

УДК 621.771.23

**к. т. н., доц. Данько В.М.
(ДонГТУ, Алчевск, Украина)**

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ И РЕОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В РАСЧЕТАХ ПРОЦЕССОВ ОМД

Показано, що при визначенні поля напруг коректне застосування реологічної моделі жорстко-пластичного середовища і теорії пластичного плину можливе тільки при умові Мізеса, ідеальній пластичності або ізотропному зміненні.

Проблема и ее связь с научными и практическими задачами.

Распространение персональных компьютеров и доступность пакетов прикладных программ для решения систем дифференциальных уравнений численными методами создают предпосылки для повышения точности теоретического анализа различных процессов ОМД. В этих условиях для получения результатов, близких к действительным, необходимо повышать адекватность математических моделей, которыми заменяются реальные объекты исследований. Те идеализации и упрощения, которые раньше были оправданы низкой точностью решения уравнений, ныне могут приводить к погрешностям, которые никаким повышением точности расчетов устраниить нельзя. Одна из таких погрешностей в определенных случаях появляется из-за несоответствия предпосылок теории пластического течения и применяемых совместно с нею реологических моделей жестко-пластической среды.

Анализ исследований и публикаций.

Исследований данной проблемы в доступной нам литературе не обнаружено, за исключением важного для данного вопроса указания в работе [1] на то, что в случае жестко-пластической среды вектор девиатора напряжений исходит непосредственно из начала системы координат пространства напряжений.

Постановка задачи.

Выяснить, всегда ли согласуется модель жестко-пластической среды с основными предпосылками теории пластического течения и как это может сказаться на точности методов расчета процессов ОМД, использующих вариационные принципы механики сплошных сред.

Изложение материала и результаты.

Рассматриваются две реологические модели: идеально жестко-пластической среды (рис.1а) и жестко-пластической среды с

упрочнением (рис.1б).

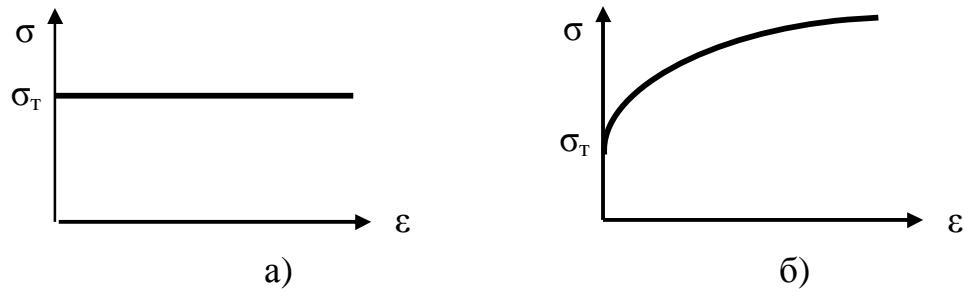


Рисунок 1 – Реологические модели жестко-пластической среды

В случае любой жестко-пластической среды напряжения скачком изменяются от нуля до предела текучести σ_T . В девиаторной плоскости пространства напряжений вектор нагрузки s_{ij} поэтому должен начинаться в т.0 и заканчиваться на контуре текучести L [1] (рис.2а).

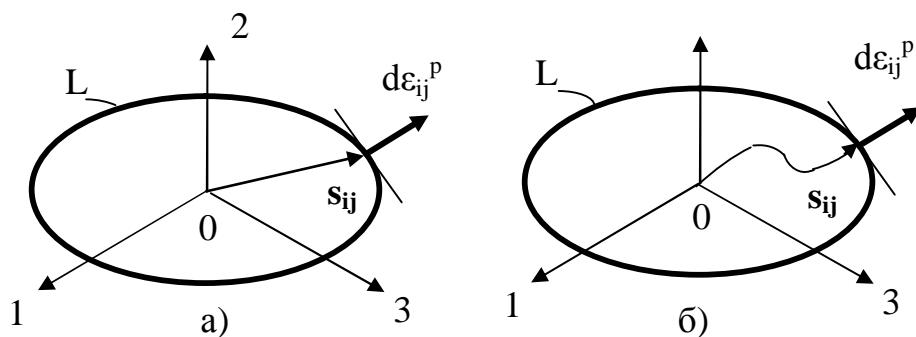


Рисунок 2 – Пути нагружения для различных сред

По теории течения векторы приращения пластических деформаций $d\varepsilon_{ij}^P$ и девиатора напряжений s_{ij} коаксиальны:

