

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ЛУГАНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
«ДОНБАССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

В. А. Козачишен, Е. С. Козачишена

**ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ
СРЕДСТВАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

Учебное пособие

Рекомендовано Ученым советом ГОУ ВО ЛНР «ДонГТИ»

Алчевск
2022

УДК 519.85
ББК 22.1
К59

Козачишен Виталий Анатольевич — канд. техн. наук, доц. кафедры машин металлургического комплекса ГОУ ВО ЛНР «ДонГТИ» (г. Алчевск);

Козачишена Елена Сергеевна — старший преподаватель кафедры машин металлургического комплекса ГОУ ВО ЛНР «ДонГТИ» (г. Алчевск).

Рецензенты:

В. А. Витренко — д-р. техн. наук, профессор, проректор по научной работе и инновационной деятельности ГОУ ВПО «Луганский национальный университет им. В. Даля» (г. Луганск);

Т. Б. Коробко — канд. техн. наук, доц., доц. кафедры обработки металлов давлением и металловедения ГОУ ВО ЛНР «ДонГТИ», (г. Алчевск);

Д. А. Вишнеvский — канд. техн. наук, доц., зав. кафедрой машин металлургического комплекса, ректор ГОУ ВО ЛНР «ДонГТИ», (г. Алчевск).

*Рекомендовано Ученым советом ГОУ ВО ЛНР «ДонГТИ»
(Протокол № 2 от 28.01.2022)*

Козачишен В. А.

К59

Исследование механизмов средствами математического моделирования : учебное пособие / В. А. Козачишен, Е. С. Козачишена. — Алчевск : ГОУ ВО ЛНР «ДонГТИ», 2022. — 83 с.

Структура и объем учебного пособия ориентированы на программу дисциплины «Математические модели в расчетах на ЭВМ», предусмотренную учебным планом для студентов специальности 15.03.02 «Металлургическое оборудование». Материалы пособия можно использовать также в курсе «Теория машин и механизмов» для смежных специальностей при изучении раздела кинематического анализа плоских рычажных механизмов и в курсовом проектировании, чтобы достичь многовариантности решения задач кинематики.

**УДК 519.85
ББК 22.1**

© ГОУ ВО ЛНР «ДонГТИ», 2022
© В. А. Козачишен, Е. С. Козачишена, 2022
© Н. В. Чернышова, художественное оформление обложки, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Координатный метод кинематического исследования плоских рычажных механизмов	6
1.1. Уравнения связей между кинематическими параметрами точек твердого тела.....	6
1.2. Зависимости между полярными и декартовыми кинематическими параметрами	8
1.3. Уравнения связей, налагаемых кинематическими парами на элементы этих пар.....	9
1.4. Последовательность кинематического анализа структурных групп плоских рычажных механизмов.....	12
2. Кинематический анализ структурных единиц плоских рычажных механизмов 2-го класса и анализ этих механизмов в целом	15
2.1. Кинематический анализ групп Ассура 1-го класса.....	15
2.2. Кинематический анализ групп Ассура 2-го класса.....	18
2.3. Кинематический анализ плоских рычажных механизмов координатным методом.....	40
2.4. Определение углов, определяющих положение кривошипа, отвечающих крайним положениям исполнительного звена распространенных четырехзвенных механизмов	43
2.5. Решение второй и третьей задачи кинематического исследования механизмов методом численного дифференцирования	48
2.6. Определение вспомогательных координат одной из сопряженных точек поступательной кинематической пары	52
3. Расчетная часть.....	54
3.1. Последовательность выполнения и оформления работы	54
3.2. Пример выполнения работы.....	56
3.3. Программные модули реализации математической модели	63
Список литературы	83

ВВЕДЕНИЕ

Изучая сложные объекты или технологические процессы или решая задачи проектирования машин или технологий, невозможно учесть все факторы. Какие-то из них — важные, а другими можно пренебречь. Таким образом, создается модель объекта. Это такая созданная в уме или реализованная материально система, которая, отображая объект исследования, может заменить его так, что ее изучение дает новую информацию о рассматриваемом объекте. Мысль, сосредоточенная на задаче, которую следует решить. Эта задача первична, все остальное — лишь средства ее анализа.

Триаду «модель – алгоритм – программа» при решении многих задач необходимо дополнять этапами анализа полученных результатов, уточнением модели и т. д. ЭВМ все чаще применяются уже для первичной обработки результатов экспериментов. Если результаты моделирования объекта правильно отображают его важнейшие характеристики, то можно «проиграть» поведение объекта в различных, даже экстремальных или чрезвычайных ситуациях, выбрать самые выгодные и удобные параметры.

Теперь во многих областях знаний применение методов информатики тормозится не столько отсутствием компьютеров, как принято считать, а в большей степени содержательных математических моделей. Их разработка требует тесного творческого взаимодействия математиков, системотехников и специалистов предметной области знаний.

Модели реальных объектов и моделирование определенных явлений издавна используют в науке и технике для проверки идей, отработки гипотез, получения экспериментального материала. Долгое время достаточно распространенными в технике были методы физического моделирования, которые основывались на строгой теоретической базе, известной теории подобия. С развитием и распространением ЭВМ расширяется круг задач, которые реализуются средствами математического моделирования. Математическая модель — это не только уравнения, но и дополнительные условия, определяющие границы их применимости. Конструируя математическую модель, нужно заранее оценить, каким «действенным средствам» при рассмотрении явления отдать предпочтение, а какие отнести к разряду второстепенных.

Целью рассматриваемого курса является — ознакомить будущих специалистов не только теоретически, но и практически с основными этапами решения задач на ЭВМ:

- постановкой задачи;
- составлением математической модели и алгоритмизацией;
- написанием программы и ее отладкой;
- получением и анализом результатов.

Объектом дальнейшего исследования является кинематический анализ плоских рычажных механизмов различной конфигурации. При изучении курса «Теория машин и механизмов» в учебной практике широкое применение получили графоаналитические методы: благодаря, прежде всего, отработанной методике, наглядности и тому подобное. Однако для того чтобы решать такие задачи на ЭВМ, необходимо знать современные аналитические методы кинематического анализа. Поэтому в этом пособии рассматривается координатный метод исследования механизмов, с позиций теории математического моделирования. На этапе программирования современные ЭВМ позволяют автоматизировать этот процесс. В предлагаемом пособии приведены примеры реализации программных модулей, которые решают отдельные частные задачи исследования той или иной группы Ассура. Глобальную задачу решают, строя математическую модель механизма с помощью вычислительных алгоритмов кинематического анализа групп Ассура, а также общую программу на основе структурного анализа исследуемого механизма.

Структура и объем материала ориентированы на программу дисциплины «Математические модели в расчетах на ЭВМ», предусмотренную учебным планом для студентов специальности 15.03.02 «Металлургическое оборудование». Материалы пособия можно использовать также в курсе «Теория машин и механизмов» для смежных специальностей при изучении раздела кинематического анализа плоских рычажных механизмов и в курсовом проектировании, чтобы достичь многовариантности решения задач кинематики.

1. КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД КИНЕМАТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Координатный метод кинематического исследования предусматривает решение таких трех задач:

1. Определение декартовых координат точек механизма и углов, определяющих положение звеньев в определенный момент времени.
2. Определение проекций скоростей точек механизма на неподвижные оси декартовых координат, а также угловые скорости звеньев.
3. Определение проекций ускорений точек механизма на неподвижные оси декартовых координат, а также угловые ускорения звеньев.

Кинематические параметры точек — координаты, проекции скоростей и проекции ускорений — определяются из уравнений связей, накладываемых на эти точки звеньями и кинематическими парами механизма. Кинематические параметры звеньев — углы, угловые скорости и угловые ускорения, являются координатами и проекциями полярной системы координат, определяются в декартовой системе координат из зависимостей между полярными и декартовыми кинематическими параметрами.

1.1. Уравнения связей между кинематическими параметрами точек твердого тела

И в теоретической механике, и в теории механизмов и машин тела (звена) считаются абсолютно твердыми, то есть такими, в которых расстояния между двумя произвольными точками не изменяются и не зависят от времени.

Математической моделью условия неизменности расстояния между произвольными точками A и B твердого тела является уравнение окружности с центром в любой из этих точек и радиусом, равным расстоянию между точками, то есть

$$(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 = \ell^2, \quad (1.1)$$

где X_B, Y_B, X_A, Y_A — координаты точек A и B ,
 ℓ — расстояние между этими точками.

Условимся далее разницу координат точек, а также разницы проекций скоростей и проекций ускорений этих точек, являющихся производными по времени от этих координат, обозначать сокращено:

$$\begin{cases} X_{BA} = X_B - X_A, \\ Y_{BA} = Y_B - Y_A, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{X}_{BA} = \dot{X}_B - \dot{X}_A, \\ \dot{Y}_{BA} = \dot{Y}_B - \dot{Y}_A, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{X}_{BA} = \ddot{X}_B - \ddot{X}_A, \\ \ddot{Y}_{BA} = \ddot{Y}_B - \ddot{Y}_A, \end{cases}$$

где $\dot{X}_B, \dot{X}_A, \dot{Y}_B, \dot{Y}_A$ — первые производные по времени от координат точек A и B эти производные являются проекциями на оси X и Y скоростей этих точек;

$\ddot{X}_B, \ddot{X}_A, \ddot{Y}_B, \ddot{Y}_A$ — вторые производные по времени от координат точек A и B , эти производные являются проекциями на соответствующие оси ускорений точек.

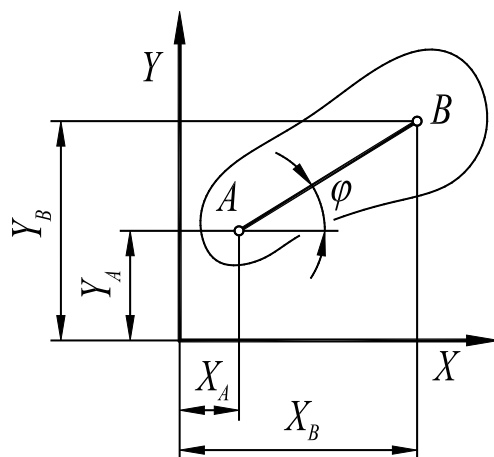


Рисунок 1.1 — Взаимное расположение двух точек твердого тела

Учитывая приведенные сокращенные обозначения, уравнения (1.1) можна записать в виде

$$X_{BA}^2 + Y_{BA}^2 = l^2 \quad (1.2)$$

Чтобы установить связь между проекциями скоростей точек A и B твердого тела, продифференцируем по времени уравнение (1.2).

Получим

$$\dot{X}_{BA} \cdot X_{BA} + \dot{Y}_{BA} \cdot Y_{BA} = 0 \quad (1.3)$$

Продифференцировав решение (1.3) по времени, получим уравнение связи между проекциями ускорений рассматриваемых точек:

$$\ddot{X}_{BA} \cdot X_{BA} + \ddot{Y}_{BA} \cdot Y_{BA} + \dot{X}_{BA}^2 + \dot{Y}_{BA}^2 = 0 \quad (1.4)$$

Уравнения (1.1)–(1.4) и являются уравнениями связи между кинематическими параметрами двух произвольных точек A и B твердого тела.

Кинематические параметры звеньев механизма — углы, определяющие положения звеньев, угловые скорости, угловые ускорения — являются координатами и производными по времени от этих координат полярной системы. Выразим эти величины через декартовы кинематические параметры точек механизма.

1.2. Зависимости между полярными и декартовыми кинематическими параметрами

Положение тела на плоскости определяется углом φ между положительным направлением оси X и прямой, проведенной через две точки этого тела (рис. 1.1). Положительным направлением угла φ является направление против движения часовой стрелки. Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Y_{BA}}{X_{BA}} \quad \text{или} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{Y_{BA}}{X_{BA}} \quad (1.5)$$

Продифференцировав уравнения (1.5) один раз и второй по времени, получим соответственно выражение угловой скорости $\omega = \dot{\varphi}$ и выражение углового ускорения $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ звена через декартовы кинематические параметры двух точек этого звена, то есть

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\ell^2} \cdot (\dot{Y}_{BA} \cdot X_{BA} - \dot{X}_{BA} \cdot Y_{BA}) \quad (1.6)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{\ell^2} \cdot (\ddot{Y}_{BA} \cdot X_{BA} - \ddot{X}_{BA} \cdot Y_{BA}) \quad (1.7)$$

Используя уравнения (1.5) – (1.7), можно выразить угол, определяющий положение звена в данный момент времени, угловую скорость $\dot{\varphi}$ и угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ звена через декартовы кинематические параметры двух точек этого звена. В ходе решения задач возникает также потребность определять декартовы кинематические параметры через известные полярные параметры звена φ , $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$. Уравнения связи между прямоугольными и полярными координатами (рис. 1.1) имеет вид [2]

$$\begin{cases} X_{BA} = \ell \cdot \cos \varphi \\ Y_{BA} = \ell \cdot \sin \varphi \end{cases} \quad (1.8)$$

или

$$\begin{cases} X_B = X_A + \ell \cdot \cos \varphi \\ Y_B = Y_A + \ell \cdot \sin \varphi \end{cases} \quad (1.9)$$

Продифференцировав систему (1.9) один раз и дважды по времени, получим соответственно

$$\begin{cases} \dot{X}_B = \dot{X}_A - \dot{\varphi} \cdot \ell \cdot \sin \varphi = \dot{X}_A - \dot{\varphi} \cdot Y_{BA} \\ \dot{Y}_B = \dot{Y}_A + \dot{\varphi} \cdot \ell \cdot \cos \varphi = \dot{Y}_A + \dot{\varphi} \cdot X_{BA} \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\begin{cases} \ddot{X}_B = \ddot{X}_A - \ddot{\varphi} \cdot Y_{BA} - \dot{\varphi}^2 \cdot X_{BA} \\ \ddot{Y}_B = \ddot{Y}_A + \ddot{\varphi} \cdot X_{BA} - \dot{\varphi}^2 \cdot Y_{BA} \end{cases} \quad (1.11)$$

На точки звеньев механизма налагают связи (ограничения) не только сами звенья, но и кинематические пары, в которые эти звенья входят. Рассмотрим эти связи.

1.3. Уравнения связей, налагаемых кинематическими парами на элементы этих пар

Кинематической парой называют соединение двух статических звеньев, допускающее их относительное движение. Совокупность поверхностей, линий и отдельных точек звена, по которым она может соприкаться с другим звеном, образуя кинематическую пару, называют элементом кинематической пары.

Из определения кинематической пары следует, что она может налагать ограничения только на относительное движение (относительные координаты) звеньев, которые образуют пару, а не на положение этих звеньев на плоскости или в пространстве, определяемые абсолютными координатами. Поэтому рассмотренные в этом разделе условия связей можно использовать только для определения проекций скоростей и проекций ускорений статичных точек элемента пары. На абсолютные координаты этих точек кинематической пары никаких ограничений (условий связей) не налагает. Рассматриваемые далее условия связей для определения координат точек элемента пары не могут быть использованы.

Звенья плоских рычажных механизмов могут входить только во вращательные и поступательные кинематические пары. Рассмотрим поступательную пару (рис. 1.2) с прямолинейным направляющим звеном.

В геометрических точках B и C будем отличать геометрически совпадающие точки B_1, C_1 и B_2, C_2 , принадлежащие соответственно 1-му и 2-му звену, образующие рассматриваемую кинематическую пару. Тогда

$$\begin{cases} X_{B_1} = X_{B_2} = X_B; & Y_{B_1} = Y_{B_2} = Y_B; \\ X_{C_1} = X_{C_2} = X_C; & Y_{C_1} = Y_{C_2} = Y_C; \end{cases}$$

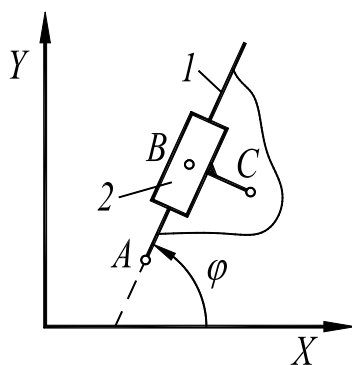


Рисунок 1.2 — Поступательная кинематическая пара с прямолинейным направляющим звеном

Учитывая предложенные ранее сокращенные обозначения, получим

$$X_{B_1 B_2} = Y_{B_1 B_2} = X_{C_1 C_2} = Y_{C_1 C_2} = 0 \quad (1.12)$$

Уравнение (1.12) является математической моделью условий совпадения точек B_1 , B_2 и C_1 , C_2 . Рассмотрим для звеньев 1, 2 вектор относительного перемещения этих звеньев \vec{r}_{12} с проекциями на оси X и Y :

$$\begin{cases} X_{12} = X_{B_1B_2} = X_{C_1C_2} = 0 \\ Y_{12} = Y_{B_1B_2} = Y_{C_1C_2} = 0. \end{cases}$$

Отметим, что хотя $X_{12} = Y_{12} = 0$, производные по времени от этих величин в общем случае нулю не равны: совпадающие в момент времени t точки при движении звеньев механизма в момент времени $t + \Delta t$ при ($\Delta t \rightarrow 0$), расходятся из-за того, что $\dot{X}_{12} \neq 0$, $\dot{Y}_{12} \neq 0$.

В поступательной кинематической паре с прямолинейным направляющим звеном 1 (рис. 1.2) условием существования пары является условие параллельности вектора \vec{r}_{12} направляющему звену 1 (вектору \vec{r}_{AB}). Для параллельных векторов \vec{r}_{12} и \vec{r}_{AB} имеем

$$X_{12} \cdot Y_{A_1B_1} - Y_{12} \cdot X_{A_1B_1} = 0. \quad (1.13)$$

Уравнение (1.13) можно переписать, обозначая совпадающие точки (B_1 , B_2 или C_1 , C_2):

$$X_{B_1B_2} \cdot Y_{A_1B_1} - Y_{B_1B_2} \cdot X_{A_1B_1} = 0 \quad (1.14)$$

$$X_{C_1C_2} \cdot Y_{A_1B_1} - Y_{C_1C_2} \cdot X_{A_1B_1} = 0 \quad (1.15)$$

Продифференцировав уравнения (1.14) один раз и дважды по времени, получим для поступательной пары уравнения связи между проекциями скоростей и уравнения связи между проекциями ускорений точек B_1 , и B_2 :

$$\dot{X}_{B_1B_2} \cdot Y_{A_1B_1} - \dot{Y}_{B_1B_2} \cdot X_{A_1B_1} = 0 \quad (1.16)$$

$$\ddot{X}_{B_1B_2} \cdot Y_{A_1B_1} - \ddot{Y}_{B_1B_2} \cdot X_{A_1B_1} + 2 \cdot (\dot{X}_{B_1B_2} \cdot \dot{Y}_{A_1B_1} - \dot{Y}_{B_1B_2} \cdot \dot{X}_{A_1B_1}) = 0 \quad (1.17)$$

Элементы вращательных кинематических пар можно не различать, рассматривая пары как геометрические точки, принадлежащие одновременно каждому из двух звеньев, образующих эти кинематические пары. Так, для пары A (и точек A_1 , A_2 ее элемента), образованной звеньями 1 и 2, кинематические параметры

$$\begin{cases} X_{A_1} = X_{A_2} = X_A, \\ Y_{A_1} = Y_{A_2} = Y_A, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{X}_{A_1} = \dot{X}_{A_2} = \dot{X}_A, \\ \dot{Y}_{A_1} = \dot{Y}_{A_2} = \dot{Y}_A, \end{cases} \quad (1.18)$$

$$\begin{cases} \ddot{X}_{A_1} = \ddot{X}_{A_2} = \ddot{X}_A, \\ \ddot{Y}_{A_1} = \ddot{Y}_{A_2} = \ddot{Y}_A, \end{cases}$$

В ходе изложения дальнейшего материала придется ссылаться на уравнения (1.1) – (1.18) касаясь звеньев и кинематических пар, имеющих названия точек и номера звеньев, отличные от названий и номеров, записанных в (1.1) – (1.18). Тогда, считая индексы уравнений (1.1) – (1.18) формальными, в каждом конкретном случае будем использовать эти уравнения, заменяя формальные индексы конкретными. Структура соответственного уравнения при этом не изменяется при ссылке и порядковый номер уравнения.

1.4. Последовательность кинематического анализа структурных групп плоских рычажных механизмов

Кинематические параметры произвольной точки плоского механизма, имеющего две степени свободы, можно определить, решая совместно два уравнения, определяющих связи, налагаемые на эту точку звеньями и кинематическими парами, которым она принадлежит.

Среди множества точек механизма необходимо различать точки, принадлежащие тому или иному звену, а также геометрические точки, определяющие в рассматриваемый момент времени, положение так называемых совпадающих точек. Последние в ходе решения первой задачи кинематического анализа всегда можно рассматривать как точки, принадлежащие одновременно двум (иногда и большему числу) звеньев. Решая вторую и третью задачи анализа, обязательно следует различать совпадающие точки поступательных кинематических пар, называя в записях названий точек номера звеньев, которым эти точки принадлежат (т. е. A_1 , A_2 и т. д.).

Из курса теоретической механики известно, что положение твердого тела на плоскости однозначно определяется координатами трех точек этого тела. Тогда при заданных координатах двух точек звена и заданному взаимному положению точек, в зависимости от конкретной постановки задачи, определение координат третьей точки этого звена связано с необходимостью совместного решения системы двух уравнений: квадратных (1.1), тригонометрических (1.5) или системы, включающие одно квадратное и одно тригонометрическое уравнение.

