942–31966. DOI: 10.1007/s11356-024-33300-2
22. Cao J., Huang Q., Guo L. Subsidence prediction of overburden strata and ground surface in shallow coal seam mining // *Sci Rep*. 2021. Vol. 11 (1). Article number: 18972. DOI: 10.1038/s41598-021-98520-9

© Литвинский Г. Г.

**Рекомендована к печати к.т.н., доц. каф. ГБП ДонГТУ Шульгиным П. Н., д.т.н., с.н.с., директором РАНИМИ ДНР Дрибаном В. А.**

Статья поступила в редакцию 09.12.2024.

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**Литвинский Гарри Григорьевич**, д-р техн. наук, профессор каф. геотехнологии и безопасности производств  
Донбасский государственный технический университет,  
г. Алчевск, Россия,  
e-mail: ligag@ua.ru

Litvinsky G. G. (Donbass State Technical University, Alchevsk, Russia, e-mail: ligag@ya.ru)

## SHAPE AND PARAMETERS OF SHIFT TROUGH OF THE UNDERMINED ROCK MASS

By analyzing the existing methods for calculating the parameters of shift trough, the prospect of using geomechanical models of its description is shown. The basic provisions of such models and key influencing factors are reviewed. The research task is to develop a theoretical approach for the description of shift trough of the undermined rock mass based on the solution of a differential equation for the S-curve semi-trough of vertical displacements of the Earth's surface. The solution was carried out in a relative system of variables. The solution of differential equation was expressed in the form of the Ferhulst function, which found application in various phenomena and processes. Studying of basic equation of shift semi-trough and its spatial positioning parameters has been carried out. It is shown for the first time that the main S-curve parameters completely predict the angles of boundary shift and complete subsidence of the undermined rock mass. The estimates of location of the semi-trough center and its steepness parameters for the typical conditions of depletion of shallow seams in Donbass are provided. The shortcomings of the obtained solution are analyzed, unsolved problems and tasks of further research are formulated.

**Key words:** shift, Earth's surface, rock mass, classification of factors, geomechanical model, undermining, S-curve, shift semi-trough, shift parameters.

### References

1. Avershin S. G. Rock displacement in underground developments [Sdvizhenie gornyh porod pri podzemnyh razrabotkakh]. M. : Ugletekhizdat, 1947. 245 p. (rus)
2. Peng Syd S. [ed.] Surface Subsidence Engineering: Theory and Practice. CRC Press, 2020. 216 p.
3. Tajduš K. Numerical simulation of underground mining exploitation influence upon terrain surface. Archives of Mining Sciences. 2013. Vol. 58. No. 3. Pp. 605–616. DOI: 10.2478/amsc-2013-0042
4. Kratzsch H. Mining Subsidence Engineering. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1983. 551 p.
5. Viktorov S. D., Goncharov S. A., Iofis M. A., Zakalinsky V. M. Mechanics of displacement and fracture of rocks [Mekhanika sdvizheniya i razrusheniya gornyh porod]. M. : IPKON named after Academician N. V. Melnikov RAS, 2019. 360 p. (rus)
6. Zhang L. [et al.]. Surface Subsidence Monitoring of Mining Areas in Hunan Province Based on Sentinel-1A and DS-InSAR. Sensors (Basel). 2023. Vol. 23 (19) : 8146. DOI: 10.3390/s23198146
7. Puertas J. J. G. Estimating highway subsidence due to longwall mining : Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy. University of Pittsburgh, 2010. 160 p.
8. Alam A.K.M.B. [et al.]. Prediction of mining-induced subsidence at Barapukuria longwall coal mine. Bangladesh. Scientific Reports. 2022. Vol. 12 (1) : 14800. DOI: 10.1038/s41598-022-19160-1
9. Cao J., Huang Q., Guo L. Subsidence prediction of overburden strata and ground surface in shallow coal seam mining. Scientific Reports. 2021. Vol. 11 (1) : 18972. DOI: 10.1038/s41598-021-98520-9
10. Jahanmiri S, Noorian-Bidgoli M. Environ Sci Pollut. Land subsidence prediction in coal mining using machine learning models and optimization techniques. Environmental Science and Pollution Research. 2024. Vol. 31 (22). Pp. 31942–31966. DOI: 10.1007/s11356-024-33300-2
11. Kulibaba S., Miletenko N. Influence of the mining depth factor on accuracy of the forecast of the Earth's surface subsidence in Kuzbass. Problems of Complex Development of Georesources : VIII International Scientific Conference. E3S Web of Conferences. 2020. Vol. 192 : 04009. DOI: 10.1051/e3sconf/202019204009
12. Tajduš K., Misa R., Sroka A. Analysis of the surface horizontal displacement changes due to longwall panel advance. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2018. Vol. 104. P. 119–125. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2018.02.005
13. Knothe S. Prediction of mining influence. Katowice, 1984. 214 p.
14. Gavrilenko Yu. N. Mathematical description of dynamics of the shift process at coal mines in Donbass [Matematicheskoe opisaniye dinamiki processa sdvizheniya na ugol'nyh shahtah Donbassa]. International Society for Mine Surveying. XIII International Congress. Budapest, Hungary, 24–28 September. 2007. Report 032. 6 p.

15. GSTU 101.00159226.001-2003. Rules for mining of buildings, structures and natural objects during underground coal mining. K. : UkrNIMI NAN Ukrainy, 2004. 128 p.

16. Strzałkowski P., Ścigała R., Szafuleta K. Some aspects of forecasting the post-mining substratum deformation for evaluation of its influence on constructions. *E3S Web of Conferences*. EDP Sciences. 2018. Vol. 36 : 01008.

17. Litvinskiy G. G. Geomechanical models of shift processes of the undermined rock mass [Geomekhanicheskie modeli processov sdvizheniya podrobotannogo gornogo massiva]. *Trudy RANIMI*. 2024. Vol. 1. No. 3 (41). Pp. 101–128. (rus)

18. Litvinskij G. G. To the theory of shearing of the undermined rock mass [K teorii sdvizheniya podrobotannogo porodnogo massiva]. *Knowledge-intensive technologies and equipment in industry and building*. 2024. No. 22 (79). Pp. 5–20. (rus)

19. Verhulst P. F. Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. *Correspondance mathématique et physique*. Vol. 10. 1838. Pp. 13–121.

20. Zhang L. [et al.]. Sensors Surface Subsidence Monitoring of Mining Areas in Hunan Province Based on Sentinel-1A and DS-InSAR. *Sensors (Basel)*. 2023. Vol. 23 (19). DOI: 10.3390/s23198146

21. Jahanmiri S., Noorian-Bidgoli M. Land subsidence prediction in coal mining using machine learning models and optimization techniques. *Environ Sci Pollut Res Int*. 2024. Vol. 31 (22). P. 31942–31966. DOI: 10.1007/s11356-024-33300-2

22. Cao J., Huang Q., Guo L. Subsidence prediction of overburden strata and ground surface in shallow coal seam mining. *Sci Rep*. 2021. Vol. 11 (1) : 18972. DOI: 10.1038/s41598-021-98520-9

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

**Litvinsky Garry Grigorievich**, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Geotechnology and Industrial Safety  
Donbas State Technical University,  
Alchevsk, Russia,  
e-mail: ligag@ya.ru