УДК 621.762 EDN: MRSHKX

Коструб О. М.
Луганский государственный университет им. В. Даля
E-mail: okostrub82@bk.ru

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРЯМОГО ВЫДАВЛИВАНИЯ ПОРОШКОВЫХ ПОРИСТЫХ ЗАГОТОВОК

Работа посвящена разработке математической модели напряженно-деформированного состояния и плотности при прямом выдавливании порошковых пористых заготовок. Рассмотрена математическая модель и граничные условия для расчета напряженно-деформированного состояния и пористости порошкового тела. Для оценки плотности использовано кинетическое уравнение изменения пористости в процессе прямого выдавливания упругопластического тела с учетом граничных условий.

Ключевые слова: *математическая модель, прямое выдавливание, порошковая пористая заготовка, напряженно-деформированное состояние, плотность, пористость.*

Постановка проблемы, обоснование ее актуальности. Холодное выдавливание порошковых пористых заготовок является перспективным и рациональным способом получения деталей. Холодной штамповкой пористых заготовок получают изделия простых и сложных форм, достигая при этом высокой плотности и требуемых свойств материалов, сопоставимых со свойствами литых и деформированных материалов аналогичного химического состава [1].

При этом выдавливанию, как наиболее прогрессивному способу получения деталей сложной формы из порошковых пористых заготовок, не уделено достаточно внимания. Практически отсутствуют сведения о деформационной способности порошковых материалов в условиях холодной обработки давлением при выдавливании полых тонкостенных изделий.

Процессы деформирования встречаются в технологиях порошковой металлургии при получении пористой заготовки из порошка и на стадии финишной обработки самой заготовки. При исследовании процессов деформирования рассматривается промежуточное состояние материала, которым в исходном состоянии является порошок, а в конечном — пористое тело. Особенностью таких материалов является способность необратимо изменять свой объем. В частности, возможность уплотняться при схемах нагружения с преобладающей гидростатической компонентой.

Постановка задачи. При исследовании схем изготовления деталей сложной формы — с внутренними полостями и тонкими стенками — холодной штамповкой порошковых пористых заготовок возникает необходимость разработки математических моделей выдавливания, выполнения исследований, направленных на изучение процессов пластического деформирования, влияния свойств порошкового материла на формирование свойств материала изделия.

Целью исследования является разработка математической модели прямого выдавливания порошковых пористых заготовок.

Для достижения поставленной цели необходимо:

– рассмотреть математическую модель и граничные условия для расчета напряженно-деформированного состояния и пористости порошкового тела;

– для оценки плотности использовать кинетическое уравнение изменения пористости в процессе прямого выдавливания упругопластического тела с учетом граничных условий;

– на основе положений теории пластичности пористых тел разработать математическую модель напряженно-деформированного состояния и плотности при прямом выдавливании порошковых пористых заготовок.

Методика исследования. При разработке математической модели используем понятия континуальной механики пластических деформаций [2]. В частности, предполагается существование поверхности нагружения, а также справедливость ассоциированного закона течения. Материал рассматриваем как изотропный во все моменты деформирования. В этом случае его поведение контролируется первым инвариантом тензора скоростей деформаций и вторым инвариантом его девиатора [3].

Для моделирования процесса холодного прессования использовали представления об упругопластическом пористом теле. В основе определяющих уравнений пластического течения пористого тела лежит связь между приращениями деформаций $d\varepsilon_{ij}$, приращениями напряжений $d\sigma_{ij}$ и напряжениями σ_{ij} [1, 2]. Приращения деформаций складываются из приращений упругих $d\varepsilon_{ij}^{y}$ и пластических $d\varepsilon_{ij}^{p}$ деформаций:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{y} + d\varepsilon_{ij}^{p}. \quad (1)$$

Через скорости деформаций можно записать [4, 5]

$$e_{ij} = e_{ij}^{\nu} + e_{ij}^{p}, \quad (2)$$

где $e_{ij} = \dfrac{d\varepsilon_{ij}}{dt}$ — тензор скоростей деформации.