Единого общего метода решения трех упомянутых систем нелинейных уравнений не существует. Решения каждой отдельной из этих систем представлено далее, когда описывается кинематический анализ структурных единиц плоских рычажных механизмов.

Решение второй и третьей задач кинематического анализа связано с необходимостью решения системы двух линейных уравнений, построенных соответственно из уравнений (1.3), (1.6) и (1.4), (1.7).

На точки, принадлежащие элементам кинематических пар, связи налагают и звенья, и кинематические пары, которым эти точки принадлежат. Поскольку кинематические пары налагают ограничения на соответствующие перемещения звеньев, уравнения связей, описывающие эти ограничения, можно использовать только в ходе решения второй и третьей задач кинематического анализа. Решая первую задачу, которая определяет абсолютные координаты точек механизма, используют только уравнения связей, налагаемых на эти точки звеньями механизма. Это положение определяет последовательность кинематического анализа структурных групп.

Структурные группы плоских механизмов состоят из двух звеньев, входящих в одну внутреннюю и две крайних кинематические пары 5-го класса. Все кинематические параметры крайних пар, которыми группа присоединяется к механизму в процессе его образования, заданы. Единой точкой, связанной звеньями группы одновременно с обоими крайними парами, является точка элемента внутренней кинематической пары. Только для нее можно записать и решить систему двух уравнений с двумя неизвестными. Каждое из уравнений этой системы, в зависимости от конкретной постановки задачи, может быть подобным выражению или (1.1), или (1.5).

Рассматривая кинематическую пару как точку, говорят, что кинематический анализ структурных групп плоских механизмов начинают с определения параметров внутренних кинематических пар. После определения параметров внутренней кинематической пары, можно найти параметры произвольной точки каждого из звеньев структурной группы, имеющие на этом этапе расчета по две точки с численно заданными параметрами.

Определение проекций скоростей внутренних кинематических пар группы связано с решением системы двух линейных алгебраических уравнений, составленных из уравнений (1.2) и (1.16), которые всегда можно привести к виду

$$\begin{cases} a_1\dot{X} + b_1\dot{Y} = c_1 \\ a_2\dot{X} + b_2\dot{Y} = c_2 \end{cases} \quad (1.19)$$

где $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ — коэффициенты, заданы численно в рассматриваемый момент времени, однако в общем случае они являются функциями времени;

\dot{X}, \dot{Y} — искомые проекции скорости исследуемой точки.

Общим методом решения систем линейных алгебраических уравнений второго порядка (1.19) выбран метод Крамера. Тогда

$$\begin{cases} \dot{X} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ \dot{Y} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{cases} \quad (1.20)$$

Проекции ускорений внутренних кинематических пар группы определяют аналогично, решая совместно систему двух линейных алгебраических уравнений, составленных из уравнений (1.4) и (1.17).

Примеры анализа структурных единиц плоских рычажных механизмов приведены в следующем разделе.

2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТРУКТУРНЫХ ЕДИНИЦ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ 2-го КЛАССА И АНАЛИЗ ЭТИХ МЕХАНИЗМОВ В ЦЕЛОМ

1.5. Кинематический анализ групп Ассура 1-го класса

По классификации Артоболевского [1] структурными единицами плоских рычажных механизмов 2-го класса являются механизмы 1-го класса и так называемые двухповодковые группы (группы Ассура).

Механизмом 1-го класса называют звено и стойку, входящих во вращательную или поступательную пару 5 класса. Степень подвижности такого механизма равен $W = 1$ и определяется заданным законом движения $\dot{\varphi} = f(t)$ ведущего звена.

Двухповодковые группы состоят из двух звеньев, входящих в одну внутреннюю и две крайние пары 5-го класса. В зависимости от количества и взаимного расположения вращательных и поступательных пар в составе группы, их делят на пять видов, рассматриваемых далее.

Кинематический анализ плоских механизмов выполняют начиная с механизма 1-го класса по группам Ассура в порядке их присоединения к этому механизму.

Первые этапы решения какой-либо задачи на ЭВМ следующие: постановка задачи, построение математической модели, создание вычислительного алгоритма. Именно в такой последовательности изложен кинематический анализ рассматриваемых далее структурных единиц плоских механизмов и самих механизмов в целом.

Постановка задачи предусматривает задание граничных и начальных условий рассматриваемого объекта, известных его геометрических и кинематических характеристик (параметров). Указывают искомые величины.

Математическое описание задачи (ее математическая модель) устанавливает связь между искомыми и заданными постановкой задачи кинематическими параметрами. Математическую модель записывают с учетом объективных свойств рассматриваемой структурной единицы.

Вычислительный алгоритм — это последовательность математи-

ческих зависимостей (формул), полученных из уравнений математической модели после разрешения этих уравнений относительно искомых параметров. Численная реализация алгоритма предусматривает использование всех величин, заданных постановкой задачи.

1.5.1. Механизм 1-го класса с вращательной кинематической парой

Постановка задачи (рис. 2.1)

Дано: $X_0, Y_0, \ell_{AO} = \ell_1, \varphi_1 = \omega_1 t, \dot{X}_0 = \dot{Y}_0, \ddot{X}_0 = \ddot{Y}_0, \omega_1 = const$

Определить: $X_A, Y_A, \dot{X}_A, \dot{Y}_A, \ddot{X}_A, \ddot{Y}_A$

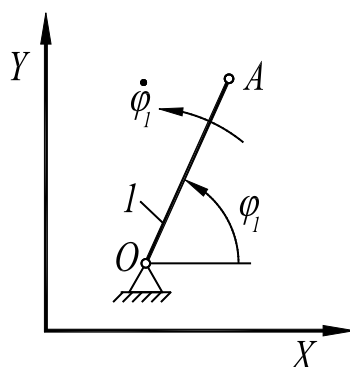


Рисунок 2.1 — Механизм 1-го класса с вращательной кинематической парой

Математическая модель

Математическая модель определения кинематических параметров точки A кривошипа 1 учитывает закон движения этого звена и условие неизменности длины ℓ_{AO} , т. е.

$$\begin{cases} \varphi_1 = \omega_1 t \\ X_{AO}^2 + Y_{AO}^2 = \ell_{AO}^2 \end{cases} \quad (2.1)$$

Вычислительный алгоритм

Учитывая, что φ_1, ℓ_1 являются полярными координатами звена 1, декартовы координаты этого звена определим из уравнений связи между полярными и прямоугольными координатами:

$$\begin{cases} X_{AO} = \ell_1 \cos \varphi_1 \\ Y_{AO} = \ell_1 \sin \varphi_1 \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} X_A = X_0 + l_1 \cos \varphi_1 \\ Y_A = Y_0 + l_1 \sin \varphi_1 \end{cases} \quad (2.3)$$

Продифференцировав систему (2.3) один раз и дважды по времени с учетом условий, заданных постановкой задачи $\dot{\varphi}_1 = const$, получим соответственно алгоритм определения проекций скорости и алгоритм определения проекций ускорения точки A :

$$\begin{cases} \dot{X}_A = -\omega_1 l_1 \sin \varphi_1 \\ \dot{Y}_A = \omega_1 l_1 \cos \varphi_1 \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} \ddot{X}_A = -\omega_1^2 l_1 \cos \varphi_1 \\ \ddot{Y}_A = -\omega_1^2 l_1 \sin \varphi_1 \end{cases} \quad (2.5)$$

1.5.2. Механизм 1-го класса с поступательной кинематической парой

Механизм 1-го класса с поступательной кинематической парой на практике встречается крайне редко, представляет самостоятельный интерес, а также может использоваться при кинематическом исследовании механизмов 3-го класса, которые формально могут рассматриваться как механизмы 2-го класса.

Постановка задачи (рис. 2.2)

Дано: $X_0, Y_0, \dot{X}_0 = 0, \dot{Y}_0 = 0, \ddot{X}_0 = \ddot{Y}_0 = 0, \varphi_0 = const, S_A = f(t)$

Определить: $X_A, Y_A, \dot{X}_A, \dot{Y}_A, \ddot{X}_A, \ddot{Y}_A$

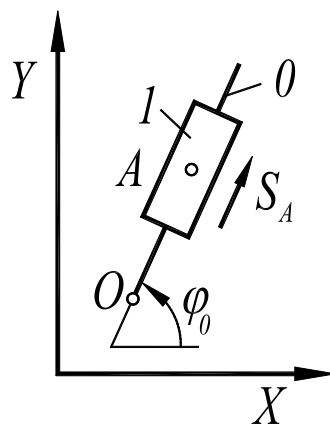


Рисунок 2.2 — Механизм 1-го класса с поступательной кинематической парой

Математическая модель

Математическое описание условий движения точки A , принадлежащей ползуну 1, содержит закон движения этого звена по траектории и уравнение, определяющее положение направляющего звена 0 на плоскости

$$\begin{cases} S_1 = f(t) \\ \frac{Y_{OA}}{X_{OA}} = \operatorname{tg} \varphi_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Вычислительный алгоритм

Решение системы уравнений (2.6) относительно декартовых координат точки A являются уравнения связи между полярными и прямоугольными координатами:

$$\begin{cases} X_A = X_0 + S_1 \cdot \cos \varphi_0 \\ Y_A = Y_0 + S_1 \cdot \sin \varphi_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Продифференцировав систему (2.7) один раз и дважды по времени и учитывая, что точка O неподвижна, получим

$$\begin{cases} \dot{X}_A = -\dot{S}_1 \cdot \sin \varphi_0 \\ \dot{Y}_A = \dot{S}_1 \cdot \cos \varphi_0 \end{cases} ; \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \ddot{X}_A = -\ddot{S}_1 \cdot \cos \varphi_0 \\ \ddot{Y}_A = -\ddot{S}_1 \cdot \sin \varphi_0 \end{cases} \quad (2.8)$$

1.6. Кинематический анализ групп Ассур 2-го класса

Структурные группы с нулевой степенью подвижности — группы Ассур — кинематически определяемы. Это значит, что, зная параметры элементов крайних кинематических пар, которые всегда заранее известны, можно определить параметры любой точки группы.

Кинематический анализ группы 2-го класса начинают с точки, параметры которой можно выразить через соответствующие параметры обеих крайних пар. Такой точкой является внутренняя кинематическая пара группы.

1.6.1. Группа 1-го вида

Постановка задачи (рис. 2.3)

Дано: $X_A, Y_A, \dot{X}_A, \dot{Y}_A, \ddot{X}_A, \ddot{Y}_A, X_C, Y_C, \dot{X}_C, \dot{Y}_C, \ddot{X}_C, \ddot{Y}_C, \ell_1 = \ell_{AB}, \ell_2 = \ell_{BC}, \delta = \pm 1$

Определить: $X_B, Y_B, \dot{X}_B, \dot{Y}_B, \ddot{X}_B, \ddot{Y}_B$

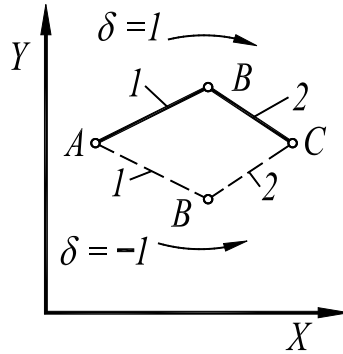


Рисунок 2.3 — Группа 2-го класса 1-го вида

Математическая модель

Абсолютно жесткие звенья 1 и 2 связывают координаты внутренней пары B с координатами элементов крайних пар A и C условиями (1.1). Тогда

$$\begin{cases} X_{BA}^2 + Y_{BA}^2 = \ell_{BA}^2 \\ X_{BC}^2 + Y_{BC}^2 = \ell_{BC}^2 \end{cases} \quad (2.10)$$

Система нелинейных алгебраических уравнений (2.10) и является математической моделью исследуемого объекта.

Вычислительный алгоритм

Решение системы (2.10) относительно параметров X_B, Y_B , которые требуется определить, представляет собой алгоритм поиска координат точки B :

$$\begin{cases} X_B = X_A + \frac{1}{M^2} \cdot (k \cdot X_{CA} - \delta \cdot L \cdot Y_{CA}) \\ Y_B = Y_A + \frac{1}{M^2} \cdot (k \cdot Y_{CA} + \delta \cdot L \cdot X_{CA}) \end{cases}, \quad (2.11)$$

где $M^2 = X_{CA}^2 + Y_{CA}^2$; $k = 0,5 \cdot (\ell_1^2 + M^2 - \ell_2^2)$; $L = \sqrt{\ell_1^2 M^2 - k^2}$;

$\delta = \pm 1$ — коэффициент схемы сборки группы.

Коэффициент схемы сборки группы $\delta = 1$, если последовательный обход точек A , B , C происходит по направлению движения часовой стрелки (рис. 2.3). В противном случае $\delta = -1$.

Проекция скорости точки B можно определить из уравнений, получаемых после дифференцирования по времени системы уравнений (2.10):

$$\dot{X}_{BA}X_{BA} + \dot{Y}_{BA}Y_{BA} = 0; \quad \dot{X}_{BC}X_{BC} + \dot{Y}_{BC}Y_{BC} = 0 \quad (2.12)$$

Решение системы (2.12) относительно проекций скорости точки B способом Крамера имеет вид

$$\begin{cases} \dot{X}_B = \frac{A_1 Y_{BC} - A_2 Y_{BA}}{X_{BA} Y_{BC} - X_{BC} Y_{BA}} \\ \dot{Y}_B = \frac{A_2 X_{BA} - A_1 X_{BC}}{X_{BA} Y_{BC} - X_{BC} Y_{BA}}, \end{cases} \quad (2.13)$$

где $A_1 = \dot{X}_A X_{BA} + \dot{Y}_A Y_{BA}$; $A_2 = \dot{X}_C X_{BC} + \dot{Y}_C Y_{BC}$.

Для определения проекций ускорения точки B , продифференцируем систему (2.12) по времени:

$$\begin{cases} \ddot{X}_{BA}X_{BA} + \ddot{Y}_{BA}Y_{BA} + \dot{X}_{BA}^2 + \dot{Y}_{BA}^2 = 0 \\ \ddot{X}_{BC}X_{BC} + \ddot{Y}_{BC}Y_{BC} + \dot{X}_{BC}^2 + \dot{Y}_{BC}^2 = 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

и разрешим полученную систему уравнений (2.14) относительно искомых величин. Тогда

$$\begin{cases} \ddot{X}_B = \frac{B_1 Y_{BC} - B_2 Y_{BA}}{X_{BA} Y_{BC} - X_{BC} Y_{BA}} \\ \ddot{Y}_B = \frac{B_2 X_{BA} - B_1 X_{BC}}{X_{BA} Y_{BC} - X_{BC} Y_{BA}}, \end{cases} \quad (2.15)$$

где $B_1 = \ddot{X}_A X_{BA} + \ddot{Y}_A Y_{BA} - \dot{X}_{BA}^2 - \dot{Y}_{BA}^2$; $B_2 = \ddot{X}_C X_{BC} + \ddot{Y}_C Y_{BC} - \dot{X}_{BC}^2 - \dot{Y}_{BC}^2$

Полный вычислительный алгоритм определения кинематических параметров точки B включает системы уравнений (2.11), (2.13), (2.15), разрешаемых в указанной последовательности с учетом величин, заданных постановкой задачи.

1.6.2. Группа 2-го вида

Постановка задачи (рис. 2.4.)

Дано: $X_A, Y_A, \dot{X}_A, \dot{Y}_A, \ddot{X}_A, \ddot{Y}_A, X_C, Y_C, \dot{X}_C, \dot{Y}_C, \ddot{X}_C, \ddot{Y}_C, \ell_1 = \ell_{AB}, \varphi_3, \dot{\varphi}_3, \ddot{\varphi}_3, \delta = \pm 1$

Определить: $X_B, Y_B, \dot{X}_B, \dot{Y}_B, \ddot{X}_B, \ddot{Y}_B$

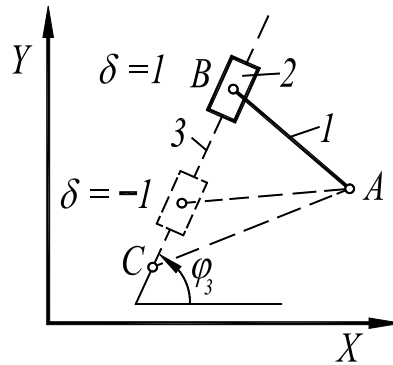


Рисунок 2.4 — Группа 2-го класса 2-го вида

Математическая модель

Уравнения математической модели кинематического анализа группы 2-го вида содержат условия неизменности расстояния между точками A и B жесткого звена 1 (рис. 2.4) и условия параллельности вектора относительного перемещения звеньев (\vec{r}_{23}) направляющему звену 3:

$$\begin{cases} X_{BA}^2 + Y_{BA}^2 = \ell_{BA}^2 \\ \frac{Y_{B_2B_3}}{X_{B_2B_3}} = \operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{Y_{B_3C_3}}{X_{B_3C_3}}. \end{cases} \quad (2.16)$$

Второе уравнение системы (2.16) можно преобразовать, исключив из этой записи $\operatorname{tg} \varphi_3$ как условие параллельности векторов $\vec{r}_{13}, \vec{r}_{AB}$, эта запись будет использована при определении проекций скорости и проекций ускорения точки B_2 . На этапе определения координат точек группы можно использовать только условия связей, налагаемых на эти точки звеньями группы, а не парами. Поэтому запишем систему (2.16) в виде

$$\begin{cases} X_{BA}^2 + Y_{BA}^2 = \ell_{BA}^2 \\ \frac{Y_{BC}}{X_{BC}} = \operatorname{tg} \varphi_3 \end{cases} \quad (2.17)$$

Вычислительный алгоритм

С учетом условий указанной постановки задачи решение системы (2.17) относительно координат точки B имеет вид

$$\begin{cases} X_B = X_C + \ell_{BC} \cos \varphi_3 \\ Y_B = Y_C + \ell_{BC} \sin \varphi_3 \end{cases}, \quad (2.18)$$

где

$$\ell_{BC} = \ell_{AC} \cos(\varphi_3 - \alpha) + \delta \sqrt{\ell_1^2 - \ell_{AC}^2 \sin^2(\varphi_3 - \alpha)}; \ell_{AC} = \sqrt{X_{AC}^2 + Y_{AC}^2};$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{Y_{AC}}{X_{AC}} \text{ при } X_{AC} \geq 0; \alpha = \pi + \operatorname{arctg} \frac{Y_{AC}}{X_{AC}} \text{ при } X_{AC} < 0, \text{ коэф-}$$

фициент схемы сборки группы $\delta = 1$, если $\angle CBA \leq 90^\circ$, в противном случае $\delta = -1$ (рис. 2.4).

Для определения проекции скорости и проекции ускорения точки B_2 , необходимо знать проекции скорости и проекции ускорения сопряженной с нею точки B_3 направляющего звена 3. Для точки B_3 проекции скорости определяются из уравнений (1.10), а проекции ускорений — из уравнений (1.11). Тогда

$$\begin{cases} \dot{X}_{B_3} = \dot{X}_C - \dot{\varphi}_3 \cdot Y_{BC} \\ \dot{Y}_{B_3} = \dot{Y}_C + \dot{\varphi}_3 \cdot X_{BC} \end{cases},$$

$$\begin{cases} \ddot{X}_{B_3} = \ddot{X}_C - \ddot{\varphi}_3 \cdot Y_{BC} - \dot{\varphi}_3^2 \cdot X_{BC} \\ \ddot{Y}_{B_3} = \ddot{Y}_C + \ddot{\varphi}_3 \cdot X_{BC} - \dot{\varphi}_3^2 \cdot Y_{BC} \end{cases}.$$

Продифференцировав систему уравнений (2.16) по времени, определим проекции скорости B_2 :

$$\begin{cases} \dot{X}_{B_2A} X_{BA} + \dot{Y}_{B_2A} Y_{BA} = 0 \\ \dot{X}_{B_2B_3} Y_{BC} - \dot{Y}_{B_2B_3} X_{BC} = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Отметим, что в записи уравнений связей, налагаемых жестким звеном на проекции скорости или проекции ускорения точки, которая является одной из сопряженных точек поступательной пары, необходимо обязательно указать номер звена, которому эта точка принадлежит. Указывать в этом уравнении индекс звена другой точки, принадлежащей вращательной паре, не обязательно.

В уравнениях связей, налагаемых жестким звеном на координаты точек, даже если они являются одной из сопряженных точек поступательной кинематической пары, указывать индекс не обязательно. Решение системы уравнений (2.19) относительно проекций скорости точки B_2 имеет вид

$$\begin{cases} \dot{X}_{B_2} = \frac{A_1 X_{BC} + A_2 Y_{BA}}{X_{BA} X_{BC} + Y_{BA} Y_{BC}} \\ \dot{Y}_{B_2} = \frac{A_1 Y_{BC} - A_2 X_{BA}}{X_{BA} X_{BC} + Y_{BA} Y_{BC}}, \end{cases} \quad (2.20)$$

где $A_1 = \dot{X}_{A_2} X_{BA} + \dot{Y}_{A_2} Y_{BA}$; $A_2 = \dot{X}_{B_3} Y_{BC} - \dot{Y}_{B_3} X_{BC}$.