$$d\varepsilon_{ij}^P = d\lambda \cdot s_{ij}. \quad (1)$$

Но в соответствии с ассоциированным законом течения вектор $d\varepsilon_{ij}^P$ должен быть ортогонален линии пересечения поверхности текучести девиаторной плоскостью, т.е. контуру текучести L . Следовательно, во всех случаях вектор s_{ij} также должен быть ортогонален к L .

Иная ситуация при использовании модели упруго-пластической среды. В этом случае нагружение может идти по произвольному пути внутри поверхности текучести (рис.2б). Поэтому у ее поверхности вектор s_{ij} всегда может стать ортогональным этой поверхности.

Рассмотрим разные поверхности текучести, соответствующие различным условиям пластичности. Очевидно, что при условии Мизеса, идеальной пластичности или изотропном упрочнении

первоначально изотропной среды условие (1) выполняется всегда, причем это единственный возможный вариант выполнения этого условия для любых напряженных состояний (рис.3, кривая 1).

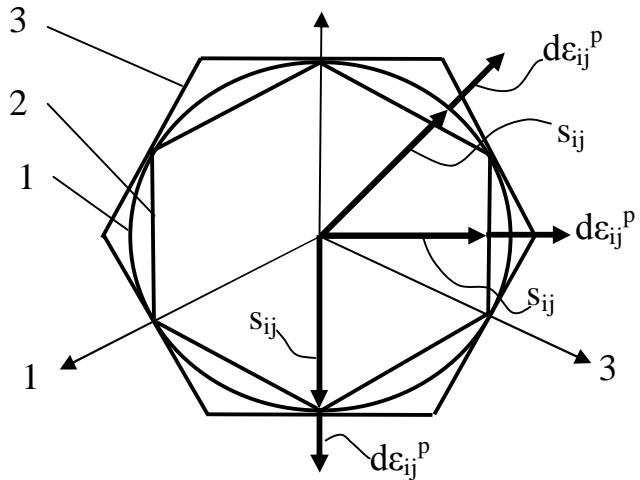


Рисунок 3 – Поверхности текучести различных условий пластичности

Для условий пластичности Треска-Сен-Венана (рис.3, ломаная 2) и Ишлинского-Хейзорнсвейга (рис.3, ломаная 3) – только в некоторых случаях. То же относится к любому условию пластичности при наличии анизотропии – исходной или деформационной (рис. 2а).

Поскольку при расчетах процессов ОМД напряженное состояние заранее неизвестно, то приходим к выводу, что модель жестко-пластической среды не ведет к нарушению основной предпосылки теории течения (1) только при использовании условия пластичности Мизеса и только в случае изотропности среды.

Рассмотрим следствия из этого вывода для разных методов расчетов ОМД.

В методе верхних оценок (МВО), как разновидности энергетических методов, уравнения связи статических и кинематических параметров сплошной среды не используются и поэтому применение модели жестко-пластической среды не вызывает никаких возражений.

В методе линий скольжения (МЛС) применяется как условие Мизеса, так и условие Треска (хотя и реже). Уравнения связи между напряжениями и скоростями деформаций используются, но в виде отношения, поэтому скалярная функция $d\lambda$, характеризующая реологию среды, в (1) сокращается. Отсюда вытекает правомерность использования модели жестко-пластической среды и в МЛС.