В соответствии с законом Гука для упругих деформаций можно записать

$$de_{ij}^{y} = \frac{dD_{ij}}{2G} + \delta_{ij}\frac{d\sigma_0}{3K}, \quad (3)$$

где D_{ij} — девиатор деформаций; $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ — модуль сдвига; δ_{ij} — символ Кронекера; σ_0 — шаровой тензор; $K = \dfrac{E}{3(1-2\nu)}$ — модуль объемного сжатия; ν – коэффициент Пуассона; E — модуль упругости.

Пластическая составляющая поведения материала описывается определяющими соотношениями модели Cam-Clay в форме, представленной в работах [6, 7]. Согласно этой модели, уравнение поверхности нагружения для пористой среды имеет вид

$$\frac{(p+p_0)^2}{\psi} + \frac{\tau^2}{\varphi} = (1-\theta)\left(\frac{\sigma_0}{1+m}\right)^2, \quad (4)$$

где $p = \dfrac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$ — шаровой тензор; θ — пористость; σ_0 — напряжение течения твердой фазы; $p_0 = m\sigma_0\sqrt{(1-\theta)\psi}$ — значение шаровой компоненты напряженного состояния, при которой объем не изменяется; τ — интенсивность напряжений; m — коэффициент, чувствительный к дефектам порошка и траектории деформирования; $\psi = \dfrac{1(1-\theta)^3}{3\theta}$, $\varphi = (1-\theta)^2$ — функции пористости.

Интенсивность напряжений определится через главные нормальные напряжения как [8]

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2}, \quad (5)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные нормальные напряжения.

Эволюционное уравнение для пористости непосредственно следует из закона сохранения массы [9]:

$$\frac{d\theta}{dt} = (1-\theta)e^{p}. \quad (6)$$

Эквивалентная деформация твердой фазы пористого тела принимается в виде

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{1}{\sqrt{1-\theta}}\sqrt{\psi\left(e^{p}\right)^{2}+\varphi\left(\gamma^{p}\right)^{2}}. \quad (7)$$

Ассоциированный с формулой определения плотности, закон течения дает для скоростей деформации вдоль главных направлений следующее выражение:

$$\begin{aligned} e_i &= \lambda\left[\varphi\left(\sigma_i-\sigma\right)+2\psi I_1\right]= \\ &= \lambda\left(\varphi S_i+2\psi I_1\right), \ \ (i=1,2,3). \end{aligned} \quad (8)$$

где S_i — главные компоненты девиатора напряжений; λ — множитель Лагранжа.

Вычисляя из формулы (8) интенсивность скоростей деформации сдвига

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{\frac{2}{3}}\times \\ &\times\sqrt{\left(e_z-e_r\right)^{2}+\left(e_r-e_\theta\right)^{2}+\left(e_\theta-e_z\right)^{2}}= \\ &= 2\lambda\psi\sqrt{I_2}, \end{aligned} \quad (9)$$

найдем скалярный множитель Лагранжа в ассоциированном законе течения:

$$\lambda=\frac{H}{2\psi\sqrt{\sigma_{cp}}}. \quad (10)$$

Тогда уравнение для скоростей деформации (8) запишется как

$$\frac{e_i}{H}=\frac{I}{2\sqrt{I_2}}\left(S_i+\frac{2\varphi\cdot I_1}{\psi}\right), \left(i=1,2,3\right), \quad (11)$$

а скорость изменения объема, вызванная формоизменением:

$$e=e_z+e_r+e_\theta=\frac{3\varphi H\sigma_{cp}}{\psi\sqrt{I_2}}. \quad (12)$$

При нулевой пористости $\varphi=0$, $\psi=3$ и (8), (11), (12) совпадают с обычными уравнениями теории пластического течения Леви — Мизеса.