Продифференцировав систему (2.16) дважды по времени, получим

$$\begin{cases} \ddot{X}_{B_2 A_1} X_{BA} + \ddot{Y}_{B_2 A_1} Y_{BA} + \dot{X}_{B_2 A_1}^2 + \dot{Y}_{B_2 A_1}^2 = 0 \\ \ddot{X}_{B_2 B_3} Y_{BC} - \ddot{Y}_{B_2 B_3} X_{BC} + 2 \cdot (\dot{X}_{B_2 B_3} \dot{Y}_{B_3 C_3} - \dot{Y}_{B_2 B_3} \dot{X}_{B_3 C_3}) = 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

Проекции ускорения точки B_2 , полученные в ходе совместного решения системы (2.21), такие:

$$\begin{cases} \ddot{X}_{B_2} = \frac{B_1 X_{BC} + B_2 Y_{BA}}{X_{BA} X_{BC} + Y_{BA} Y_{BC}} \\ \ddot{Y}_{B_2} = \frac{B_1 Y_{BC} - B_2 X_{BA}}{X_{BA} X_{BC} + Y_{BA} Y_{BC}}, \end{cases} \quad (2.22)$$

где $B_1 = \ddot{X}_{A_2} X_{BA} + \ddot{Y}_{A_2} Y_{BA} - \dot{X}_{B_2 A_1}^2 - \dot{Y}_{B_2 A_1}^2$;

$B_2 = \ddot{X}_{B_3} Y_{BC} - \ddot{Y}_{B_3} X_{BC} - 2 \cdot (\dot{X}_{B_2 B_3} \dot{Y}_{B_3 C_3} - \dot{Y}_{B_2 B_3} \dot{X}_{B_3 C_3})$.

Таким образом, полный алгоритм определения параметров внутренней кинематической пары группы Ассур 2-го класса 2-го типа содержит решения (2.18), (1.10), (1.11), (2.20), (2.22).

Если частной постановкой задачи заданы параметры точки B_1 — $X_B, Y_B, \dot{X}_{B_2}, \dot{Y}_{B_2}, \ddot{X}_{B_2}, \ddot{Y}_{B_2}$, — то алгоритм определения параметров точки B_2 будет включать лишь системы уравнений (2.20) и (2.22).

Вычислительный алгоритм определения кинематических параметров внутренней пары групп 2-го класса 2-го вида с вертикальным или горизонтальным направляющим звеном имеет существенно более простой вид. Рассмотрим один из таких случаев.

1.6.3. Группа 2-го вида с неподвижным горизонтальным направляющим звеном

Постановка задачи (рис. 2.5)

Дано: $X_A, Y_A, \dot{X}_A, \dot{Y}_A, \ddot{X}_A, \ddot{Y}_A, Y_B = a, \ell_1 = \ell_{AB}, \delta = \pm 1, \dot{Y}_{B_2} = 0,$
 $\ddot{Y}_{B_2} = 0$

Определить: $X_B, \dot{X}_{B_2}, \ddot{X}_{B_2}$

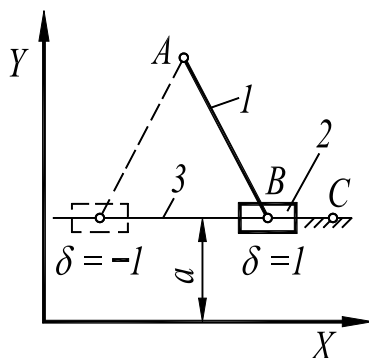


Рисунок 2.5 — Группа 2-го класса 2-го вида с горизонтальным направляющим звеном

Математическая модель

С учетом конкретной постановки задачи $Y_{B_2} = Y_{B_3} = Y_{C_3} = a$ система ограничений (2.16), (2.17) принимает вид:

$$\begin{cases} X_{BA}^2 + Y_{BA}^2 = \ell_{BA}^2 \\ Y_B = a \quad (const) \end{cases} \quad (2.23)$$

Вычислительный алгоритм

Алгоритм определения кинематических параметров точки B_2 имеет вид

$$\begin{cases} X_B = X_A + \delta \sqrt{\ell_{BA}^2 - (a - Y_A)^2}; \\ Y_B = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\begin{cases} \dot{X}_{B_2} = \dot{X}_{A_1} + \dot{Y}_{A_1} \cdot \frac{Y_{BA}}{X_{BA}}; \\ \dot{Y}_{B_2} = 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\begin{cases} \ddot{X}_{B_2} = \ddot{X}_{A_1} + \ddot{Y}_{A_1} \frac{Y_{BA}}{X_{BA}} - \frac{\dot{X}_{B_2 A_1}^2 + \dot{Y}_{B_2 A_1}^2}{X_{BA}}; \\ \ddot{Y}_{B_2} = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

Решения (2.24–2.26) найдены из уравнений математической модели (2.23) соответственно без их дифференцирования и после дифференцирования один раз и дважды по времени.

1.6.4. Группа 2-го вида с неподвижным вертикальным направляющим звеном

Постановка задачи (рис. 2.6)

Дано: $X_A, Y_A, \dot{X}_{A_1}, \dot{Y}_{A_1}, \ddot{X}_{A_1}, \ddot{Y}_{A_1}, \delta = \pm 1, \dot{X}_{B_2} = 0, \ddot{X}_{B_2} = 0, X_B = a,$
 $\ell_1 = \ell_{AB}$

Определить: $Y_B, \dot{Y}_{B_2}, \ddot{Y}_{B_2}$

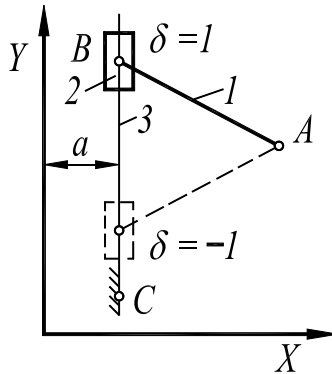


Рисунок 2.6 — Группа 2-го класса 2-го вида с неподвижным вертикальным направляющим звеном

Математическая модель

С учетом постановки задачи $X_{B_2} = X_{B_3} = X_{C_3} = a$ система ограничений (2.16), (2.17) примет вид:

$$\begin{cases} X_{BA}^2 + Y_{BA}^2 = \ell_{BA}^2 \\ X_B = a \quad (const) \end{cases} \quad (2.27)$$

Вычислительный алгоритм

Алгоритм определения кинематических параметров точки B_2 имеет вид

$$\begin{cases} X_B = 0 \\ Y_B = Y_A + \delta \sqrt{\ell_{BA}^2 - (a - X_A)^2} \end{cases} \quad (2.28)$$

$$\begin{cases} \dot{X}_{B_2} = 0 \\ \dot{Y}_{B_2} = \dot{Y}_{A_1} + \dot{X}_{A_1} \cdot \frac{X_{BA}}{Y_{BA}} \end{cases} \quad (2.29)$$

$$\begin{cases} \ddot{X}_{B_2} = 0 \\ \ddot{Y}_{B_2} = \ddot{Y}_{A_1} + \ddot{X}_{A_1} \cdot \frac{X_{BA}}{Y_{BA}} - \frac{\dot{X}_{B_2 A_1}^2 + \dot{Y}_{B_2 A_1}^2}{Y_{BA}} \end{cases} \quad (2.30)$$

Решения (2.28–2.30) найдем из уравнений математической модели (2.23) соответственно без их дифференцирования и после дифференцирования один раз и дважды по времени.

1.6.5. Группа 3-го вида

Постановка задачи (рис. 2.7)

Дано: $X_A, Y_A, \dot{X}_{A_1}, \dot{Y}_{A_1}, \ddot{X}_{A_1}, \ddot{Y}_{A_1}, X_B, Y_B, \dot{X}_{B_2}, \dot{Y}_{B_2}, \ddot{X}_{B_2}, \ddot{Y}_{B_2}$

Определить: $\dot{X}_{A_2}, \dot{Y}_{A_2}, \ddot{X}_{A_2}, \ddot{Y}_{A_2}$

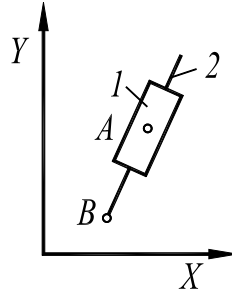


Рисунок 2.7 — Группа 2-го класса 3-го вида

Математическая модель

Уравнения связей, налагаемых на точку A_2 жестким звеном 2 и поступательной парой, имеют вид:

$$\begin{cases} X_{BA}^2 + Y_{BA}^2 = \ell_{BA}^2 \\ X_{A_2A_1} \cdot Y_{AB} - Y_{A_2A_1} \cdot X_{AB} = 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

Вычислительный алгоритм

Продифференцировав систему (2.31) по времени, получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \dot{X}_{A_2B_2} \cdot X_{AB} + \dot{Y}_{A_2B_2} \cdot Y_{AB} = 0 \\ \dot{X}_{A_2A_1} \cdot Y_{AB} - \dot{Y}_{A_2A_1} \cdot X_{AB} = 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

решение которой относительно проекций скорости точки A_2 имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{X}_{A_2} = \frac{A_1 \cdot X_{AB} + A_2 \cdot Y_{AB}}{X_{AB}^2 + Y_{AB}^2} \\ \dot{Y}_{A_2} = \frac{A_1 \cdot Y_{AB} - A_2 \cdot X_{AB}}{X_{AB}^2 + Y_{AB}^2} \end{cases} \quad (2.33)$$

где $A_1 = \dot{X}_{B_2} X_{AB} + \dot{Y}_{B_2} Y_{AB}$; $A_2 = \dot{X}_{A_1} Y_{AB} - \dot{Y}_{A_1} X_{AB}$.

Продифференцировав систему (2.31) по времени дважды, получим:

$$\begin{cases} \ddot{X}_{A_2B_2} X_{AB} + \ddot{Y}_{A_2B_2} Y_{AB} + \dot{X}_{A_2B_2}^2 + \dot{Y}_{A_2B_2}^2 = 0 \\ \ddot{X}_{A_2A_1} Y_{AB} - \ddot{Y}_{A_2A_1} X_{AB} + 2 \cdot (\dot{X}_{A_2A_1} \dot{Y}_{A_2B_2} - \dot{Y}_{A_2A_1} \dot{X}_{A_2B_2}) = 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

Проекции ускорения точки A_2 находим разрешая совместно систему уравнений (2.34):

$$\begin{cases} \ddot{X}_{A_2} = \frac{B_1 X_{AB} + B_2 Y_{AB}}{X_{AB}^2 + Y_{AB}^2} \\ \ddot{Y}_{A_2} = \frac{B_1 Y_{AB} - B_2 X_{AB}}{X_{AB}^2 + Y_{AB}^2}, \end{cases} \quad (2.35)$$

где $B_1 = \ddot{X}_{B_2} X_{AB} + \ddot{Y}_{B_2} Y_{AB} - \dot{X}_{A_2 B_2}^2 - \dot{Y}_{A_2 B_2}^2$;

$$B_2 = \ddot{X}_{A_1} Y_{AB} - \ddot{Y}_{A_1} X_{AB} + 2 \cdot (\dot{X}_{A_2 A_1} \dot{Y}_{A_2 B_2} - \dot{Y}_{A_2 A_1} \dot{X}_{A_2 B_2}).$$

Решения (2.33), (2.35) — это алгоритм определения проекций скорости и проекций ускорения элемента (точки A_2) внутренней кинематической пары группы Ассура 2-го класса 3-го вида. Координаты точки A_2 , смежной с точкой A_1 , равны координатам геометрической точки A , заданным постановкой задачи.

1.6.6. Группа 4-го вида

Постановка задачи (рис. 2.8)

Дано: $X_A, Y_A, \dot{X}_{A_1}, \dot{Y}_{A_1}, \ddot{X}_{A_1}, \ddot{Y}_{A_1}, X_C, Y_C, \dot{X}_{C_4}, \dot{Y}_{C_4}, \ddot{X}_{C_4}, \ddot{Y}_{C_4}$

$\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_1, \varphi_4, \dot{\varphi}_4, \ddot{\varphi}_4$

Определить: $X_B, Y_B, \dot{X}_{B_3}, \dot{Y}_{B_3}, \ddot{X}_{B_3}, \ddot{Y}_{B_3}$

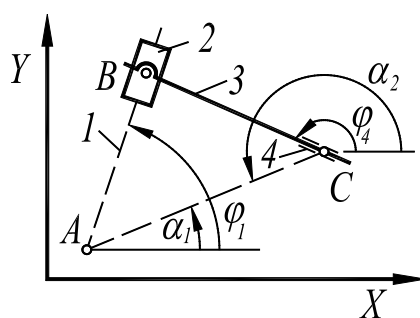


Рисунок 2.8 — Группа 2-го класса 4-го вида

Математическая модель

Уравнения связей между параметрами точки $B_2(B_3)$, которая принадлежит внутренней вращательной паре группы, и точками B_1 и

B_4 , которые геометрически совпадают с точкой B_2 , однако принадлежат соответственно звеньям 1 и 4, являются скалярными записями условий параллельности векторов относительного перемещения звеньев \vec{r}_{21} , \vec{r}_{24} соответствующим направляющим звеньям \vec{r}_{AB} , \vec{r}_{BC} т. е.:

$$\begin{cases} X_{B_2B_1} Y_{BA} - Y_{A_2A_1} X_{BA} = 0 \\ X_{B_2B_4} Y_{BC} - Y_{B_2B_4} X_{BC} = 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

Как отмечалось, уравнения связей, налагаемых кинематическими парами на элементы этих пар, можно использовать для определения координат смежных точек. Поэтому искомые координаты внутренней пары B_2 определяем из уравнений связей (1.5), налагаемых на геометрическую точку B направляющими звеньями 1 и 4 крайних пар группы:

$$\begin{cases} \frac{Y_{BA}}{X_{BA}} = \operatorname{tg} \varphi_1 \\ \frac{Y_{BC}}{X_{BC}} = \operatorname{tg} \varphi_4. \end{cases} \quad (2.37)$$

Вычислительный алгоритм

Решение системы (2.37) относительно координат точки B имеет вид:

$$\begin{cases} X_B = X_A + l_{AC} \cos \varphi_1 \\ Y_B = Y_A + l_{AC} \sin \varphi_1, \end{cases} \quad (2.38)$$

$$\text{где } l_{AC} = \sqrt{X_{CA}^2 + Y_{CA}^2} \frac{\sin(\alpha_2 - \varphi_4)}{\cos(\varphi_4 - \varphi_1)}; \quad \alpha_2 = \pi + \operatorname{arctg} \frac{Y_{CA}}{X_{CA}}.$$

Проекции скорости и проекции ускорений точек B_1 и B_4 определяют из уравнений (1.10), (1.11). Тогда

$$\begin{cases} \dot{X}_{B_1} = \dot{X}_{A_1} - \dot{\varphi}_1 \cdot Y_{BA}, \\ \dot{Y}_{B_1} = \dot{Y}_{A_1} + \dot{\varphi}_1 \cdot X_{BA}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{X}_{B_1} = \ddot{X}_{A_1} - \ddot{\varphi}_1 \cdot Y_{BA} - \dot{\varphi}_1^2 \cdot X_{BA}, \\ \ddot{Y}_{B_1} = \ddot{Y}_{A_1} + \ddot{\varphi}_1 \cdot X_{BA} - \dot{\varphi}_1^2 \cdot Y_{BA}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{X}_{B_4} = \dot{X}_{C_4} - \dot{\varphi}_4 \cdot Y_{BC} \\ \dot{Y}_{B_4} = \dot{Y}_{C_4} + \dot{\varphi}_4 \cdot X_{BC} \end{cases},$$

$$\begin{cases} \ddot{X}_{B_4} = \ddot{X}_{C_4} - \ddot{\varphi}_4 \cdot Y_{BC} - \dot{\varphi}_4^2 \cdot X_{BC} \\ \ddot{Y}_{B_4} = \ddot{Y}_{C_4} + \ddot{\varphi}_4 \cdot X_{BC} - \dot{\varphi}_4^2 \cdot Y_{BC} \end{cases}.$$

Проекции скорости точки B_2 определим из уравнений, полученных после дифференцирования по времени системы уравнений (2.36):

$$\begin{cases} \dot{X}_{B_2B_1} \cdot Y_{BA} - \dot{Y}_{B_2B_1} \cdot X_{BA} = 0 \\ \dot{X}_{B_4B_2} \cdot Y_{BC} - \dot{Y}_{B_4B_2} \cdot X_{BC} = 0 \end{cases}. \quad (2.39)$$

Решение системы (2.39) относительно искомых параметров имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{X}_{B_2} = \frac{A_1 X_{BC} - A_2 Y_{BA}}{Y_{BA} \cdot X_{BC} - X_{BA} \cdot Y_{BC}} \\ \dot{Y}_{B_2} = \frac{A_1 Y_{BC} - A_2 X_{BA}}{Y_{BA} \cdot X_{BC} - X_{BA} \cdot Y_{BC}}, \end{cases} \quad (2.40)$$

где $A_1 = \dot{X}_{B_1} Y_{BA} - \dot{Y}_{B_1} X_{BA}$; $A_2 = \dot{X}_{B_4} Y_{BC} - \dot{Y}_{B_4} X_{BC}$.

Продифференцировав систему (2.36) по времени дважды, получим:

$$\begin{cases} \ddot{X}_{B_2B_1} \cdot Y_{AB} - \ddot{Y}_{B_2B_1} \cdot X_{AB} + 2 \cdot (\dot{X}_{B_2B_1} \cdot \dot{Y}_{B_1A_1} - \dot{Y}_{B_2B_1} \cdot \dot{X}_{B_1A_1}) = 0 \\ \ddot{X}_{B_2B_4} \cdot Y_{BC} - \ddot{Y}_{B_2B_4} \cdot X_{BC} + 2 \cdot (\dot{X}_{B_2B_4} \cdot \dot{Y}_{B_4C_4} - \dot{Y}_{B_2B_4} \cdot \dot{X}_{B_4C_4}) = 0. \end{cases} \quad (2.41)$$

Решение системы (2.41) относительно проекций ускорений точки B_2 имеет вид:

$$\begin{cases} \ddot{X}_{B_2} = \frac{B_1 X_{BC} - B_2 X_{BA}}{Y_{BA} X_{BC} - X_{BA} Y_{BC}}; \\ \ddot{Y}_{B_2} = \frac{B_1 Y_{BC} - B_2 Y_{BA}}{Y_{BA} X_{BC} - X_{BA} Y_{BC}}, \end{cases} \quad (2.42)$$

где $B_1 = \ddot{X}_{B_1} Y_{BA} - \ddot{Y}_{B_1} X_{BA} - 2 \cdot (\dot{X}_{B_2B_1} \dot{Y}_{B_1A_1} - \dot{Y}_{B_2B_1} \dot{X}_{B_1A_1})$;

$B_2 = \ddot{X}_{B_4} Y_{BC} - \ddot{Y}_{B_4} X_{BC} - 2 \cdot (\dot{X}_{B_2B_4} \dot{Y}_{B_4C_4} - \dot{Y}_{B_2B_4} \dot{X}_{B_4C_4})$.

Таким образом, полный алгоритм определения кинематических параметров внутренней вращательной пары группы Ассур 2-го класса 4-го вида содержит решения (1.10), (1.11), (2.38), (2.40) и (2.42).

В случае частной постановки задачи, достаточно распространенной в практике исследования механизмов, параметры точки $B_1 - X_{B_1}, Y_{B_1}, \dot{X}_{B_1}, \dot{Y}_{B_1}, \ddot{X}_{B_1}, \ddot{Y}_{B_1}$ можно задать постановкой задачи. Тогда алгоритм рассматриваемой задачи будет содержать только системы уравнений (1.10), (1.11), (2.40), (2.42).

Значительно более простой вид имеет алгоритм для неподвижного горизонтального направляющего звена 4. Рассмотрим этот распространенный в практике проектирования случай.