При решении задач ОМД посредством метода конечных элементов (МКЭ) обычно применяется вариационная постановка и

реологические модели жестко-пластических сред (пакеты DEFORM3, FORGE3d и т.п.). Вид вариационного функционала зависит от исходных предпосылок. В частности, для жестко-пластической среды применяется функционал принципа виртуальных скоростей [2]:

$$\delta \left[\tau_s \int_V H dV - \int_S \sigma_\tau v_\tau dS \right] = 0, \quad (3)$$

где τ_s – предел текучести при сдвиге; H – интенсивность скоростей деформаций сдвига; V – объем деформируемого тела; S – площадь контактной поверхности; σ_τ и v_τ – полное напряжение трения и скорость скольжения металла по инструменту.

При определении с использованием (3) поля скоростей вышеизложенные соображения не имеют места, поскольку задача решается без привлечения уравнений связи. Но последующее нахождение по найденному полю скоростей поля напряжений неизбежно сопряжено с применением определенного условия пластичности, поскольку в соответствии с ассоциированным законом течения пластический потенциал отождествляется с функцией текучести:

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}},$$

где f – функция текучести в пространстве напряжений. Следовательно, применение модели жестко-пластической среды ведет к нарушению основной предпосылки (1) теории течения. Это вызывает появление погрешности при определении поля напряжений, величина которой не поддается оценке. Предложение оценить эту погрешность расчетом какого-либо процесса для изотропной и анизотропных сред не может быть принято, т.к. это разные задачи и поля напряжений будут различными вследствие различия в исходных данных.

Из-за несжимаемости жестко-пластической среды функционал (3) позволяет находить только девиаторную часть поля напряжений [3]. Поэтому применяется смешанный вариационный принцип, функционал которого содержит среднее нормальное напряжение σ_0 и среднюю скорость деформации ξ_0 [4]:

$$J = \int_V \left(\int_0^H T(H) dH \right) dV + \int_V \sigma_0 \xi_0 dV - \int_S \sigma_\tau v_\tau dS.$$

В этом случае используется экспериментальная реологическая зависимость $T(H)$ в модели по рисунку 1б) и появляется возможность определения поля тензора напряжений. Но поскольку при этом все же используются уравнения связи, то погрешность от несоосности компонент девиатора напряжений и тензора приращения скоростей

деформаций остается. Она не может появиться в принципе только при использовании модели упруго-пластической среды (рис.2б).

Как свидетельствует практика расчетов, применение этой модели не ведет к увеличению времени счета, но погрешности вычислительного характера больше, чем при использовании моделей жестко-пластических сред, чем и объясняется их популярность. Однако эти погрешности не носят принципиального характера и поэтому можно надеяться, что со временем будут сведены к приемлемому минимуму.

Выводы.

Применение модели жестко-пластической среды не ведет к нарушению основной предпосылки теории течения – коаксиальности компонент девиатора напряжений и тензора приращения пластических деформаций - только при условии Мизеса и изотропности среды. Поскольку в процессе деформирования обычно развивается деформационная анизотропия, то при учете этого явления и нахождении поля напряжений по уравнениям связи применение данной модели не желательно. Поэтому в дальнейшем нужно переходить к использованию модели упруго-пластической среды.

Показано, что при определении поля напряжений корректное применение модели жестко-пластической среды и теории течения возможно только при условии Мизеса, идеальной пластичности или изотропном упрочнении.

It is shown that at determination of the field of tensions the model of hardy-plastic environment and flow theory is applicable only on condition of Mises, ideal plasticity or isotropic consolidating.

Библиографический список.

1. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Металлургия, 1969.- 420с.
2. Ериков С.В. Анализ вида вариационных функционалов и их влияния на качественные показатели решения задач ОМД с использованием метода конечных элементов./Изв. вузов. Черная металлургия, 2006. - №5. - с. 26-30.
3. Колмогоров В.Л. Механика обработки металлов давлением. – М.: Металлургия, 1986. – 688с.
4. Компьютерное моделирование процессов обработки металлов давлением. /В.Н.Данченко, А.А.Миленин, В.И.Кузьменко, В.А.Гринкевич. – Днепропетровск, «Системные технологии», 2005. – 441с.

*Рекомендовано к печати
к. т. н., проф. Луценко В.А.*