Так как объем материала изменяется за счет изменения объема пор

$$e=\frac{1}{1-\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}, \quad (11)$$

то из формулы (12) получим

$$\frac{d\theta}{dt}=\left(1-\theta\right)\frac{3\varphi H\sigma_{cp}}{\psi\sqrt{I_2}}. \quad (12)$$

Уравнение (12) является кинетическим уравнением изменения пористости порошкового материала в процессе его пластической деформации. В случае $\theta\ll 1$, $\varphi\approx\theta$ уравнение (12) можно записать в более простом виде:

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{\varphi H\sigma_{cp}}{k} \text{ или } \frac{d\theta}{dt}=\frac{3\sigma d\Gamma}{k}, \quad (13)$$

где $d\Gamma=Hdt$ — приращение интенсивности деформаций; $k=\sigma_s/\sqrt{3}$ — предел текучести на сдвиг компактного материала.

На основании ассоциированного закона течения определяются приращения пластических деформаций:

$$d\varepsilon_{ij}^{p}=d\lambda D_{ij}, \quad (14)$$

где $d\lambda=\frac{3}{2}\frac{de_i^p}{\sigma_i}$ — множитель Лагранжа.

Подставляя выражения (14) и (1) в (3), получаем уравнение Прандтля — Рейса для пластически деформируемой среды по теории течения [10]:

$$de_{ij}=\frac{dD_{ij}}{2G}+\delta_{ij}\frac{d\sigma_0}{3K}+\frac{3}{2}\frac{de_i^p}{\sigma_i}D_{ij}. \quad (15)$$

Уравнение Прандтля — Рейса связывает напряжения с бесконечно малыми приращениями деформаций и напряжений, т. е. не является конечным соотношением между напряжениями и деформациями для произвольного нагружения или пути деформирования. Оно отражает зависимость деформаций от пути нагружения и напряжений от пути деформирования.

Для процессов обработки давлением уплотняемых порошковых пористых материалов $de_{ij}^{p} \gg de_{ij}^{y}$. Если пренебречь упругой составляющей тензора деформаций, приходим к уравнениям Сен-Венана — Леви — Мизеса [11]:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2}\frac{\dot{\varepsilon}_i}{\sigma_i} D_{ij}. \tag{16}$$

Уравнения Сен-Венана — Леви — Мизеса представляют собой конечные зависимости между напряжениями и скоростями деформаций.

Результаты исследования. Необратимая составляющая тензора скоростей деформаций связана с напряжениями принципом нормальности:

$$e_{ig}^{p} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}, \tag{17}$$

где Φ — пластический потенциал, определяемый уравнением (18):

$$\Phi\left(\sigma_{ij}\right) = \frac{\left(p + p_0\right)^2}{\psi} + \frac{\tau^2}{\varphi} - -\left(1-\theta\right)\left(\frac{\sigma_0}{1+m}\right)^2. \tag{18}$$

Пластический потенциал — это некоторая скалярная функция в пространстве напряжений, частные производные от которой дают величины, пропорциональные компонентам приращений пластической деформации.

Уравнение для скоростей напряжений можно представить в виде [11]

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dt} = g_{ij}\left(\sigma_{kn}, e_{im}\right). \tag{19}$$

Выражение (19) можно использовать для решения задачи распределения напряжений при прямом выдавливании.

Определим граничные условия, которые должны отражать характер взаимодействия поверхности инструмента с поверхностью заготовки.

Определим граничные условия для первой стадии прямого выдавливания, когда происходит осадка заготовки и уплотнение материала. Установим вид граничных условий для цилиндра с наружным радиусом b и высотой h (рис. 1).

Цилиндрическую систему координат выберем таким образом, чтобы ось Z была сонаправлена оси заготовки, а ее основание $Z=0$ совпало с плоскостью упора. Предполагаем последний недеформируемым и абсолютно шероховатым. Будем иметь:

$$V_z\big|_{z=0} = 0;\ V_r\big|_{z=0} = 0. \tag{20}$$

Аналогично запишется для верхнего пуансона:

$$\frac{\partial V_z}{\partial r}\Big|_{z=h} = 0;\ V_r\big|_{z=h} = 0. \tag{21}$$

Граничные условия для второй стадии — прямое выдавливание, происходит заполнение кольцевой части.