1.6.7. Группа 4-го вида с неподвижным горизонтальным направляющим звеном

Постановка задачи (рис. 2.9)

Дано: $X_{A_1}, Y_{A_1}, \dot{X}_{A_1}, \dot{Y}_{A_1}, \ddot{X}_{A_1}, \ddot{Y}_{A_1}, X_B, \dot{X}_{B_1}, \dot{Y}_{B_1}, Y_B = a, \ddot{X}_{B_1}, \ddot{Y}_{B_1}, Y_4 = a, \dot{Y}_4 = \ddot{Y}_4 = 0$

Определить: $\dot{X}_{B_2}, \dot{Y}_{B_2}, \ddot{X}_{B_2}, \ddot{Y}_{B_2}$

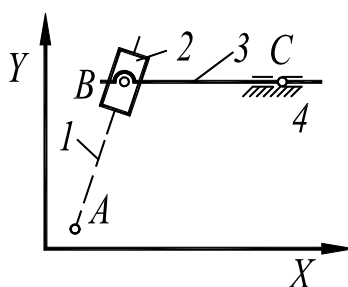


Рисунок 2.9 — Группа 2-го класса 4-го вида с неподвижным горизонтальным направляющим звеном

Математическая модель

Система ограничений (2.36), налагаемая крайними поступательными кинематическими парами на точку B_2 , с учетом условий постановки задачи имеет вид

$$\begin{cases} X_{B_2B_1} Y_{BA} - Y_{B_2B_1} X_{BA} = 0 \\ Y_{B_2B_4} = 0 \end{cases} \quad (2.43)$$

Вычислительный алгоритм

Продифференцировав систему (2.43) один раз и дважды по времени и разрешив полученные системы уравнений соответственно относительно проекций скорости и проекций ускорения точки B_2 , получим

$$\begin{cases} \dot{X}_{B_2} = \dot{X}_{B_1} + \dot{Y}_{B_1} \cdot \frac{X_{BA}}{Y_{BA}} ; \\ \dot{Y}_{B_2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{X}_{B_2} = \ddot{X}_{B_1} - \frac{1}{Y_B} \cdot \left[\ddot{Y}_{B_1} \cdot X_{BA} + 2 \cdot \left(\dot{X}_{B_2B_1} \cdot \dot{Y}_{B_1A_1} - \dot{Y}_{B_2B_1} \cdot \dot{X}_{B_1A_1} \right) \right] \\ \ddot{Y}_{B_2} = 0 \end{cases}$$

1.6.8. Группа 5-го вида

Постановка задачи (рис. 2.10)

Дано: $X_B, Y_B, \dot{X}_{B_2}, \dot{Y}_{B_2}, \ddot{X}_{B_2}, \ddot{Y}_{B_2}, X_C, Y_C, \dot{X}_{C_2}, \dot{Y}_{C_2}, \ddot{X}_{C_2}, \ddot{Y}_{C_2}, \varphi_2, \varphi_4, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_4$

Определить: $\dot{X}_{B_3}, \dot{Y}_{B_3}, \ddot{X}_{B_3}, \ddot{Y}_{B_3}$

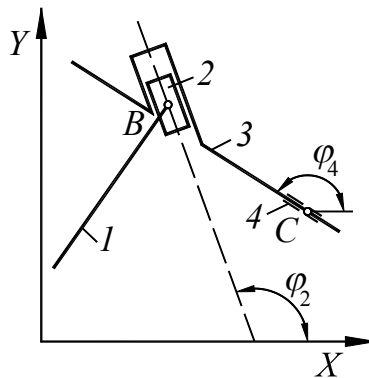


Рисунок 2.10 — Группа 2-го класса 5-го вида

Математическая модель

Уравнения связей, налагаемых поступательными парами группы на относительное движение звеньев 2–3, 3–4, в случае указанной постановки задачи имеют вид

$$\begin{cases} X_{B_3B_2} \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 - Y_{B_1B_2} = 0 \\ X_{B_3B_4} \cdot \operatorname{tg} \varphi_4 - Y_{B_3B_4} = 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

Вычислительный алгоритм

Поскольку второе уравнение системы (2.44) содержит координаты точки $B_4(X_{B_4}; Y_{B_4})$, совпадающей с точкой B_3 , определим проекции скорости и проекции ускорения точки согласно уравнениям (1.10), (1.11):

$$\begin{cases} \dot{X}_{B_4} = \dot{X}_{C_4} - \dot{\varphi}_4 \cdot Y_{BC} \\ \dot{Y}_{B_4} = Y_{C_4} + \dot{\varphi}_4 \cdot X_{BC} \end{cases} ,$$

$$\begin{cases} \ddot{X}_{B_4} = \ddot{X}_{C_4} - \ddot{\varphi}_4 \cdot Y_{BC} - \dot{\varphi}_4^2 \cdot X_{BC} \\ \ddot{Y}_{B_4} = \ddot{Y}_{C_4} + \ddot{\varphi}_4 \cdot X_{BC} - \dot{\varphi}_4^2 \cdot Y_{BC} \end{cases} .$$

Продифференцировав систему (2.44) по времени и решая ее, определим проекции скорости точки B_3 :

$$\begin{cases} \dot{X}_{B_3B_2} \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 - \dot{Y}_{B_1B_2} = 0 \\ \dot{X}_{B_3B_4} \cdot \operatorname{tg} \varphi_4 - \dot{Y}_{B_3B_2} = 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

Тогда

$$\begin{cases} \dot{X}_{B_3} = \frac{A_1 - A_2}{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_4} \\ \dot{Y}_{B_3} = \frac{A_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_4 - A_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_4} \end{cases} \quad (2.46)$$

где $A_1 = \dot{X}_{B_2} \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 - \dot{Y}_{B_2}$; $A_2 = \dot{X}_{B_4} \cdot \operatorname{tg} \varphi_4 - \dot{Y}_{B_4}$.

Продифференцировав систему (2.44) по времени дважды учитывая, что $\dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_4$, получим:

$$\begin{cases} \ddot{X}_{B_3B_2} \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 - \ddot{Y}_{B_3B_2} + 2 \cdot \dot{X}_{B_3B_2} \cdot \frac{\dot{\varphi}_4}{\cos^2 \varphi_2} = 0 \\ \ddot{X}_{B_3B_4} \cdot \operatorname{tg} \varphi_4 - \ddot{Y}_{B_3B_4} + 2 \cdot \dot{X}_{B_3B_4} \cdot \frac{\dot{\varphi}_4}{\cos^2 \varphi_4} = 0 \end{cases} \quad (2.47)$$

Решение системы (2.47) относительно искомым проекций ускорения точки B_3 имеет вид:

$$\begin{cases} \ddot{X}_{B_3} = \frac{B_1 - B_2}{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_4} \\ \ddot{Y}_{B_3} = \frac{B_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_4 - B_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_4} \end{cases}, \quad (2.48)$$

$$\text{где } B_1 = \ddot{X}_{B_2} \operatorname{tg} \varphi_2 - \ddot{Y}_{B_2} - 2\dot{X}_{B_3B_2} \frac{\dot{\varphi}_4}{\cos^2 \varphi_2};$$

$$B_2 = \ddot{X}_{B_4} \operatorname{tg} \varphi_4 - \ddot{Y}_{B_4} - 2\dot{X}_{B_3B_4} \frac{\dot{\varphi}_4}{\cos^2 \varphi_4}.$$

Таким образом, полный вычислительный алгоритм определения проекций скорости и проекций ускорения точки B_3 содержит решения (1.10), (1.11), (2.46), (2.48).

Обратим внимание на определенные неудобства решений (2.46), (2.48) обусловленные свойствами функции $\operatorname{tg} \varphi$, входящей в данные выражения. Если один из углов φ_2 или φ_4 принимает значение 90° ($\operatorname{tg} 90^\circ = \infty$) использовать при этом решения (2.46), (2.48) нельзя. Оба угла одновременно не могут быть равными 90° , поскольку при $\varphi_2 = \varphi_4$ группа 5-го вида перестает существовать.

При $\varphi_2 = 90^\circ$ система (2.44) принимает вид:

$$\begin{cases} X_{B_3B_2} = 0 \\ X_{B_3B_4} \cdot \operatorname{tg} \varphi_4 - Y_{B_3B_4} = 0 \end{cases}. \quad (2.49)$$

При $\varphi_4 = 90^\circ$:

$$\begin{cases} X_{B_3B_4} = 0; \\ X_{B_3B_2} \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 - Y_{B_3B_2} = 0 \end{cases}. \quad (2.50)$$

Алгоритм определения проекций скорости и проекции ускорения точки B_3 в каждом из двух частных случаях получим, выполняя с уравнениями систем (2.49) и (2.50) те же действия и в той же последовательности как и ранее относительно уравнений системы (2.44).

Рассмотрим достаточно распространенный частный случай группы 5-го вида при $\varphi_2 = 90^\circ$, $\varphi_4 = 0^\circ$ и неподвижном направляющем звене 4.

1.6.9. Группа 5-го вида с вертикальным направляющим звеном внутренней пары и неподвижным горизонтальным направляющим звеном крайней пары

Постановка задачи (рис. 2.11)

Дано: $X_B, Y_B, \dot{X}_{B_2}, \dot{Y}_{B_2}, \ddot{X}_{B_2}, \ddot{Y}_{B_2}, Y_4 = a, \dot{X}_4 = 0, \dot{Y}_4 = 0, \ddot{X}_4 = 0,$
 $\ddot{Y}_4 = 0$

Определить: $\dot{X}_{B_3}, \dot{Y}_{B_3}, \ddot{X}_{B_3}, \ddot{Y}_{B_3}$

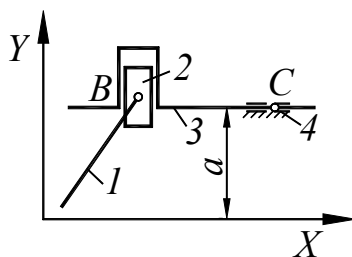


Рисунок 2.11 — Группа 2-го класса 5-го вида частный случай

Математическая модель

Математическое описание ограничений, налагаемых поступательными парами группы на точку B_3 , является частным случаем системы ограничений (2.49) т. е.

$$\begin{cases} X_{B_3 B_2} = 0 \\ Y_{B_3 B_4} = 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

Вычислительный алгоритм

Решение системы (2.51) после ее дифференцирования один раз и дважды по времени соответственно относительно проекций скорости и проекции ускорения точки B_3 имеют вид

$$\begin{cases} \dot{X}_{B_3} = \dot{X}_{B_2} \\ \dot{Y}_{B_3} = 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

$$\begin{cases} \ddot{X}_{B_3} = \ddot{X}_{B_2} \\ \ddot{Y}_{B_3} = 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

1.6.10. Определение кинематических параметров произвольной точки жесткого звена по заданным параметрам двух других точек этого звена

Ранее были рассмотрены математические модели и вычислительные алгоритмы определения кинематических параметров элементов внутренних кинематических пар групп Ассур 2-го класса. Задачей кинематического анализа механизмов является определение параметров не только этих, а и каких-либо других точек механизма.

Кинематические параметры точек механизма, не принадлежащих элементам кинематических пар, можно определить после того, когда будут определены параметры внутренних пар структурных групп. В результате этого для каждого звена станут известными параметры двух ее точек, принадлежащих крайней и внутренней кинематической паре.

Рассмотрим, как определяются параметры произвольной точки звена по известным параметрам двух его точек и заданной геометрии взаимного расположения этих точек.

Если положение точки B относительно точек A и C задано двумя дополнительными $l_1 = l_{AB}$ и $l_2 = l_{BC}$, то, как видно из рис. 2.12, следует задать коэффициент $\delta = \pm 1$ взаимного расположения рассматриваемых точек.

Постановка задачи (рис. 2.12)

Дано: $X_A, Y_A, \dot{X}_A, \dot{Y}_A, \ddot{X}_A, \ddot{Y}_A, X_C, Y_C, \dot{X}_C, \dot{Y}_C, \ddot{X}_C, \ddot{Y}_C, l_{AB} = l_1, l_{AC} = l_2, \delta = \pm 1$

Определить: $X_B, Y_B, \dot{X}_B, \dot{Y}_B, \ddot{X}_B, \ddot{Y}_B$

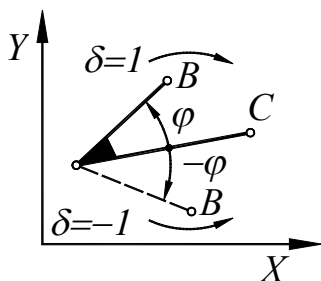


Рисунок 2.12 — Размещение точек A, B и C , принадлежащих звену

Если положение точки B задано дополнительным параметром $l_1 = l_{AB}$ и алгебраическим углом φ , нет необходимости вводить коэф-

коэффициент взаимного размещения точек δ , поскольку $\varphi = \delta \cdot \varphi$. В дальнейшем допускаем, что положение точки B относительно точек A и C задано параметрами l_1, l_2, δ . Определение отрезка l_2 при заданном угле φ приведено в постановке задачи, на основании теоремы косинусов. Коэффициент взаимного размещения точек $\delta = 1$, если последовательный обход точек A, B, C происходит по направлению движения часовой стрелки (рис. 2.12), в противном случае $\delta = -1$.

Математическая модель

Постановка рассматриваемой задачи ничем не отличается от постановки задачи исследования группы Ассур 2-го класса 1-го вида. Поэтому не будут отличаться и модели этих задач. т. е.

$$\begin{cases} X_{AB}^2 + Y_{AB}^2 = l_{AB}^2 \\ X_{BC}^2 + Y_{BC}^2 = l_{BC}^2 \end{cases}, \quad (2.54)$$

где $l_{BC} = \sqrt{l_1^2 + X_{CA}^2 + Y_{CA}^2 - 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos \varphi}$, находим по теореме косинусов.

Вычислительный алгоритм

Согласно вышесказанному вычислительный алгоритм определения координат точки B в решаемой задаче также ничем не отличается от алгоритма решения системы (2,10):

$$\begin{cases} X_B = X_A + \frac{1}{M^2} \cdot (k \cdot X_{CA} - \delta \cdot L \cdot Y_{CA}) \\ Y_B = Y_A + \frac{1}{M^2} \cdot (k \cdot Y_{CA} + \delta \cdot L \cdot X_{CA}) \end{cases} \quad (2.55)$$

где $M^2 = X_{CA}^2 + Y_{CA}^2$; $k = (l_{AB}^2 + M^2 - l_{BC}^2) / 2$; $L = \sqrt{l_{AB}^2 \cdot M^2 - k^2}$;

Формально, если точки A, B и C не лежат на одной прямой, алгоритмы определения проекций скорости точки B (2.12) и проекций ускорений этой точки (2.14) можно использовать в решаемой задаче. Если точки A, B и C лежат на одной прямой, приведенные алгоритмы использовать невозможно – знаменатель уравнений равняется нулю.

Жесткое звено отличается от группы 1-го вида тем, что в нем расстояния между какими-либо двумя точками остается неизменным и не

зависит от времени, чего не наблюдается для случая группы Ассур 1-го вида. Поэтому алгоритм определения проекций скорости точки и проекций ускорения точки B жесткого звена могут отличаться от (2.12) и (2.14). Продифференцировав систему (2.10) один раз и дважды по времени получим соответственно:

$$\begin{cases} \dot{X}_B = \dot{X}_A + \frac{1}{M^2} \cdot (k \cdot \dot{X}_{CA} - \delta \cdot L \cdot \dot{Y}_{CA}) \\ \dot{Y}_B = \dot{Y}_A + \frac{1}{M^2} \cdot (k \cdot \dot{Y}_{CA} + \delta \cdot L \cdot \dot{X}_{CA}) \end{cases} \quad (2.56)$$

$$\begin{cases} \ddot{X}_B = \ddot{X}_A + \frac{1}{M^2} \cdot (k \cdot \ddot{X}_{CA} - \delta \cdot L \cdot \ddot{Y}_{CA}) \\ \ddot{Y}_B = \ddot{Y}_A + \frac{1}{M^2} \cdot (k \cdot \ddot{Y}_{CA} + \delta \cdot L \cdot \ddot{X}_{CA}) \end{cases} \quad (2.57)$$

Воспользовавшись уравнениями систем (2.56) и (2.57), можно определить проекции скорости и проекции ускорения произвольной точки B жесткого звена при любом взаимном расположении точек A , B и C .

Рассматривая частные случаи, когда точки A , B и C твердого тела лежат на одной прямой системы уравнений (2.10), (2.55), (2.56), (2.57) можно существенно упростить. Рассмотрим этот случай.

Постановка задачи (рис. 2.13)

Дано: $X_A, Y_A, \dot{X}_A, \dot{Y}_A, \ddot{X}_A, \ddot{Y}_A, X_C, Y_C, \dot{X}_C, \dot{Y}_C, \ddot{X}_C, \ddot{Y}_C, \ell_{AB}, \ell_{AC}$

Определить: $X_B, Y_B, \dot{X}_B, \dot{Y}_B, \ddot{X}_B, \ddot{Y}_B$

Математическая модель

Из подобия треугольников ACC' и ABB' следует:

$$\begin{cases} \frac{X_{CA}}{X_{BA}} = \frac{\ell_{AC}}{\ell_{AB}} \\ \frac{Y_{CA}}{Y_{BA}} = \frac{\ell_{AC}}{\ell_{AB}} \end{cases} \quad (2.58)$$

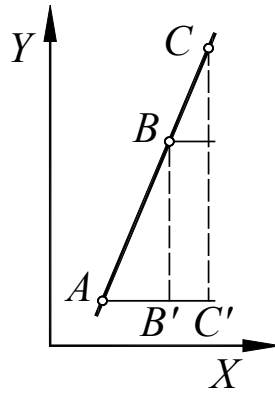


Рисунок 2.13 — Размещение точек A , B и C жесткого звена на одной прямой

Вычислительный алгоритм

$$\begin{cases} X_B = X_A + X_{CA} \frac{\ell_{AB}}{\ell_{AC}} \\ Y_B = Y_A + Y_{CA} \frac{\ell_{AB}}{\ell_{AC}} \end{cases} \quad (2.59)$$

$$\begin{cases} \dot{X}_B = \dot{X}_A + \dot{X}_{CA} \frac{\ell_{AB}}{\ell_{AC}} \\ \dot{Y}_B = \dot{Y}_A + \dot{Y}_{CA} \frac{\ell_{AB}}{\ell_{AC}} \end{cases} \quad (2.60)$$

$$\begin{cases} \ddot{X}_B = \ddot{X}_A + \ddot{X}_{CA} \frac{\ell_{AB}}{\ell_{AC}} \\ \ddot{Y}_B = \ddot{Y}_A + \ddot{Y}_{CA} \frac{\ell_{AB}}{\ell_{AC}} \end{cases} \quad (2.61)$$

Напомним, что для жесткого звена с известными параметрами φ , $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ любой точки A этого звена, кинематические параметры любой его точки B , расположенной на расстоянии ℓ , определяется уравнениями (1.8), (1.9), (1.10), (1.11).

1.7. Кинематический анализ плоских рычажных механизмов координатным методом

Кинематический анализ плоских рычажных механизмов координатным методом рассмотрим на примере исследования механизма подачи заготовок, представленного на рисунке 2.14

Постановка задачи (рис. 2.14)

Дано: $X_O = 0, Y_O = 0, \dot{X}_O = 0, \dot{Y}_O = 0, \ddot{X}_O = 0, \ddot{Y}_O = 0, X_C, Y_C, \dot{X}_C = 0, \dot{Y}_C = 0, \ddot{X}_C = 0, \ddot{Y}_C = 0, Y_E = a, \dot{Y}_E = 0, \ddot{Y}_E = 0, \varphi_2 = -\dot{\varphi}_2 \cdot t, l_{OA}, l_{AB}, l_{DC}, l_{BC}, \dot{\varphi}_2 = const, \delta_1 = -1, \delta_2 = 1$

Определить: $X_A, Y_A, \dot{X}_A, \dot{Y}_A, \ddot{X}_A, \ddot{Y}_A, X_B, Y_B, \dot{X}_B, \dot{Y}_B, \ddot{X}_B, \ddot{Y}_B, X_D, Y_D, \dot{X}_D, \dot{Y}_D, \ddot{X}_D, \ddot{Y}_D, X_E, \dot{X}_E, \ddot{X}_E$

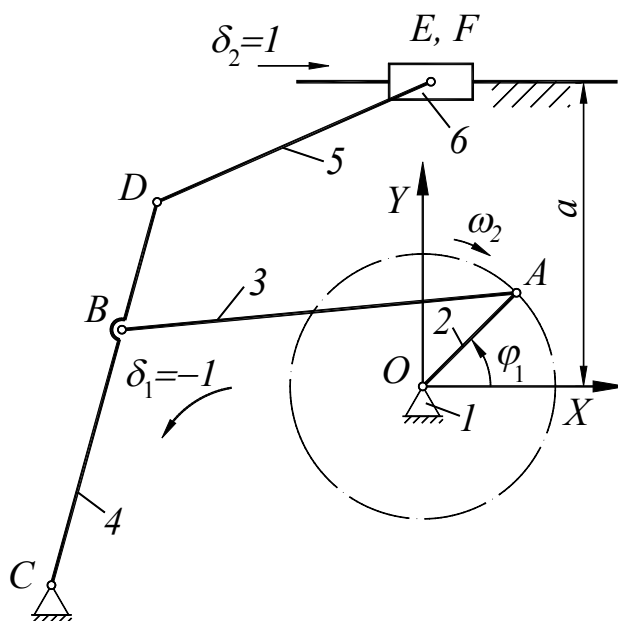


Рисунок 2.14 — Кинематическая схема механизма подачи заготовок

Математическая модель

Математическая модель исследования механизма в целом в приведенной постановке задачи содержит математическое описание условий связей, налагаемых звеньями и кинематическими парами структурных групп, входящих в состав механизма, на элементы внутренних пар этих групп, а также математические модели определения кинематических параметров точек присоединения следующих групп, если эти точ-

ки в процессе образования механизма не совпадает с элементами внутренних пар предыдущих структурных групп. Так в приведенном механизме точка D присоединения звеньев 5–6 не является элементом внутренней кинематической пары группы звеньев 3–4, поэтому математическое описание решаемой задачи содержит не только математические модели (2.1), (2.10), (2.23) структурных групп, входящих в состав исследуемого механизма, но и систему уравнений (2.58), при помощи которой можно определить кинематические параметры точки D . Тогда математическая модель исследования предложенного механизма примет вид:

$$\begin{cases} \varphi_2 = \varphi \cdot t \\ X_{OA}^2 + Y_{OA}^2 = l_{OA}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{BA}^2 + Y_{BA}^2 = l_{BA}^2 \\ X_{BC}^2 + Y_{BC}^2 = l_{BC}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{X_{DC}}{X_{BC}} = \frac{l_{DC}}{l_{BC}} \\ \frac{Y_{DC}}{Y_{BC}} = \frac{l_{DC}}{l_{BC}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{ED}^2 + Y_{ED}^2 = l_{ED}^2 \\ Y_E = a. \end{cases}$$

