УДК 330.43

Лепило Н. Н.

к.т.н., доц.

ГОУ ВО ЛНР «Луганский государственный университет им. В. ДАЛЯ»,

г. Луганск, ЛНР

ПОСТРОЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Современная эконометрика располагает большим разнообразием типов моделей из которых наибольшее распространение получили линейные эконометрические модели ввиду их простоты и четкой экономической интерпретации параметров. Нелинейные зависимости используются, если между исследуемыми экономическими явлениями существуют нелинейные соотношения. Различают два класса нелинейных моделей регрессии:

– нелинейные относительно включенных в анализ независимых переменных, но линейные по оцениваемым параметрам, к которым относятся полиномиальные, гиперболические и полулогарифмические функции. Их параметры определяются, как и для линейной регрессии, с помощью метода наименьших квадратов (МНК);

– нелинейные по оцениваемым параметрам, к которым относятся степенная, показательная, экспоненциальная, логистическая и другие функции. Этот класс моделей, в свою очередь, подразделяется на внутренне линейные, которые могут быть приведены к линейному виду, и внутренне нелинейные, которые не могут быть сведены к линейной функции [1].

Рассмотрим построение модели, нелинейной по оцениваемым параметрам, но являющейся внутренне линейной, на примере степенной функции вида $\hat{y} = a \cdot x^b$. Она приводится к линейному виду логарифмированием:

$$\ln \hat{y} = \ln a + b \cdot \ln x . \tag{1}$$

После ввода условных обозначений $Y = \ln \hat{y}$, $X = \ln x$, $A = \ln a$ уравнение (1) примет вид:

$$\hat{Y} = A + b \cdot X . \tag{2}$$

По МНК задача сводится к определению таких значений параметров уравнения (2), которые обеспечивают максимальное приближение функции $\hat{Y}$ к фактическим значениям *Y*:

$$f = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \left(A + b \cdot X_i\right)\right)^2 \to \min , \tag{3}$$

где n — число точек по имеющимся данным.

Для определения коэффициентов уравнения (3) находим частные производные 1-го порядка и приравниваем их нулю для выполнения условия (3):

$$\frac{\partial f}{\partial A} = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot \left[Y_i - \left(A + b \cdot X_i\right)\right] \cdot (-1) = -2\sum_{i=1}^{n} Y_i + 2\sum_{i=1}^{n}\left(A + b \cdot X_i\right), \tag{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot \left[Y_i - \left(A + b \cdot X_i\right)\right] \cdot \left(-X_i\right) = -2\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i + 2\sum_{i=1}^{n}\left(A \cdot X_i + b \cdot X_i^2\right), \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} A + \sum_{i=1}^{n} b \cdot X_i = An + \sum_{i=1}^{n} b \cdot X_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i , \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} A \cdot X_i + \sum_{i=1}^{n} b \cdot X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i X_i . \tag{7}$$

Рассматривая уравнения (6–7) как систему линейных уравнений, находим коэффициенты A и b. Возвращаясь к исходным переменным, получим: $a = e^{A}$. По найденным коэффициентам вычисляем значения $\hat{y}$ и определяем среднюю ошибку аппроксимации, позволяющую получить общее суждение о качестве модели: $\overline{A} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i}\right| \cdot 100\%$.

Показателем тесноты связи для уравнения нелинейной регрессии является индекс корреляции, определяемый по формуле:

$$\rho_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\delta_{ост}^2}{\delta_y^2}}, \tag{8}$$

где $\delta_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y - \overline{y})^2$ — общая дисперсия результативного признака y;

$\overline{y}$ — среднее значение y;

$\delta_{ост}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y - \hat{y}\right)^2$ — остаточная дисперсия.

Индекс детерминации, характеризующий долю дисперсии результативного признака y, объясняемую регрессией, в общей дисперсии результативного признака, определяется по формуле

$$\rho^2{}_{xy} = 1 - \frac{\delta_{ост}^2}{\delta_y^2} = \frac{\delta_{факт}^2}{\delta_y^2}, \tag{9}$$

где $\delta_{факт}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y} - \overline{y}\right)^2$.

Оценка значимости уравнения регрессии в целом производится на основе F-критерия Фишера:

$$F = \frac{\delta_{xy}^2}{1 - \delta_{xy}^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m}, \tag{10}$$

где m — число факторов в модели.

Фактическое значение F-критерия Фишера сравниваем с табличным значением при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, что соответствует доверительной вероятности 0,95, и степенях свободы $k_1 = m$ и $k_2 = n - m - 1$.

Рассмотренный подход реализован в среде Excel. Результаты расчетов показали совпадение полученных значений коэффициентов со значениями, отображаемыми Мастером диаграмм, а значения R^2 на диаграмме немного завышены. В работе [2] также отмечено, что для степенной модели Мастер диаграмм выдает неверное R^2.

Список литературы

1. Эконометрика : учебник / И. И. Елисеева [и др.] ; под ред. И. И. Елисеевой. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Финансы и статистика, 2007. — 576 с.

2. Орлова, И. В. Некоторые особенности, возникающие при изучении нелинейной регрессии с использованием Excel и других программ / И. В. Орлова, И. Б. Турундаевский // Экономика, Статистика и Информатика. — 2014. — № 1. — С. 158–161.