Боковые поверхности матрицы $r=b$ и внутреннего упора $r=a$ являются недеформируемыми, характеризуются следующими кинематическими условиями:

$$V_r\big|_{r=a} = V_r\big|_{r=b} = 0. \tag{22}$$

Кроме этого, на боковых поверхностях имеет место внешнее трение. Принимая закон внешнего трения в форме Зибеля, запишем следующие граничные условия [11]:

$$\left|\tau_{rz}\right|\big|_{r=a} = -m\sigma_{r=a};\ \left|\tau_{rz}\right|\big|_{r=b} = m\sigma_{r=b}, \tag{23}$$

где m — фактор трения.

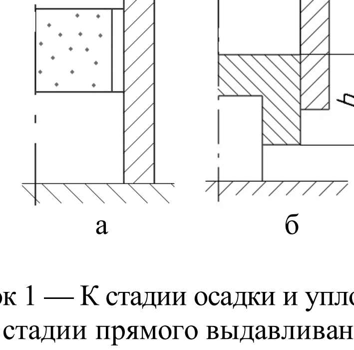

Рисунок 1 — К стадии осадки и уплотнения (а); к стадии прямого выдавливания (б)

Выводы. Разработанная математическая модель может быть использована для анализа напряженно-деформированного состояния и плотности при прямом выдавливании порошковых пористых заготовок.

Список источников

1. Петросян Г. Л. Пластическое деформирование порошковых материалов. М. : Металлургия, 1988. 152 с.

2. Сегал В. М., Резников В. И., Малышев В. Ф. Вариационный функционал для пористого тела // Порошковая металлургия. 1981. № 9. С. 15–18.

3. Феноменологические теории прессования порошков / М. Б. Штерн [и др.]. К. : Наукова думка, 1982. 140 с.

4. Штерн М. Б. Модель процессов деформирования сжимаемых материалов с учетом порообразования. Сообщение I. Определяющие уравнения и поверхность // Порошковая металлургия. 1989. № 5. С. 28–34.

5. Штерн М. Б. Модель процессов деформирования сжимаемых материалов с учетом порообразования. Сообщение II. Одноосное растяжение и сжатие пористых тел // Порошковая металлургия. 1989. № 6. С. 34–39.

6. Green R. G. A plasticity theory for porous solids // Int. Journ. Of Mech. Sci. 1972. Vol. 14. P. 215–226.

7. Shima S., Oyane M. Plasticity theory for porous metals // Int. Journ. Of Mech. Sci. 1976. Vol. 18. P. 285–291.

8. Колмогоров В. Л. Механика обработки металлов давлением. Екатеринбург : Изд-во УГТУ-УПИ. 2001. 836 с.

9. Кун Х. А. Основные принципы штамповки порошковых заготовок // Порошковая металлургия материалов специального назначения. М. : Металлургия, 1977. С. 143–158.

10. Mori K. I., Shima S., Osakada K. Finite element method for the analysis of plastic deformation of porous metals // Bull. ISME. 1980. Vol. 23. No. 178. P. 516–522.

11. Рябичева Л. А., Коструб О. М. Математическая модель прямого выдавливания порошковых пористых заготовок с активным действием сил трения // Ресурсосберегающие технологии производства и обработки давлением материалов в машиностроении : науч. журнал. 2023. № 4 (45). С. 11–19.

Рекомендована к печати д.т.н., проф., зав. каф. материаловедения ЛГУ им. В. Даля Рябичевой Л. А., к.т.н., проф. каф. МТ ДонГТУ Денищенко П. Н.