Вычислительный алгоритм

Вычислительный алгоритм задачи содержит решения систем уравнений, содержащихся в математической модели:

Механизм 1-го класса

$$\begin{cases} X_A = l_{OA} \cdot \cos \varphi_2 \\ Y_A = l_{OA} \cdot \sin \varphi_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{X}_A = -\dot{\varphi}_2 \cdot l_{OA} \cdot \sin \varphi_2 \\ \dot{Y}_A = \dot{\varphi}_2 \cdot l_{OA} \cdot \cos \varphi_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{X}_A = -\ddot{\varphi}_2 \cdot l_{OA} \cdot \cos \varphi_2 \\ \ddot{Y}_A = -\ddot{\varphi}_2 \cdot l_{OA} \cdot \sin \varphi_2 \end{cases}$$

Структурная группа Ассура 2-го класса 1-го вида (ВВВ)

$$\begin{cases} X_B = X_A + \frac{1}{M^2}(k \cdot X_{CA} - \delta_1 \cdot LY_{CA}) \\ Y_B = Y_A + \frac{1}{M^2}(k \cdot Y_{CA} + \delta_1 \cdot LX_{CA}), \end{cases}$$

$$M^2 = X_{CA}^2 + Y_{CA}^2; \quad k = 0,5 \cdot (\ell_{AB}^2 + M^2 - \ell_{BC}^2); \quad L = \sqrt{\ell_{AB}^2 M^2 - k^2}$$

$$\begin{cases} \dot{X}_B = \frac{A_1 Y_{BC} - A_2 Y_{BA}}{X_{BA} Y_{BC} - X_{BC} Y_{BA}} \\ \dot{Y}_B = \frac{A_2 X_{BA} - A_1 X_{BC}}{X_{BA} Y_{BC} - X_{BC} Y_{BA}}, \end{cases}$$

$$A_1 = \dot{X}_A X_{BA} + \dot{Y}_A Y_{BA}; \quad A_2 = \dot{X}_C X_{BC} + \dot{Y}_C Y_{BC}.$$

$$\begin{cases} \ddot{X}_B = \frac{B_1 Y_{BC} - B_2 Y_{BA}}{X_{BA} Y_{BC} - X_{BC} Y_{BA}} \\ \ddot{Y}_B = \frac{B_2 X_{BA} - B_1 X_{BC}}{X_{BA} Y_{BC} - X_{BC} Y_{BA}}, \end{cases}$$

$$B_1 = \ddot{X}_A X_{BA} + \ddot{Y}_A Y_{BA} - \dot{X}_{BA}^2 - \dot{Y}_{BA}^2; \quad B_2 = \ddot{X}_C X_{BC} + \ddot{Y}_C Y_{BC} - \dot{X}_{BC}^2 - \dot{Y}_{BC}^2$$

Теорема подобия параметры точки D

$$\begin{cases} X_D = X_C + X_{BC} \cdot \ell_{DC} / \ell_{BC} \\ Y_D = Y_C + Y_{BC} \cdot \ell_{DC} / \ell_{BC} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{X}_D = \dot{X}_C + \dot{X}_{BC} \cdot \ell_{DC} / \ell_{BC} \\ \dot{Y}_D = \dot{Y}_C + \dot{Y}_{BC} \cdot \ell_{DC} / \ell_{BC} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{X}_D = \ddot{X}_C + \ddot{X}_{BC} \cdot \ell_{DC} / \ell_{BC} \\ \ddot{Y}_D = \ddot{Y}_C + \ddot{Y}_{BC} \cdot \ell_{DC} / \ell_{BC} \end{cases}$$

Структурная группа Ассура 2-го класса 2-го вида (ВВП)
с неподвижным горизонтальным направляющим звеном

$$\begin{cases} X_E = X_D + \delta_2 \cdot \sqrt{\ell_{DE}^2 - (a - Y_D)^2} \\ Y_E = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{X}_E = \dot{X}_D + \dot{Y}_D \frac{Y_{ED}}{X_{ED}} \\ \dot{Y}_E = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{X}_E = \ddot{X}_D + \ddot{Y}_D \frac{Y_{ED}}{X_{ED}} - \frac{\dot{X}_{ED}^2 + \dot{Y}_{ED}^2}{X_{ED}} \\ \ddot{Y}_E = 0 \end{cases} .$$

Рассмотренная постановка задачи предусматривала необходимость расчета кинематических параметров характерных точек механизма для какого-либо одного положения кривошипа 2, определяемым углом φ_2 . Реально эти параметры определяют для i равноудаленных положений механизма (кривошипа), когда он совершает полный оборот 360° , количество положений определяется параметром $\Delta\varphi$. Среди положений должны быть, отвечающие крайнему положению механизма.

1.8. Определение углов, определяющих положение кривошипа, отвечающих крайним положениям исполнительного звена распространенных четырехзвенных механизмов

Наиболее распространенными четырехзвенными механизмами являются: шарнирный четырехзвенник, кривошипно-ползунный и кривошипно-кулисный механизмы.

1.8.1. Шарнирный четырехзвенник и кривошипно-ползунный механизмы

Рассмотрим шарнирный четырехзвенник (рис. 2.14). Каждый из углов φ_1 и φ_2 , которые определяют положение кривошипа 2, отвечающие крайним положениям коромысла 4 можно определить из выражения:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{Y_B}{X_B} + a + b, \quad (2.62)$$

где a — коэффициент, учитывающий особенности функции $\operatorname{arctg} \varphi$;

b — коэффициент, учитывающий изменение угла φ в процессе перехода выходного звена с крайнего дальнего положения в крайнее ближнее;

$$a = \begin{cases} 0, & \text{если } X_B > 0; \\ \pi, & \text{если } X_B < 0; \end{cases} \quad b = \begin{cases} 0, & \text{если } \ell_{OB} = \ell_{OA} + \ell_{AB}; \\ \pi, & \text{если } \ell_{OB} = \ell_{OA} - \ell_{AB}; \end{cases}$$

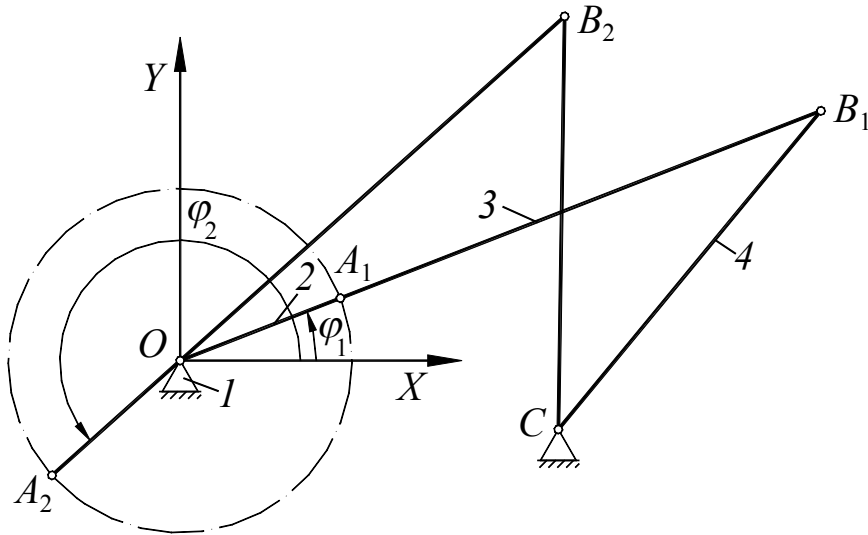


Рисунок 2.14 — Шарнирный четырехзвенок при крайних положениях выходного звена 4

Определив координаты точки B с помощью уравнений (2.11), получим

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{k \cdot Y_C + \delta \cdot L \cdot X_C}{k \cdot X_C - \delta \cdot L \cdot Y_C} + a + b, \quad (2.63)$$

где $k = (\ell_{OB}^2 + X_C^2 + Y_C^2 - \ell_{CB}^2) / 2$; $L = \sqrt{\ell_{OB}^2 \cdot (X_C^2 + Y_C^2) - k^2}$;

$$a = \begin{cases} 0, & \text{если } k \cdot X_C - \delta \cdot L \cdot Y_C > 0; \\ \pi, & \text{если } k \cdot X_C - \delta \cdot L \cdot Y_C < 0; \end{cases} \quad b = \begin{cases} 0, & \text{если } \ell_{OB} = \ell_{OA} + \ell_{AB}; \\ \pi, & \text{если } \ell_{OB} = |\ell_{OA} - \ell_{AB}|; \end{cases}$$

где $\delta = 1$ когда последовательный обход точек O, B, C происходит в направлении движения часовой стрелки, в противном случае $\delta = -1$.

Для кривошипно-ползунного механизма (рис. 2.15) каждый из углов φ_1, φ_2 , определяющие положение кривошипа 2, отвечающие крайним положениям ползуна 4, также можно найти при помощи уравнения (2.63). При этом координаты точки B находим из уравнений (2.18). Параметры точки C (рис. 2.15), координаты которой входят в уравнения (2.18), в общем случае возьмем находящийся на пересечении горизонтальной оси x и наклонной прямой, определяющей положение направляющего звена 1.

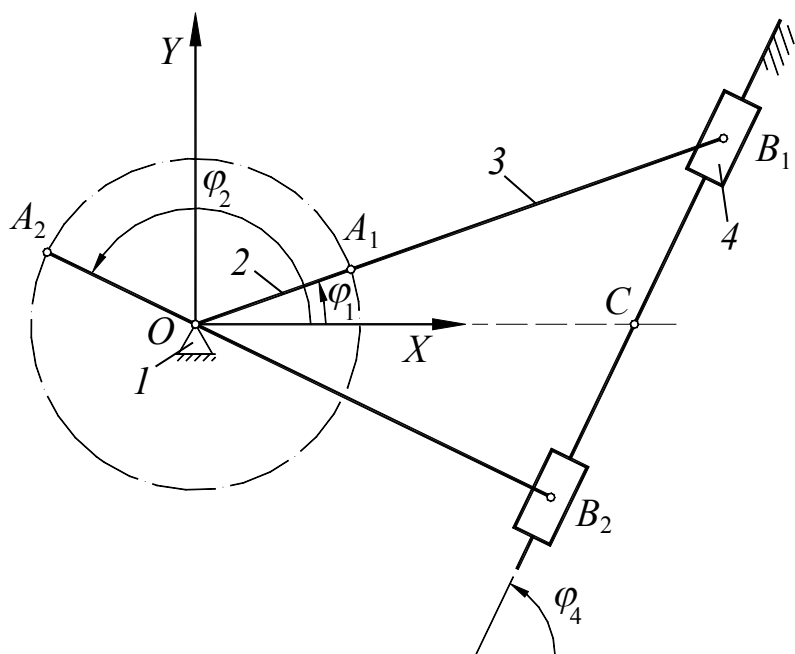


Рисунок 2.15 — Кривошипно-ползунный механизм при крайних положениях ползуна 4

Тогда

$$\varphi = \arctg \frac{l_{BC} \cdot \sin \varphi_4}{X_C + l_{BC} \cdot \cos \varphi_4} + a + b, \quad (2.64)$$

где $l_{BC} = l_{OC} \cdot \cos(\varphi_4 - \alpha) + \delta \sqrt{l_{OB}^2 - l_{OC}^2 \cdot \sin^2(\varphi_4 - \alpha)}$;

α — коэффициент, учитывающий изменение угла φ в зависимости от взаимного расположения точек O и C ;

γ — коэффициент, учитывающий изменение угла φ_4 в зависимости от взаимного расположения точек B и C ;

$$\varphi_4 = \varphi_4 + \gamma$$

$$\alpha = \begin{cases} 0, & \text{если } X_C \leq 0 \\ \pi, & \text{если } X_C > 0 \end{cases}; \quad \gamma = \begin{cases} 0, & \text{если } l_{OB} > l_{OC} \\ \pi, & \text{если } l_{OB} < l_{OC} \end{cases};$$

$$l_{OC} = \sqrt{X_C^2} = |X_C|; \quad l_{OB} = |l_{OA} \pm l_{AB}|;$$

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{если } l_{OB} > l_{OC} \\ -1, & \text{если } l_{OB} < l_{OC} \end{cases}; \quad a = \begin{cases} 0, & \text{если } X_C + l_{BC} \cos \varphi_4 > 0 \\ \pi, & \text{если } X_C + l_{BC} \cos \varphi_4 < 0 \end{cases};$$

$$b = \begin{cases} 0, & \text{если } l_{OB} = l_{OA} + l_{AB} \\ \pi, & \text{если } l_{OB} = |l_{OA} - l_{AB}| \end{cases}.$$

Если $\varphi_4 = 0$, положение точки C берем на пересечении вертикальной оси Y с горизонтальным направляющим звеном 1. Тогда

$$\varphi = \arctg \frac{Y_C}{\delta \cdot \sqrt{l_{OB}^2 - Y_C^2}} + a + b,$$

где $\delta = \pm 1$ — заданный коэффициент схемы сборки группы, определяемый соответственно "положительным" и "отрицательным" размещением ползуна 4 в направлении оси X ;

$$a = \begin{cases} 0, & \text{если } \delta = 1 \\ \pi, & \text{если } \delta = -1 \end{cases}; \quad b = \begin{cases} 0, & \text{если } l_{OB} = l_{OA} + l_{AB} \\ \pi, & \text{если } l_{OB} = |l_{OA} - l_{AB}| \end{cases}.$$

1.8.2. Кривошипно-кулисные механизмы

Для кулисного механизма с качающейся кулисой (рис. 2.1,6) углы φ_1 и φ_2 можно определить из уравнения (2.63), определив обеспечивающие параметры K, L, a, b этого уравнения, следует учесть, что в крайних положениях кулисы 4

$$l_4 = l_{BC} = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2 - l_{OB}^2} = const.$$

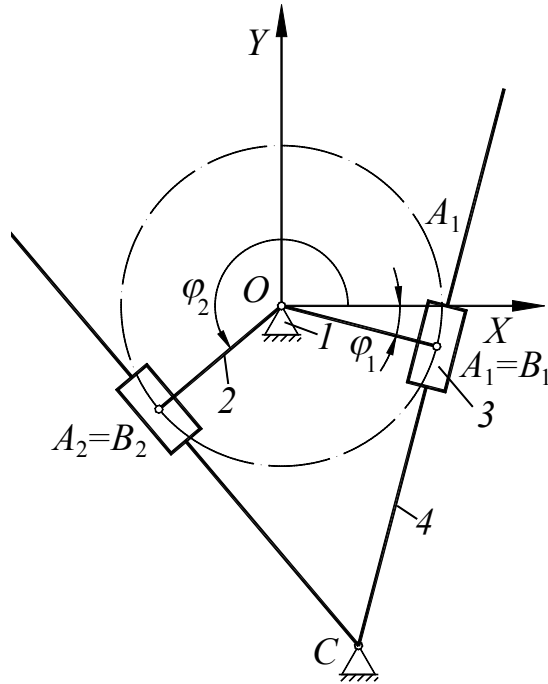


Рисунок 2.16 — Кривошипно-кулисный механизм с качающейся кулисой

Это означает, что $b = 0$. В кулисном механизме с вращающейся кулисой (рис. 2.17) значения углов φ_1 и φ_2 полностью определяются взаимным расположением неподвижных точек O и C , то есть искомые углы можно определить из уравнения (2.62), при $b = 0$.

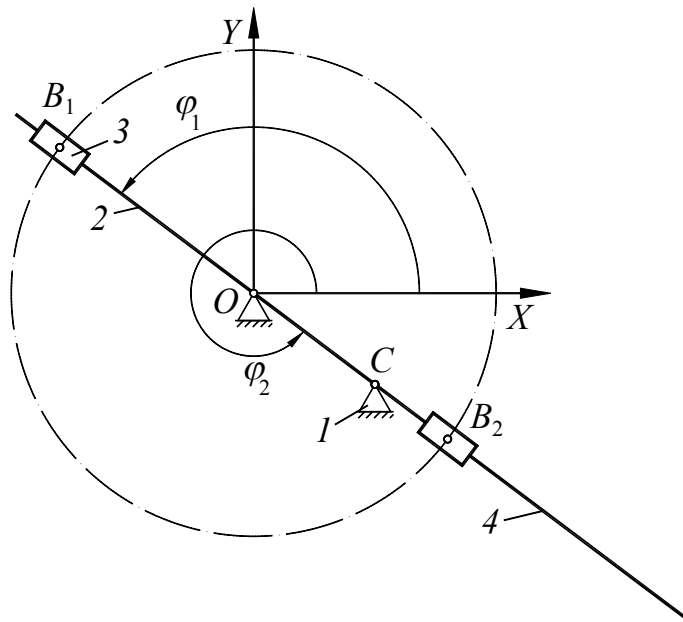


Рисунок 2.17 — Кривошипно-кулисный механизм с вращающейся кулисой

Крайние положения выходного звена 6 шестизвенных механизмов (рис. 2.13) часто определяются углами φ_1 и φ_2 , определяющими крайние положения выходного звена 4, рассмотренных ранее простейших четырехзвенных механизмов, на базе которых образованы соответствующие шестизвенные механизмы. Для случаев, когда крайние положения звена 6 не соответствуют крайним положениям звена 4, необходимо выполнить отдельное исследование. Эти случаи в данном пособии не рассматриваются.

1.9. Решение второй и третьей задачи кинематического исследования механизмов методом численного дифференцирования

Вторую и третью задачи кинематического анализа, которые связаны с определением проекций скоростей и проекций ускорений точек механизма, удобно выполнять с помощью ЭВМ методом численного дифференцирования.

Координатный метод кинематического исследования механизмов предусматривает задание закона движения точек в виде:

$$\begin{cases} X = f_1(t) \\ Y = f_2(t) \end{cases} \quad (2.65)$$

Уравнения (2.65) можно получить, решив первую задачу кинематического анализа. Решая задачи на ЭВМ, уравнения (2.65) обычно задают численно координатами исследуемой точки (рис. 2.18) в три близкие моменты времени:

$$t - \Delta t, t, t + \Delta t \text{ при } \Delta t \leq \varepsilon.$$

Условимся называть положение 0 точки с координатами:

$$\begin{cases} X_0 = f_1(t) \\ Y_0 = f_2(t) \end{cases},$$

основным, а положения 1 и 2 с координатами:

$$\begin{cases} X_1 = f_1(t + \Delta t) \\ Y_1 = f_2(t + \Delta t) \end{cases},$$

$$\begin{cases} X_2 = f_1(t - \Delta t) \\ Y_2 = f_2(t - \Delta t) \end{cases},$$

дополнительными положениями.

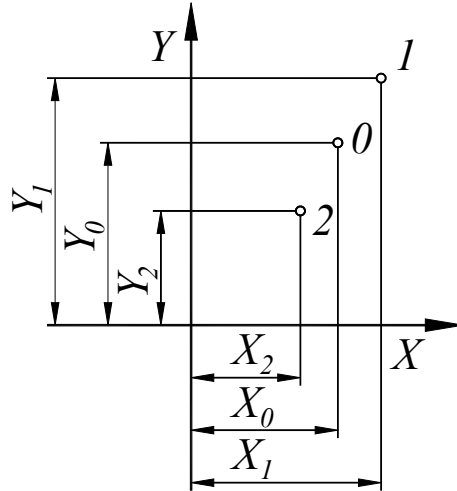


Рисунок 2.18 — Координаты исследуемой точки в момент времени:
 $t - \Delta t, t, t + \Delta t$

Математическая модель определения проекций скорости точки следует из определения [4] проекции скорости точки на неподвижные оси декартовых координат. Искомые проекции равняются первым производным от соответствующих координат точки по времени, то есть

$$\begin{cases} \dot{X}_0 = \frac{dX_0}{dt} \\ \dot{Y}_0 = \frac{dY_0}{dt} \end{cases}. \quad (2.66)$$

Учитывая, что уравнения (2.65) заданы численно, построим разностные аналоги уравнений (2.66):

$$\begin{cases} \dot{X}_0 = \frac{dX_0}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X_1 - X_0}{\Delta t} \approx \frac{X_1 - X_0}{\Delta t} \\ \dot{Y}_0 = \frac{dY_0}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Y_1 - Y_0}{\Delta t} \approx \frac{Y_1 - Y_0}{\Delta t} \end{cases}.$$

и

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_0 = \frac{dX_0}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X_0 - X_2}{\Delta t} \approx \frac{X_0 - X_2}{\Delta t} \\ \dot{Y}_0 = \frac{dY_0}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Y_0 - Y_2}{\Delta t} \approx \frac{Y_0 - Y_2}{\Delta t} \end{array} \right. .$$

В теории разностных схем разности $X_{10} = X_1 - X_0$ и $X_{02} = X_0 - X_2$ называют соответственно разницей вперед и разницей назад. Разность равную полусумме разниц:

$$\frac{1}{2} \cdot (X_1 - X_0 + X_0 - X_2) = \frac{X_1 - X_2}{2} = \frac{X_{12}}{2},$$

называют центральной.

При определении приближенных значений \dot{X}_0 и \dot{Y}_0 в момент времени t (основное положение точки) разностные аналоги производных обычно содержат центральные разности:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_0 = \frac{X_1 - X_2}{2\Delta t} = \frac{X_{12}}{2\Delta t} \\ \dot{Y}_0 = \frac{Y_1 - Y_2}{2\Delta t} = \frac{Y_{12}}{2\Delta t} \end{array} \right. . \quad (2.67)$$

Уравнения (2.67) являются математической моделью и вычислительным алгоритмом решения второй задачи кинематического анализа методом численного дифференцирования.

С учетом того, что проекции ускорения точки на неподвижные оси декартовых координат равны вторым производным по времени, математическая модель аналитического решения третьей задачи кинематического анализа принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{X}_0 = \frac{d\dot{X}_0}{dt} = \frac{d^2 X_0}{dt^2} \\ \ddot{Y}_0 = \frac{d\dot{Y}_0}{dt} = \frac{d^2 Y_0}{dt^2} \end{array} \right. . \quad (2.68)$$

Разностные аналоги уравнений (2.68), используемые для численного дифференцирования, записывают исходя из таких соображений:

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{X}_0 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{X_{10}}{\Delta t} - \frac{X_{02}}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X_1 + X_2 - 2 \cdot X_0}{\Delta t^2} \approx \frac{X_1 + X_2 - 2 \cdot X_0}{\Delta t^2} \\ \ddot{Y}_0 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{Y_{10}}{\Delta t} - \frac{Y_{02}}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Y_1 + Y_2 - 2 \cdot Y_0}{\Delta t^2} \approx \frac{Y_1 + Y_2 - 2 \cdot Y_0}{\Delta t^2} \end{aligned} \right.$$

Тогда

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{X}_0 &\approx \frac{X_1 + X_2 - 2 \cdot X_0}{\Delta t^2} \\ \ddot{Y}_0 &\approx \frac{Y_1 + Y_2 - 2 \cdot Y_0}{\Delta t^2} \end{aligned} \right. \quad (2.69)$$

Уравнения (2.69) являются математической моделью и вычислительным алгоритмом решения третьей задачи кинематического анализа методом численного дифференцирования. Уравнения (2.67) и (2.69) дают возможность приближенно определить проекции скорости и проекции ускорения исследуемой точки. Для получения численных значений \dot{X}_0 , \dot{Y}_0 , \ddot{X}_0 и \ddot{Y}_0 с приемлемой точностью, промежуток времени Δt между основным 0 и вспомогательными 1 и 2 положениями точки следует назначить минимально возможным.

В механизмах с равномерно вращающимся кривошипом зависимость между углом поворота кривошипа $\Delta\varphi$ и промежутком Δt , в течение которого этом поворот происходил, имеет вид:

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi \cdot 30}{\pi \cdot N} = \frac{\Delta\varphi}{\omega},$$

где N — заданная частота вращения кривошипа, мин^{-1} ;

ω — угловая скорость кривошипа, с^{-1} .

$$\omega = \frac{\pi \cdot N}{30}.$$

Опыт решения задач на ЭВМ показал, что при $\Delta\varphi = N/360$, максимальная относительная погрешность определения \ddot{X}_0 и \ddot{Y}_0 численным дифференцированием для шестизвенных механизмов составляет 1–2%. При этом уравнения (2.67) и (2.69) для практического использования записывают, учитывая особенности обработки малых величин на ЭВМ, в виде:

$$\begin{cases} \dot{X}_0 = \frac{1000 \cdot X_1 - 1000 \cdot X_2}{2000 \cdot \Delta t} \\ \dot{Y}_0 = \frac{1000 \cdot Y_1 - 1000 \cdot Y_2}{2000 \cdot \Delta t} \end{cases}; \quad (2.70)$$

$$\begin{cases} \ddot{X}_0 = \frac{10000 \cdot X_1 + 10000 \cdot X_2 - 20000 \cdot X_0}{10000 \cdot \Delta t^2} \\ \ddot{Y}_0 \approx \frac{10000 \cdot Y_1 + 10000 \cdot Y_2 - 20000 \cdot Y_0}{10000 \cdot \Delta t^2} \end{cases}. \quad (2.71)$$

Уравнения (2.70) и (2.71) носят универсальный характер не зависимо, для какой точки механизма их применяют.

Отметим, что алгоритм кинематического исследования механизма в целом является циклическим с заданным числом повторений i и включает вложенный цикл определения координат не только в основном, но и в двух вспомогательных положениях. По известным значениям координат методом разностных схем находим проекции скорости и ускорения характерных точек механизма, которые определяем для каждого i -го положения кривошипа по описанному ранее алгоритму.

1.10. Определение вспомогательных координат одной из сопряженных точек поступательной кинематической пары

На рисунке 2.19 видим, что точки A_1 и A_2 , которые принадлежат соответственно камню 1 и кулисе 2, образующие поступательную кинематическую пару, сопряжены только в момент времени t . В моменты времени $t + \Delta t$ и $t - \Delta t$ эти точки не сопрягаются.

Пусть известны координаты A_1 и B_2 любой момент времени, тогда координаты точки A_2 для вспомогательных положений можно определить из уравнений

$$\begin{cases} X_{A_2} = X_{B_2} + X_{A_1 B_2} \cdot \frac{\ell_{A_2 B_2}}{\ell_{A_1 B_2}} \\ Y_{A_2} = Y_{B_2} + Y_{A_1 B_2} \cdot \frac{\ell_{A_2 B_2}}{\ell_{A_1 B_2}} \end{cases},$$

где $\ell_{A_1B_2} = \sqrt{X_{A_1B_2}^2 + Y_{A_1B_2}^2}$ — расстояние между точками A_1 и B_2 в момент времени t (основное положение);

$\ell_{A_2B_2} = \sqrt{X_{A_2B_2}^2 + Y_{A_2B_2}^2}$ — расстояние между точками A_2 и B_2 в момент времени $t \pm \Delta t$ (дополнительные положения).

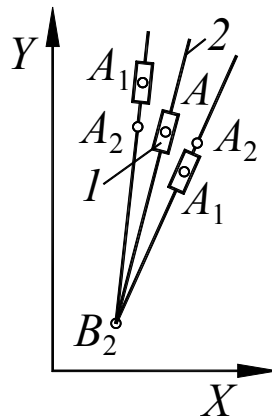


Рисунок 2.19 — Взаимное размещение точек A_1 и A_2 в момент времени:

$$t - \Delta t, t, t + \Delta t$$

Имея значения координат точки A_2 в основном и вспомогательных положениях, проекции скорости и ускорения можно определить с помощью уравнений (2.67) и (2.69).

2. РАСЧЕТНАЯ ЧАСТЬ

Цель расчетной части — систематизировать полученные теоретические знания и практические навыки выполняя конкретное исследование кинематического анализа механизма средствами математического моделирования. Приложение А содержит варианты индивидуальных заданий.

2.1. Последовательность выполнения и оформления работы

Получив задание, студенты выполняют часть пунктов без использования ЭВМ:

1. Постановка задачи.
2. Математическое описание задачи.
3. Разработка вычислительного алгоритма.

Этап может выполняться как на ЭВМ, так и без нее:

4. Разработка контрольного примера.

Этапы выполняемые на ЭВМ

5. Разработка текста программы и его ввод.
6. Отладка программных модулей и программы в целом.
7. Получение и анализ результатов.

Получив на ЭВМ правильные результаты и листинг программы, завершают оформление работы.

Работа оформляется в соответствии с требованиями к оформлению текстовых документов на листах формата А4. Либо компьютерным набором, либо частично рукописным.

В качестве примера рассмотрим детально процесс выполнения кинематического анализа поэтапно.

Перед выполнением постановки задачи, рассматривают заданную кинематическую схему механизма, исходные данные и их конкретные числовые значения, а также величины подлежащие определению. На основе изучения перечисленных характеристик формируют постановку задачи, которая резюмирует, что задано и, что необходимо определить.

Задача структурного анализа — понять строение механизма: последовательность, класс и вид групп Ассура, присоединяемых к механизму первого класса в процессе образования механизма.

Выяснив строение механизма, для каждой структурной группы записывают по два уравнения связей, налагаемых звеньями и кинематическими парами на внутреннюю пару группы. Записывают уравнения по которым возможно определить параметры присоединения следующей структурной группы, если эта точка не совпадает с элементами внутренних кинематических пар.

Математическая модель кинематического исследования механизма в целом содержит последовательную совокупность математических моделей (уравнений связей) кинематического анализа отдельных структурных групп, входящих в состав исследуемого механизма.

Уравнения вычислительного алгоритма задачи — это последовательная совокупность уравнений, при помощи которых, учитывая величины, заданные постановкой задачи, можно определить искомые кинематические параметры. Как отмечалось ранее, эти уравнения выводятся из уравнений математической модели задачи, разрешенных относительно искомых величин.

Контрольный расчет искомых величин искомых параметров рекомендуется выполнить для конфигурации звеньев механизма, соответствующие третьему положению кривошипа, считая заданное (крайнее $\varphi = \varphi_0$) первым. При этом в выбранных масштабах μ_ℓ , μ_V и μ_a следует построить соответственно план механизма, план скоростей и план ускорений. Построения можно выполнять в карандаше на листе выбранного формата, но удобнее и точнее эти построения можно выполнить средствами CAD системы, при этом план механизма удобно изобразить в масштабе 1:1, в планах скоростей изобразить вектор скорости V_A отрезком 100 мм, а вектор ускорения a_A отрезком 200 мм. Из этих планов, учитывая масштабные коэффициенты, находят координаты, проекции скоростей и проекции ускорений характерных точек механизма A, B, C, D .

Получив результаты различными способами, сравнивают их. Если они совпадают (в пределах погрешности до 5%), то задача считается решенной, если не совпадают, ищут ошибки, после исправления, которых результаты совпадают.

2.2. Пример выполнения работы

Постановка задачи

Для механизма подачи заготовок (рис. 3.1) дано:

$n_2 = 100 \text{ мин}^{-1}$; $\varphi_0 = 167.324^\circ$; $\Delta\varphi = 30^\circ$; $X_0 = Y_0 = 0$; $X_E = -0.8 \text{ м}$;
 $Y_E = -0.2 \text{ м}$; $Y_D = Y_F = 0.4 \text{ м}$; $l_{OA} = 0.1 \text{ м}$; $l_{AB} = 0.8 \text{ м}$; $l_{BE} = 0.4 \text{ м}$;
 $l_{CE} = 0.55 \text{ м}$; $l_{CD} = 0.2 \text{ м}$.

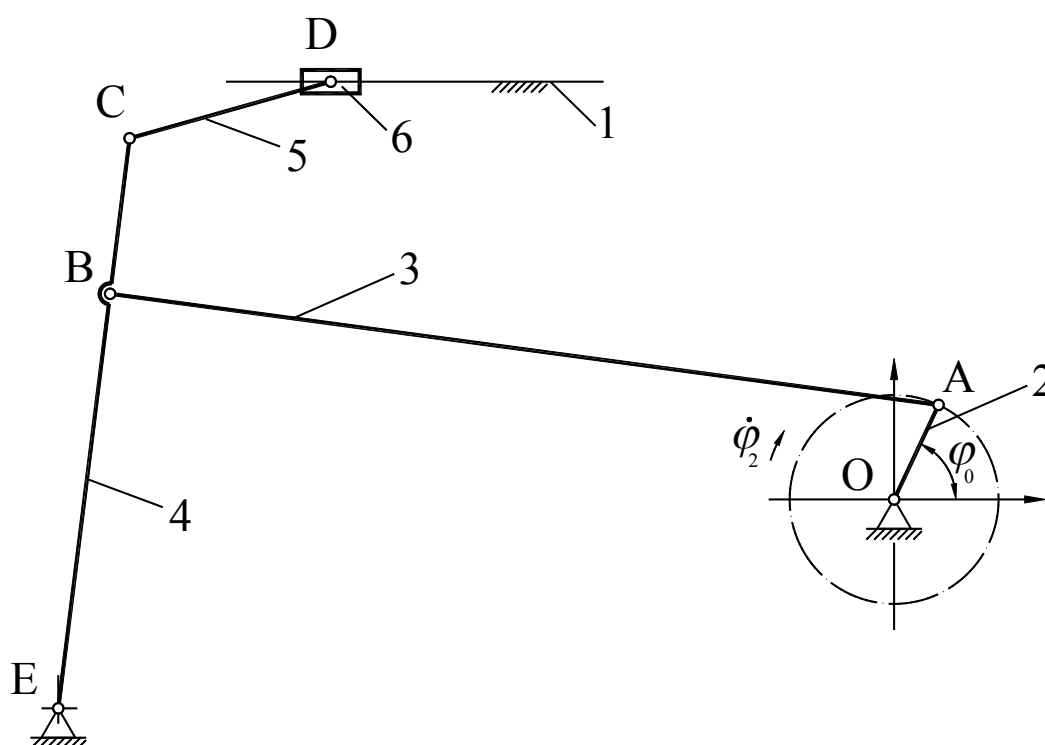


Рисунок 3.1 — Кинематическая схема механизма подачи заготовок

Определить координаты, проекции скоростей и проекции ускорений точек A , B , C , D для 12 равноотстоящих положений кривошипа, определяемые углами φ_0 и $\Delta\varphi$, $\varphi_2(i) \forall i = 1 \dots 12$.

Структурный анализ механизма

Механизм подачи заготовок образован последовательным присоединением к механизму 1-го класса структурных групп 2-го класса ВВВ и ВВП.

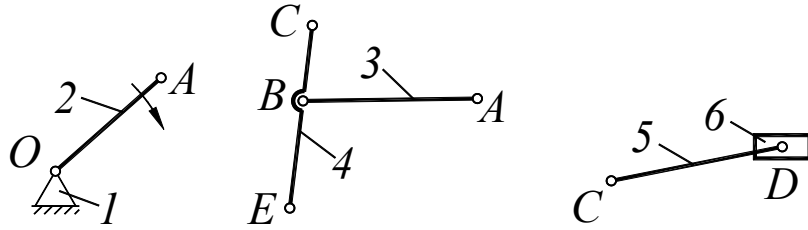


Рисунок 3.2 — Структурные группы механизма подачи заготовок

Математическая модель

Математическая модель кинематического исследования механизма в целом содержит последовательную совокупность математических моделей (уравнений связей) кинематического анализа отдельных структурных групп, которые входят в состав механизма.

Для жесткого звена 2 по заданному закону равномерного вращения кривошипа OA можно записать:

$$\begin{cases} \varphi_2 = \omega_2 \cdot t = \frac{\pi \cdot n_2}{30} \cdot t \\ X_{OA}^2 + Y_{OA}^2 = \ell_{OA}^2 \end{cases} \quad (3.1)$$

Координаты точки B , которая принадлежит одновременно жестким звеньям 3 и 4, связаны с координатами крайних пар этих звеньев уравнениями:

$$\begin{cases} X_{BA}^2 + Y_{BA}^2 = \ell_{BA}^2 \\ X_{BE}^2 + Y_{BE}^2 = \ell_{BE}^2 \end{cases} \quad (3.2)$$

По известным координатам точек B и E прямолинейного коромысла (жесткого звена 4), координаты третьей точки C этого звена, расположенной на расстоянии ℓ_{CE} от точки E , можно определить из пропорции (теорема подобия):

$$\begin{cases} X_C = X_E + X_{BE} \cdot \frac{\ell_{CE}}{\ell_{BE}} \\ Y_C = Y_E + Y_{BE} \cdot \frac{\ell_{CE}}{\ell_{BE}} \end{cases} \quad (3.3)$$

Уравнения связей, налагаемых на точку D жестким звеном 5 и горизонтальным направляющим звеном 1, имеют вид:

$$\begin{cases} X_{CD}^2 + Y_{CD}^2 = \ell_{CD}^2 \\ Y_D = 0.4 \text{ const} \end{cases} \quad (3.4)$$

Система уравнений (3.1–3.4) — математическая модель кинематического исследования рассматриваемого механизма.

Вычислительный механизм

Уравнения вычислительного алгоритма — последовательная совокупность уравнений, при помощи которых, учитывая величины, заданные постановкой задачи и определенных на предыдущих этапах расчетов, можно найти искомые кинематические параметры. Эти уравнения в процессе решения первой задачи кинематического анализа выводятся непосредственно из уравнений математической модели задачи, разрешенных относительно искомых координат точек.

Решая вторую и третью задачи анализа, уравнения (3.1–3.4) необходимо предварительно продифференцировать по времени соответственно один раз или дважды и только после этого последовательно определять искомые проекции скоростей и ускорений точек A , B , C , D .

Для рассматриваемой задачи уравнения вычислительного алгоритма можно выписать в такой последовательности:

– механизм 1-го класса

$$\begin{aligned} X_A &= \ell_{OA} \cdot \cos \varphi_2; \\ Y_A &= \ell_{OA} \cdot \sin \varphi_2; \\ \dot{X}_A &= -\dot{\varphi}_2 \cdot \ell_{OA} \cdot \sin \varphi_2; \\ \dot{Y}_A &= \dot{\varphi}_2 \cdot \ell_{OA} \cdot \cos \varphi_2; \\ \ddot{X}_A &= -\dot{\varphi}_2^2 \cdot \ell_{OA} \cdot \cos \varphi_2; \\ \ddot{Y}_A &= -\dot{\varphi}_2^2 \cdot \ell_{OA} \cdot \sin \varphi_2, \end{aligned}$$

где $\dot{\varphi}_2$ — угловая скорость кривошипа (звена 2), с^{-1} .

– структурная группа Ассур 2-го класса первого вида (ВВВ)

$$\begin{cases} X_B = X_A + \frac{1}{M^2} \cdot (K \cdot X_{EA} - \delta_1 \cdot L \cdot Y_{EA}) \\ Y_B = Y_A + \frac{1}{M^2} \cdot (K \cdot Y_{EA} + \delta_1 \cdot L \cdot X_{EA}) \end{cases},$$

где $M^2 = X_{EA}^2 + Y_{EA}^2$; $K = (\ell_{AB}^2 + M^2 - \ell_{BE}^2) / 2$; $L = \sqrt{\ell_{AB}^2 \cdot M^2 - K^2}$;

$X_{EA} = X_E - X_A$; $Y_{EA} = Y_E - Y_A$; $\delta_1 = -1$ — коэффициент схемы сборки структурной группы звеньев 3–4 (ВВВ);

$$\begin{cases} \dot{X}_B = \frac{A_1 \cdot Y_{BE} - A_2 \cdot Y_{BA}}{X_{BA} \cdot Y_{BE} - X_{BE} \cdot Y_{BA}} \\ \dot{Y}_B = \frac{A_2 \cdot X_{BA} - A_1 \cdot X_{BE}}{X_{BA} \cdot Y_{BE} - X_{BE} \cdot Y_{BA}} \end{cases},$$

где $A_1 = \dot{X}_A \cdot X_{BA} + \dot{Y}_A \cdot Y_{BA}$; $A_2 = \dot{X}_E \cdot X_{BE} + \dot{Y}_E \cdot Y_{BE}$, так как точка E неподвижна, то $A_2 = 0$;

$$\begin{cases} \ddot{X}_B = \frac{B_1 \cdot Y_{BE} - B_2 \cdot Y_{BA}}{X_{BA} \cdot Y_{BE} - X_{BE} \cdot Y_{BA}} \\ \ddot{Y}_B = \frac{B_2 \cdot X_{BA} - B_1 \cdot X_{BE}}{X_{BA} \cdot Y_{BE} - X_{BE} \cdot Y_{BA}} \end{cases},$$

где $B_1 = \ddot{X}_A \cdot X_{BA} + \ddot{Y}_A \cdot Y_{BA} - \dot{X}_{BA}^2 - \dot{Y}_{BA}^2$;

$B_2 = \ddot{X}_E \cdot X_{BE} + \ddot{Y}_E \cdot Y_{BE} - \dot{X}_{BE}^2 - \dot{Y}_{BE}^2$.

– теорема подобия

$$\begin{cases} X_C = X_E + X_{BE} \cdot \frac{\ell_{CE}}{\ell_{BE}} \\ Y_C = Y_E + Y_{BE} \cdot \frac{\ell_{CE}}{\ell_{BE}} \end{cases},$$

$$\begin{cases} \dot{X}_C = \dot{X}_E + \dot{X}_{BE} \cdot \frac{l_{CE}}{l_{BE}}; \\ \dot{Y}_C = \dot{Y}_E + \dot{Y}_{BE} \cdot \frac{l_{CE}}{l_{BE}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{X}_C = \ddot{X}_E + \ddot{X}_{BE} \cdot \frac{l_{CE}}{l_{BE}}; \\ \ddot{Y}_C = \ddot{Y}_E + \ddot{Y}_{BE} \cdot \frac{l_{CE}}{l_{BE}} \end{cases}$$

– структурная группа Ассура 2-го класса второго вида (ВВП)

$$\begin{cases} X_D = X_C + \delta_2 \cdot \sqrt{l_{CD}^2 - Y_{DC}^2}; \\ Y_D = 0.4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{X}_D = \dot{X}_C + \dot{Y}_C \cdot \frac{Y_{DC}}{X_{DC}}; \\ \dot{Y}_D = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{X}_D = \ddot{X}_C + \ddot{Y}_C \cdot \frac{Y_{DC}}{X_{DC}} - \frac{\dot{X}_{DC}^2 + \dot{Y}_{DC}^2}{X_{DC}}; \\ \ddot{Y}_D = 0 \end{cases}$$

Алгоритм решаемой задачи включает 24 уравнения, при помощи которых можно определить 24 искомым параметра для одного положения механизма, определяемым обобщенным параметром φ_2 .

Разработав по приведенному алгоритму циклическую программу, можно получить искомые параметры для всех 12 положений кривошипа, а при необходимости, уменьшая $\Delta\varphi$, и большего количества положений.