Статья поступила в редакцию 21.02.2024.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Коструб Ольга Михайловна, *старший преподаватель каф. железнодорожного транспорта*
Луганский государственный университет им. В. Даля,
г. Луганск, Луганская Народная Республика, Россия,
e-mail: okostrub82@bk.ru

Kostrub O. M. *(Lugansk State University named after V. Dahl, Lugansk, Lugansk People's Republic, Russia, e-mail: okostrub82@bk.ru)*

DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL MODEL FOR DIRECT EXTRUSION THE POWDER POROUS BILLETS

The paper is devoted to the development of mathematical model of the stress-strain state and density during the direct extrusion of powder porous billets. The mathematical model and boundary conditions *for calculating the stress-strain state and porosity of the powder body have been examined. For density estimation the kinetic equation of porosity change in the process of direct extrusion of elastoplastic body with regard to boundary conditions is used.*

Key words: *mathematical model, direct extrusion, porous powder billet, stress-strain state, density, porosity.*

References

1. Petrosian G. L. Plastic deformation of powdered materials [Plasticheskoe deformirovanie poroshkovyh materialov]. M. : Metalurgija, 1988. 152 p. (rus)

2. Segal V. M., Reznikov V. I., Malyshev V. F. Variation functional for a porous body [Variacionnyj funkcional dlya poristogo tela]. Powder Metallurgy. 1981. No. 9. Pp. 15–18. (rus)

3. Shtern M. B. [et al.] Phenomenological theories of powder pressing [Fenomenologicheskie teorii pressovaniya poroshkov]. K. : Naukova Dumka, 1982. 140 p. (rus)

4. Shtern M. B. A Model of deformation processes of compressible materials with consideration of pore formation. Communication I. Defining equations and surface [Model' processov deformirovaniya szhimaemyh materialov s uchetom poroobrazovaniya. Soobshchenie I. Opredelyayushchie uravneniya i poverhnost']. Powder Metallurgy. 1989. No. 5. Pp. 28–34. (rus)

5. Shtern M. B. A Model of deformation processes of compressible materials with consideration of pore formation. Communication II. Uniaxial tension and compression of porous bodies [Model' processov deformirovaniya szhimaemyh materialov s uchetom poroobrazovaniya. Soobshchenie II. Odnoosnoe rastyazhenie i szhatie poristyh tel]. Powder Metallurgy. 1989. No. 6. Pp. 34–39. (rus)

6. Green R. G. A plasticity theory for porous solids. Int. Journ. Of Mech. Sci. 1972. Vol. 14. Pp. 215–226.

7. Shima S., Oyane M. Plasticity theory for porous metals. Int. Journ. Of Mech. Sci. 1976. Vol. 18. Pp. 285–291.

8. Kolmogorov V. L Mechanics of metal forming [Mekhanika obrabotki metallov davleniem]. Ekaterinburg : Publishing house of the USTU-UPI, 2001. 836 p. (rus)

9. Kun Kh. A. Basic principles of stamping powdered blanks [Osnovnye principy shtampovki poroshkovyh zagotovok]. Powder metallurgy for high-performance applications. M. : Metalurgija, 1977. Pp. 143–158. (rus)

10. Mori K. I., Shima S., Osakada K. Finite element method for the analysis of plastic deformation of porous metals. Bull. ISME. 1980. Vol. 23. No. 178. Pp. 516–522.

11. Riabicheva L. A., Kostrub O. M. Mathematical model for direct extrusion of porous powder parts with active frictional forces [Matematicheskaya model' pryamogo vydavlivaniya poroshkovyh poristyh zagotovok s aktivnym dejstviem sil treniya]. Resource-saving technologies of production and forming materials in mechanical engineering : scientific journal. 2023. No. 4 (45). Pp. 11–19. (rus)

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Kostrub Olga Mikhailovna, *Senior Lecturer of the Department of Railway Transport*
Lugansk State University named after V. Dahl
Lugansk, Lugansk People's Republic, Russia,
e-mail: okostrub82@bk.ru