Разработка контрольного примера

Чтобы убедиться в правильности алгоритма программы и полученных результатов, разрабатывают тестовую задачу, которая предоставит возможность проверить все элементы алгоритма. Тестовая задача или контрольный пример — по сути, решенный вариант задачи, желательно иным способом, для проверки правильности работы алгоритма и

программы, когда для известных исходных данных наперед известны правильные ответы.

При этом кинематические параметры — координаты, проекции скоростей и ускорений характерных точек механизма — определяют графо-аналитическим методом соответственно из плана положений механизма, плана скоростей и плана ускорений. Построение плана механизма выполняют способом засечек в выбранном масштабе. При построении средствами САД, рекомендуется выполнять план механизма в натуральную величину. В качестве первого положения принимаем крайнее левое положение ползуна б, обычно оно совпадает с заданным в задании положением. Строим план третьего положения механизма, определяемый положением кривошипа, повернутым на угол $2\Delta\varphi$ в направлении вращения. Для исследуемой конфигурации механизма строим план скоростей и план ускорений в выбранном масштабе. Планы скоростей и ускорений являются графическим решением векторных уравнений, из этих решений находим искомые параметры: $\dot{X}_A, \dot{X}_B, \dot{X}_C, \dot{X}_D, \ddot{X}_A, \ddot{X}_B, \ddot{X}_C, \ddot{X}_D$. Расчеты удобно выполнять в среде Excel.

Найденные параметры применяются для отладки алгоритма и программы выполнения задачи. Пример выполнения графических построений представлен на рисунке 3.3.

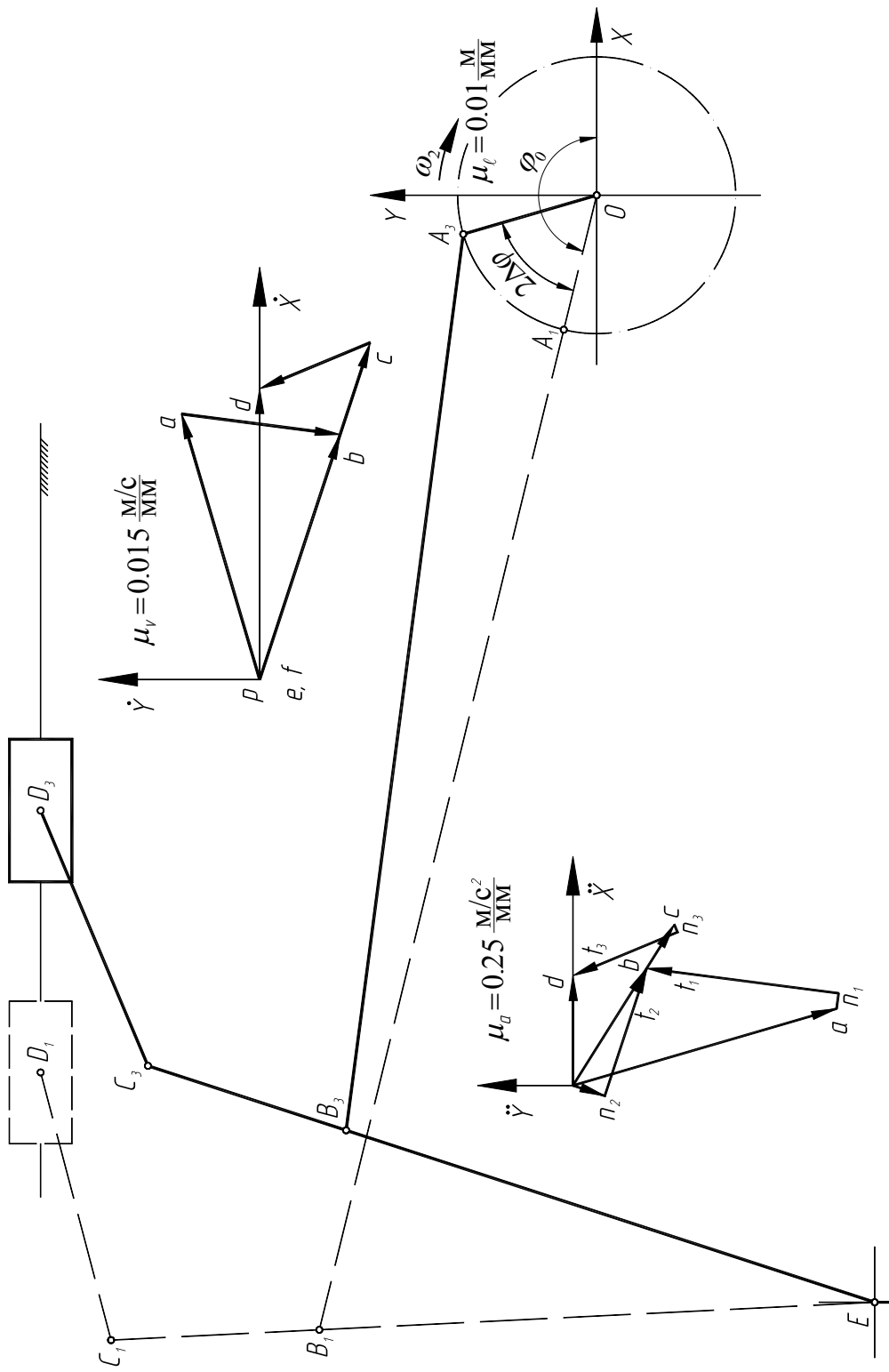


Рисунок 3.3 — Пример выполнения графической части задачи

2.3. Программные модули реализации математической модели

Разрабатываемая программа кинематического исследования плоских рычажных механизмов ориентирована на конкретное и подробное ознакомление студентов с этапами программирования и решения задачи на ЭВМ.

В общем случае программа состоит из основного модуля и подпрограмм набора модулей реализующих те или иные модели структурных групп, а также сопутствующие функции. Предлагается к использованию язык программирования BASIC или ему подобный, это устаревшая версия, но она наиболее подходит. Мы реализуем только математические выражения, современные версии Visual BASIC также могут использоваться, но большую часть времени займет программирование не задачи, а визуального интерфейса.

Основной модуль содержит декларационную часть, объявления констант, функций, переменных, резервирование памяти для массивов и расчетную часть – включающую последовательность вызовов соответствующих модулей в последовательности определяемым структурным анализом рассматриваемого механизма.

Примеры программного кода представлены в приложении Б.

Задание 1.

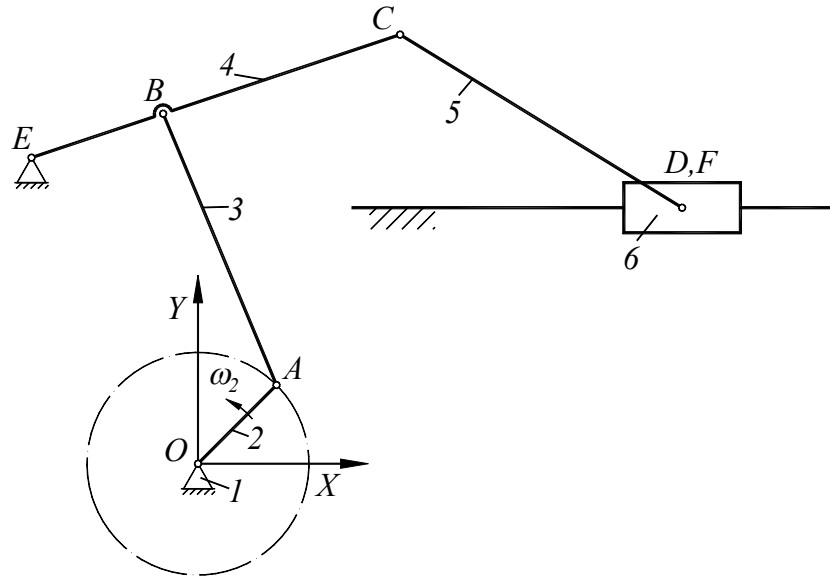


Рисунок А.1 — Кинематическая схема горизонтально-кузнечной машины

Параметры	Обозначение	Идентификатор	Вариант				
			1	2	3	4	5
Частота вращения кривошипа, мин^{-1}	n	N	140	138	136	132	130
Начальный угол, град	φ_0	$F0$	274.5	240.7	264.9	252.8	253.9
Угловой шаг, град	$\Delta\varphi$	$DF0$	36	45	30	36	45
Координаты, неподвижных точек и направляющих, м	X_E	XE	-0.2	0.0	-0.15	-0.15	-0.15
	Y_E	YE	0.25	0.30	0.30	0.30	0.23
	$Y_D = Y_F$	YF	0.25	0.30	0.30	0.30	0.23
Длины звеньев, м	l_{OA}	$L2$	0.035	0.032	0.038	0.047	0.032
	l_{AB}	$L3$	0.301	0.397	0.362	0.395	0.292
	l_{BE}	$L4$	0.18	0.18	0.18	0.25	0.18
	l_{CD}	$L5$	0.34	0.30	0.31	0.33	0.30
	l_{EC}	$L7$	0.34	0.30	0.31	0.33	0.30
Коэффициенты схем сборки групп: $D_1 = -1$; $D_2 = 0$; $D_3 = 1$							

Задание 2.

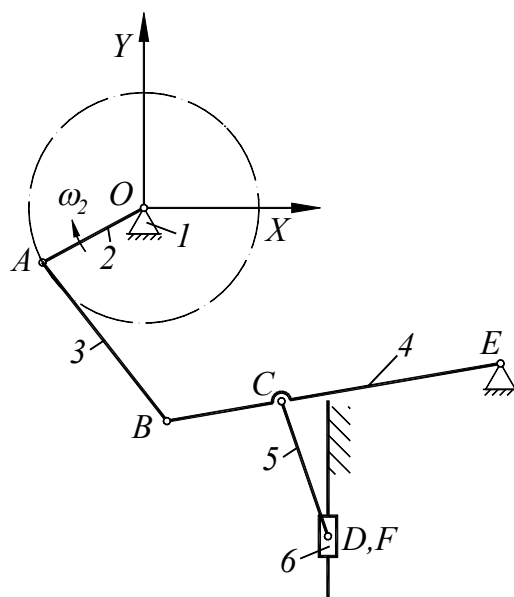


Рисунок А.2 — Кинематическая схема прессы для получения изделий из порошков

Параметры	Обозначение	Идентификатор	Вариант				
			1	2	3	4	5
Частота вращения кривошипа, мин^{-1}	n	N	-190	-200	-210	-220	-230
Начальный угол, град	φ_0	$F0$	255.9	253.2	102.6	260.7	252.0
Угловой шаг, град	$\Delta\varphi$	$DF0$	-30	-45	-36	-30	-45
Координаты, неподвижных точек и направляющих, м	X_E	XE	0.40	0.35	0.43	0.82	0.70
	Y_E	YE	-0.20	-0.15	-0.25	-0.60	-0.30
	$Y_D = Y_F$	YF	0.25	0.20	0.30	0.70	0.40
Длины звеньев, м	l_{OA}	$L2$	0.115	0.100	0.122	0.303	0.221
	l_{AB}	$L3$	0.224	0.186	0.252	0.625	0.420
	l_{BE}	$L4$	0.500	0.450	0.420	1.020	0.950
	l_{CD}	$L5$	0.350	0.320	0.300	0.500	0.300
	l_{EC}	$L7$	0.350	0.320	0.300	0.500	0.300
Коэффициенты схем сборки групп: $D_1 = -1$; $D_2 = 0$; $D_3 = -1$							

Задание 3.

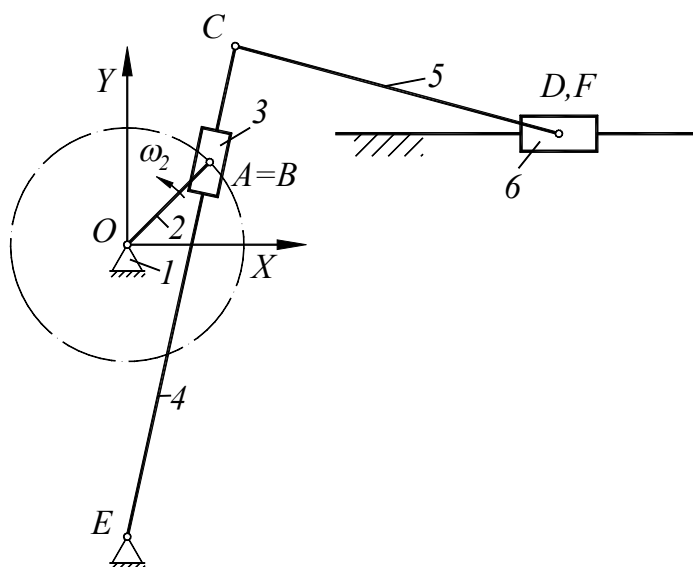


Рисунок А.3 — Кинематическая схема поперечно-строгального станка с верхней тягой

Параметры	Обозначение	Идентификатор	Вариант				
			1	2	3	4	5
Частота вращения кривошипа, мин^{-1}	n	N	50	60	65	70	75
Начальный угол, град	φ_0	$F0$	334.28	333.16	339.23	337.92	342.0
Угловой шаг, град	$\Delta\varphi$	$DF0$	36	45	30	36	45
Координаты, неподвижных точек и направляющих, м	X_E	XE	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	Y_E	YE	-0.19	-0.25	-0.25	-0.30	-0.22
	$Y_D = Y_F$	YF	0.162	0.176	0.253	0.239	0.219
Длины звеньев, м	l_{OA}	$L2$	0.082	0.113	0.089	0.113	0.068
	l_{CD}	$L5$	0.125	0.150	0.170	0.180	0.150
	l_{EC}	$L7$	0.370	0.450	0.520	0.560	0.450
Коэффициенты схем сборки групп: $D_1 = 0$; $D_2 = 0$; $D_3 = 1$							

Задание 4.

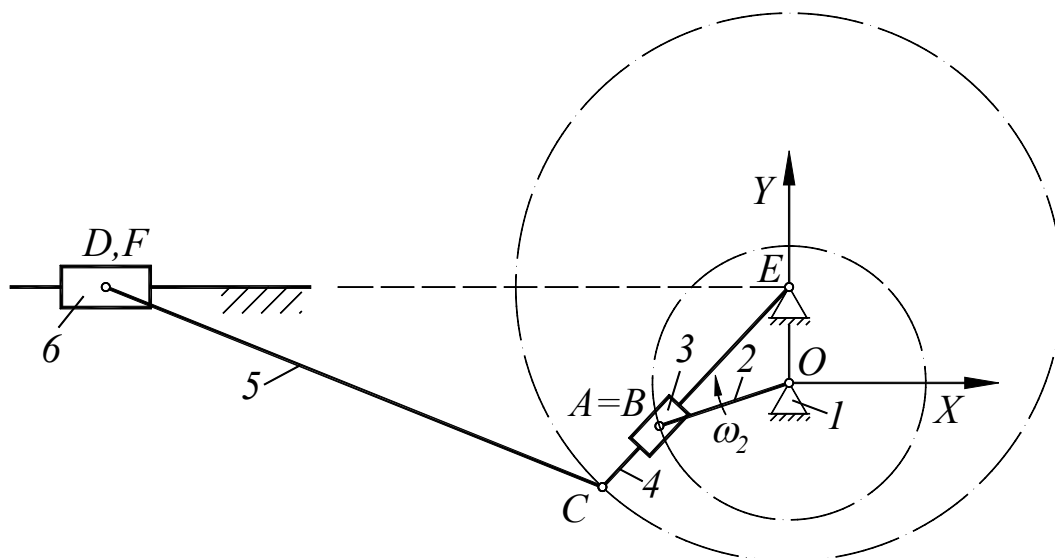


Рисунок А.4 — Кинематическая схема поперечно-строгального станка с вращающейся кулисой

Параметры	Обозначение	Идентификатор	Вариант				
			1	2	3	4	5
Частота вращения кривошипа, МИН^{-1}	n	N	-50	-55	-60	-65	-70
Начальный угол, град	φ_0	$F0$	25.714	30.0	27.931	30.0	25.714
Угловой шаг, град	$\Delta\varphi$	$DF0$	-36	-30	-45	-36	-30
Координаты, неподвижных точек и направляющих, м	X_E	XE	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	Y_E	YE	0.080	0.090	0.095	0.100	0.110
	$Y_D = Y_F$	YF	0.080	0.090	0.095	0.100	0.110
Длины звеньев, м	l_{OA}	$L2$	0.184	0.180	0.203	0.200	0.254
	l_{CD}	$L5$	1.000	1.000	1.100	1.200	1.300
	l_{EC}	$L7$	0.300	0.320	0.350	0.400	0.410
Коэффициенты схем сборки групп: $D_1 = 0$; $D_2 = 0$; $D_3 = -1$							

Задание 5.

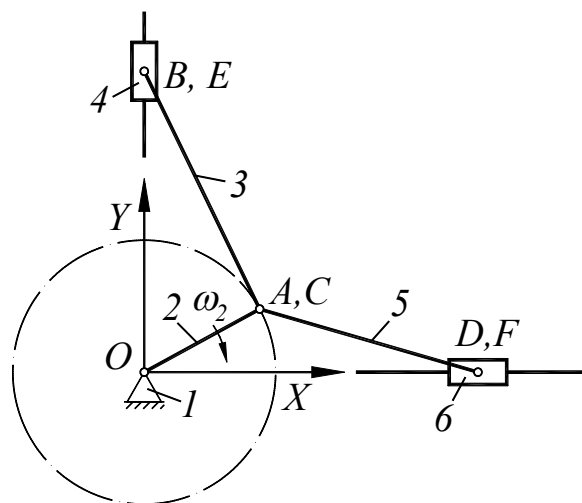


Рисунок А.5 — Кинематическая схема двухступенчатого компрессора

Параметры	Обозначение	Идентификатор	Вариант				
			1	2	3	4	5
Частота вращения кривошипа, мин^{-1}	n	N	-800	-780	-750	-760	-800
Начальный угол, град	φ_0	$F0$	0.0	90.0	0.0	90.0	0.0
Угловой шаг, град	$\Delta\varphi$	$DF0$	36	45	-36	-30	-45
Координаты, неподвижных точек и направляющих, м	$X_B = X_E$	XE	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	$Y_D = Y_F$	YE	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Длины звеньев, м	l_{OA}	$L2$	0.250	0.260	0.245	0.260	0.255
	l_{AB}	$L3$	1.025	1.040	0.833	0.988	0.944
	l_{AD}	$L5$	0.683	0.745	0.520	0.660	0.630
	l_{AC}	$L7$	1.2 E-10				
Коэффициенты схем сборки групп: $D_1 = 1$; $D_2 = 0$; $D_3 = 1$							

Задание 6.

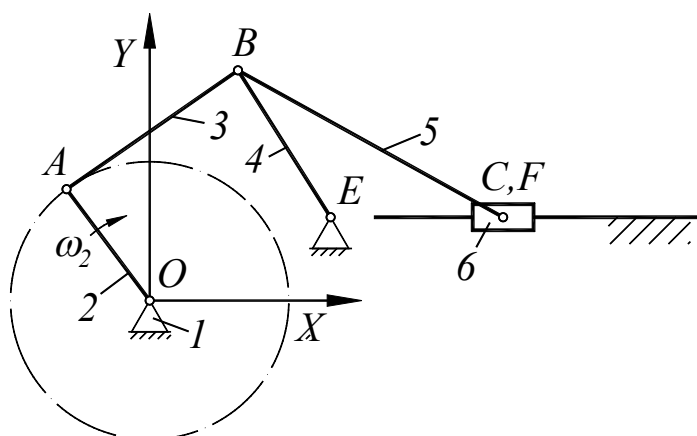


Рисунок А.6 — Кинематическая схема двухкривошипного качающегося конвейера

Параметры	Обозначение	Идентификатор	Вариант				
			1	2	3	4	5
Частота вращения кривошипа, мин^{-1}	n	N	-60	-65	-70	-75	-80
Начальный угол, град	φ_0	$F0$	228.55	228.08	229.05	228.53	228.12
Угловой шаг, град	$\Delta\varphi$	$DF0$	-45	-36	-30	-45	-36
Координаты, неподвижных точек и направляющих, м	X_E	XE	0.030	0.022	0.028	0.042	0.032
	Y_E	YE	0.025	0.018	0.022	0.035	0.028
	$Y_F = Y_C$	YC	0.025	0.018	0.022	0.035	0.028
Длины звеньев, м	l_{OA}	$L2$	0.100	0.070	0.090	0.140	0.110
	l_{AB}	$L3$	0.100	0.070	0.090	0.140	0.110
	l_{BE}	$L4$	0.100	0.070	0.090	0.140	0.110
	l_{BC}	$L5$	0.600	0.420	0.540	0.840	0.700
Коэффициенты схем сборки групп: $D_1 = 1$; $D_2 = 1$; $D_3 = 0$							

Задание 7.

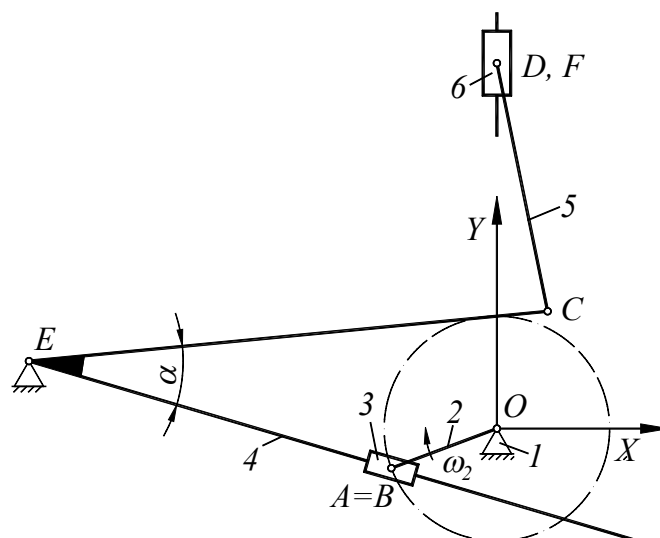


Рисунок А.7 — Кинематическая схема механизма долбежного станка с качающейся кулисой

Параметры	Обозначение	Идентификатор	Вариант				
			1	2	3	4	5
Частота вращения кривошипа, мин^{-1}	n	N	-22	-28	-30	-35	-40
Начальный угол, град	φ_0	$F0$	110.2 7	113.0 4	113.8 6	114.3 8	106.6 1
Угловой шаг, град	$\Delta\varphi$	$DF0$	-36	-30	-45	-36	-30
Координаты, неподвижных точек и направляющих, м	X_E	XE	-0.35	-0.37	-0.39	-0.40	-0.42
	Y_E	YE	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10
	$X_F = X_D$	XF	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Длины звеньев, м	l_{OA}	$L2$	0.180	0.209	0.231	0.247	0.216
	l_{CD}	$L5$	0.41	0.45	0.48	0.50	0.53
	l_{EC}	$L7$	0.500	0.550	0.600	0.625	0.650
	α	AL°	15	15	15	17	17
Коэффициенты схем сборки групп: $D_1 = 0$; $D_2 = 1$; $D_3 = 1$							

Задание 8.

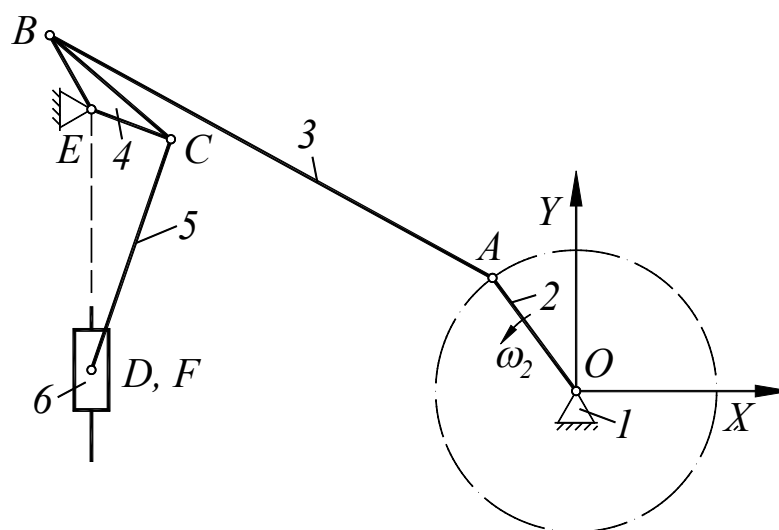


Рисунок А.8 — Кинематическая схема механизма штамповочного прессы

Параметры	Обозначение	Идентификатор	Вариант				
			1	2	3	4	5
Частота вращения кривошипа, мин ⁻¹	n	N	50	55	60	65	70
Начальный угол, град	φ_0	$F0$	161.48	161.65	161.81	161.97	161.12
Угловой шаг, град	$\Delta\varphi$	$DF0$	36	45	30	36	45
Координаты, неподвижных точек и направляющих, м	X_E	XE	-0.91	-1.01	-1.11	-1.21	-1.31
	Y_E	YE	0.20	0.21	0.22	0.23	0.24
	$X_F = X_D$	XF	-0.91	-1.01	-1.11	-1.21	-1.31
Длины звеньев, м	l_{OA}	$L2$	0.10	0.11	0.12	0.13	0.14
	l_{AB}	$L3$	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
	l_{BE}	$L4$	0.20	0.22	0.24	0.26	0.28
	l_{CD}	$L5$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70
	l_{EC}	$L7$	0.20	0.22	0.24	0.26	0.28
	l_{BC}	$L8$	0.376	0.414	0.451	0.489	0.526
Коэффициенты схем сборки групп: $D_1 = -1$; $D_2 = -1$; $D_3 = -1$							

Задание 9.

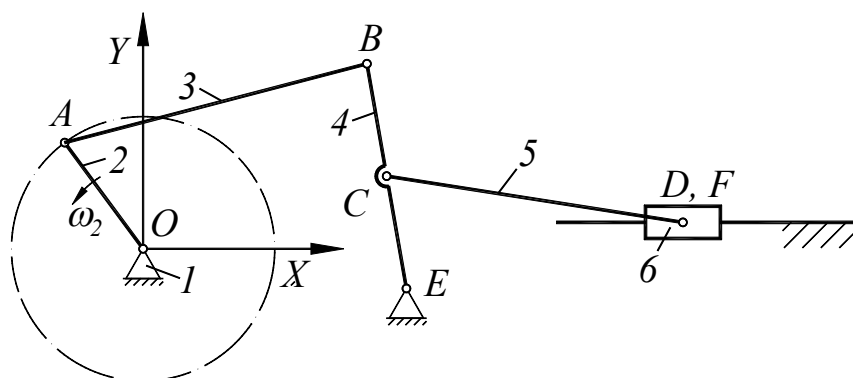


Рисунок А.9 — Кинематическая схема механизма подачи заготовки

Параметры	Обозначение	Идентификатор	Вариант				
			1	2	3	4	5
Частота вращения кривошипа, мин^{-1}	n	N	110	120	130	140	150
Начальный угол, град	φ_0	$F0$	227.4	231.1	230.2	231.3	236.4
Угловой шаг, град	$\Delta\varphi$	$DF0$	36	45	30	36	45
Координаты, неподвижных точек и направляющих, м	X_E	XE	0.54	0.56	0.58	0.60	0.61
	Y_E	YE	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	$Y_D = Y_F$	YF	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Длины звеньев, м	l_{OA}	$L2$	0.20	0.25	0.25	0.25	0.30
	l_{AB}	$L3$	0.70	0.75	0.80	0.80	0.75
	l_{BE}	$L4$	0.42	0.46	0.48	0.50	0.52
	l_{CD}	$L5$	0.63	0.66	0.70	0.75	0.80
	l_{EC}	$L7$	0.21	0.23	0.24	0.25	0.26
	l_{BC}	$L8$	0.21	0.23	0.24	0.25	0.26
Коэффициенты схем сборки групп: $D_1 = 1$; $D_2 = 0$; $D_3 = 1$							

Задание 10.

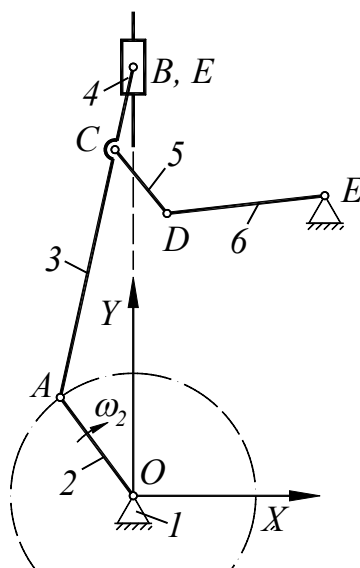


Рисунок А.10 — Кинематическая схема механизма прессы

Параметры	Обозначение	Идентификатор	Вариант				
			1	2	3	4	5
Частота вращения кривошипа, мин^{-1}	n	N	-600	-500	-300	-300	-250
Начальный угол, град	φ_0	$F0$	90	90	90	90	90
Угловой шаг, град	$\Delta\varphi$	$DF0$	-45	-36	-30	-45	-36
Координаты, неподвижных точек и направляющих, м	$X_E = X_B$	XE	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	X_F	XF	0.53	0.54	0.54	0.56	0.55
	Y_F	YF	0.750	0.755	0.740	0.780	0.760
Длины звеньев, м	l_{OA}	$L2$	0.250	0.260	0.245	0.260	0.255
	l_{AB}	$L3$	1.250	1.300	1.225	1.260	1.275
	l_{CD}	$L5$	0.275	0.280	0.270	0.260	0.275
	l_{DF}	$L6$	0.50	0.51	0.50	0.52	0.52
	l_{AC}	$L7$	0.875	0.905	0.855	0.880	0.875
	l_{BC}	$L8$	0.375	0.395	0.370	0.380	0.400
Коэффициенты схем сборки групп: $D_1 = 1$; $D_2 = 0$; $D_3 = -1$							

Приложение Б

Тексты модулей, реализующих расчетную часть

Листинг основного модуля

' Постановка задачи индивидуальна зависит от задания и варианта

CONST N = 140, F0 = 274.5, DF0 = 36, xe = -.2, ye = .25, yf = .25, L2 =
.035

CONST L3 = .301, L4 = .18, L5 = .34, L7 = .34, L8 = .16

CONST D1 = -1, D2 = 0, D3 = 1

TYPE tochka

x AS SINGLE

y AS SINGLE

Vx AS SINGLE

Vy AS SINGLE

ax AS SINGLE

ay AS SINGLE

END TYPE

COMMON SHARED np, fi, DF, FileName\$, w

CLS

init

DIM SHARED A(np) AS tochka, B(np) AS tochka, C(np) AS tochka, D(np)
AS tochka

DIM SHARED E AS tochka, F AS tochka, Curfi(np)

FOR i% = 1 TO UBOUND(A)

IF fi > 8 * ATN(1) THEN fi = fi - 8 * ATN(1)

Curfi(i%) = RadGrad(fi, 2)

Mex1klassa A(i%)

'Перечень и последовательность этих модулей определяются структурой
механизма

GroupBBB A(i%), B(i%), E, L3, L4, D1

TheoremaPod A(i%), B(i%), C(i%), L7, L4

GroupBBP C(i%), D(i%), F, L5, D3

'Далее всем подходит

fi = fi + DF

NEXT i%

PrintResult "Таблица координат точек", 1

```

PrintResult "Таблица проекций скоростей точек", 2
PrintResult "Таблица проекций ускорений точек", 3
END

```

Модуль печати результатов

```

SUB PrintResult (Nazvanie$, flag)

```

```

COLOR 7, 1: CLS : Strok = 7

```

```

formatX$ = " | ### x | #####.### | #####.### | #####.### | #####.### | "

```

```

formatY$ = " | #####.## | #####.### | #####.### | #####.### | #####.###

```

```

| "

```

```

SELECT CASE flag

```

```

CASE 1

```

```

OPEN FileName$ FOR OUTPUT AS #1

```

```

CASE ELSE

```

```

OPEN FileName$ FOR APPEND AS #1

```

```

END SELECT

```

```

PRINT #1, SPACES$(20); Nazvanie$

```

```

PRINT #1,

```

```

" |-----|-----|-----|-----|
  |-----|
  "

```

```

SELECT CASE flag

```

```

CASE 1

```

```

PRINT #1, " | № | A Xa/Ya | B Xb/Yb | C Xc/Yc | D Xd/Yd | "

```

```

CASE 2

```

```

PRINT #1, " | № | A Vx/Vy | B Vx/Vy | C Vx/Vy | D Vx/Vy | "

```

```

CASE 3

```

```

PRINT #1, " | № | A ax/ay | B ax/ay | C ax/ay | D ax/ay | "

```

```

END SELECT

```

```

PRINT #1,

```

```

" |-----|-----|-----|-----|
  |-----|
  "

```

```

FOR i% = 1 TO UBOUND(A)

```

```

SELECT CASE flag

```

```

CASE 1

```

```

PRINT #1, USING formatX$; i%; A(i%).x; B(i%).x; C(i%).x; D(i%).x

```

```

    PRINT #1, USING formatY$; Curfi(i%); A(i%).y; B(i%).y; C(i%).y;
D(i%).y
CASE 2
    PRINT #1, USING formatX$; i%; A(i%).Vx; B(i%).Vx; C(i%).Vx;
D(i%).Vx
    PRINT #1, USING formatY$; Curfi(i%); A(i%).Vy; B(i%).Vy; C(i%).Vy;
D(i%).Vy
CASE 3
    PRINT #1, USING formatX$; i%; A(i%).ax; B(i%).ax; C(i%).ax; D(i%).ax
    PRINT #1, USING formatY$; Curfi(i%); A(i%).ay; B(i%).ay; C(i%).ay;
D(i%).ay
END SELECT
IF FileName$ = "CON" AND (i% / StroK = INT(i% / StroK)) THEN
    PRINT #1,
" |-----|-----|-----|-----|
|-----| "
    LockTbl
    SLEEP
    CLS
    PRINT SPACES$(30); "Продолжение таблицы"
    PRINT #1,
" |-----|-----|-----|-----|
|-----| "
    SELECT CASE flag
    CASE 1
    PRINT #1, " | № | A Xa/Ya | B Xb/Yb | C Xc/Yc | D Xd/Yd | "
    CASE 2
    PRINT #1, " | № | A Vx/Vy | B Vx/Vy | C Vx/Vy | D Vx/Vy | "
    CASE 3
    PRINT #1, " | № | A ax/ay | B ax/ay | C ax/ay | D ax/ay | "
    END SELECT
PRINT #1,
" |-----|-----|-----|-----|
|-----| "
END IF

```

```

NEXT i%
PRINT #1,
" |-----|-----|-----|
|-----| "
CLOSE #1
IF FileName$ = "CON" THEN LockTbl
SLEEP
END SUB

SUB LockTbl
LOCATE 23, 10
PRINT "Продолжить – пробел"
END SUB

```

Листинг реализации модели структурной группы Ассура механизма первого класса

```

SUB Mex1klassa (T1 AS tochka)
'Reализация модели механизма первого класса
T1.x = L2 * COS(fi)'Координата X точки
T1.y = L2 * SIN(fi)'Координата Y точки
T1.Vx = - w * L2 * SIN(fi)'Проекция скорости точки на ось X
T1.Vy = w * L2 * COS(fi)'Проекция скорости точки на ось Y
T1.ax = - w ^ 2 * L2 * COS(fi)'Проекция ускорения точки на ось X
T1.ay = - w ^ 2 * L2 * SIN(fi)'Проекция ускорения точки на ось Y
END SUB

```

Листинг реализации модели структурной группы Ассура второго класса первого вида (BBB)

```

SUB GroupBBB (T1 AS tochka, T2 AS tochka, T3 AS tochka, dL1, dL2,
koefSb)
'Reализация модели группы BBB
'T1 и T3 точки с известными параметрами, T2 – параметры искомой
точки
'dL1 и dL2 – известные длины звеньев; koefSb – коэффициент сборки
X1 = T3.x - T1.x

```

```

Y1 = T3.y - T1.y
M=X1^2+Y1^2
k = (dL1 ^ 2 + M - dL2 ^ 2) / 2
L = SQR(dL1 ^ 2 * M - k ^ 2)
T2.x = T1.x + (k * X1 - koefSb * L * Y1) / M
T2.y = T1.y + (k * Y1 + koefSb * L * X1) / M
x2 = T2.x - T1.x
y2 = T2.y - T1.y
x3 = T2.x - T3.x
y3 = T2.y - T3.y
A1 = T1.Vx * x2 + T1.Vy * y2
A2 = T3.Vx * x3 + T3.Vy * y3
z = x2 * y3 - y2 * x3
T2.Vx = (A1 * y3 - A2 * y2) / z
T2.Vy = (A2 * x2 - A1 * x3) / z
dVx1 = T2.Vx - T1.Vx
dVy1 = T2.Vy - T1.Vy
dVx2 = T2.Vx - T3.Vx
dVy2 = T2.Vy - T3.Vy
B1 = T1.ax * x2 + T1.ay * y2 - dVx1 ^ 2 - dVy1 ^ 2
B2 = T3.ax * x3 + T3.ay * y3 - dVx2 ^ 2 - dVy2 ^ 2
T2.ax = (B1 * y3 - B2 * y2) / z
T2.ay = (B2 * x2 - B1 * x3) / z
END SUB

```

Листинг реализации модели структурной группы Ассура второго класса второго вида (ВВП) с горизонтальным направляющим звеном

SUB GroupBBP (T1 AS точка, T2 AS точка, T3 AS точка, dL1, koefSb)

'Реализация группы ВВП с горизонтальным направляющим звеном

'T1 и T3 точки с известными параметрами, T2 – параметры искомой точки

' dL1 – известная длина звена – шатуна; koefSb – коэффициент сборки

T2.x = T1.x + koefSb * SQR(dL1 ^ 2 - (T3.y - T1.y) ^ 2)

T2.y = T3.y

X1 = T2.x - T1.x

```

Y1 = T2.y - T1.y
T2.Vx = T1.Vx + T1.Vy * Y1 / X1
T2.Vy = 0
dVx = T2.Vx - T1.Vx
dVy = T2.Vy - T1.Vy
T2.ax = T1.ax + (T1.ay * Y1 - dVx ^ 2 - dVy ^ 2) / X1
T2.ay = 0
END SUB

```

Листинг реализации модели структурной группы Ассура второго класса второго вида (ВВП) с вертикальным направляющим звеном

SUB GroupBBP (T1 AS tochka, T2 AS tochka, T3 AS tochka, dL1, koefSb)

'Реализация группы ВВП с вертикальным направляющим звеном

'T1 и T3 точки с известными параметрами, T2 – параметры искомой точки

' dL1 – известная длина звена – шатуна; ' koefSb – коэффициент сборки

```

T2.x = T3.x
T2.y = T1.y + koefSb * SQR(dL1 ^ 2 - (T3.x - T1.x) ^ 2)
X1 = T2.x - T1.x
Y1 = T2.y - T1.y
T2.Vx = 0
T2.Vy = T1.Vy + T1.Vx * X1 / Y1
dVx = T2.Vx - T1.Vx
dVy = T2.Vy - T1.Vy
T2.ax = 0
T2.ay = T1.ay + (T1.ax * X1 - dVx ^ 2 - dVy ^ 2) / Y1
END SUB

```

Листинг реализации модели структурной группы Ассура второго класса третьего вида (ВПВ)

SUB GroupBPB (T1 AS tochka, T2 AS tochka, T3 AS tochka)

'Реализация модели группы ВПВ кулисный механизм

'T1 и T3 точки с известными параметрами, T2 – параметры искомой точки

```

T2.x = T1.x

```

```

T2.y = T1.y
X1 = T1.x - T3.x
Y1 = T1.y - T3.y
M = X1 ^ 2 + Y1 ^ 2
A1 = 0
A2 = T1.Vx * Y1 - T1.Vy * X1
T2.Vx = (A1 * X1 + A2 * Y1) / M
T2.Vy = (A1 * Y1 - A2 * X1) / M
dVx1 = T2.Vx - T3.Vx
dVy1 = T2.Vy - T3.Vy
dVx2 = T2.Vx - T1.Vx
dVy2 = T2.Vy - T1.Vy
B1 = -(dVx1 ^ 2 + dVy1 ^ 2)
B2 = T1.ax * Y1 - T1.ay * X1 - 2 * (dVx2 * dVy1 - dVy2 * dVx1)
T2.ax = (B1 * X1 + B2 * Y1) / M
T2.ay = (B1 * Y1 - B2 * X1) / M
END SUB

```

Листинг реализации теоремы подобия для случая, когда все три точки находятся на одной прямой

```

SUB TheoremaPod (T1 AS tochka, T2 AS tochka, T3 AS tochka, dL1, dL2)
T2.x = T1.x + (T1.x - T3.x) * dL1 / dL2
T2.y = T1.y + (T1.y - T3.y) * dL1 / dL2
T2.Vx = T1.Vx + (T1.Vx - T3.Vx) * dL1 / dL2
T2.Vy = T1.Vy + (T1.Vy - T3.Vy) * dL1 / dL2
T2.ax = T1.ax + (T1.ax - T3.ax) * dL1 / dL2
T2.ay = T1.ay + (T1.ay - T3.ay) * dL1 / dL2
END SUB

```

Листинг реализации теоремы подобия для случая, когда точки не находятся на одной прямой

```

SUB TheoremaPod (T1 AS tochka, T2 AS tochka, T3 AS tochka, dL1, dL2,
koefSb)

```

'теорема подобия по варианту 7

'параметр dL2 передается как угол в радианах, а затем пересчитывается

на Lce

$$x1 = T1.x - T3.x$$

$$y1 = T1.y - T3.y$$

$$m = x1^2 + y1^2$$

$$dL2 = \text{SQR}(m + dL1^2 - 2 * \text{SQR}(dL1^2 * m) * \text{COS}(\text{ugol}))$$

$$k = (dL1^2 + m - dL2^2) / 2$$

$$L = \text{SQR}(dL1^2 * m - k^2)$$

$$T2.x = T3.x + (k * x1 - \text{koefSb} * L * y1) / m$$

$$T2.y = T3.y + (k * y1 + \text{koefSb} * L * x1) / m$$

$$T2.Vx = (k * T1.Vx - \text{koefSb} * L * T1.Vy) / m$$

$$T2.Vy = (k * T1.Vy + \text{koefSb} * L * T1.Vx) / m$$

$$T2.ax = (k * T1.ax - \text{koefSb} * L * T1.ay) / m$$

$$T2.ay = (k * T1.ay + \text{koefSb} * L * T1.ax) / m$$

END SUB

SUB TheoremaPod (T1 AS tochka, T2 AS tochka, T3 AS tochka, dL1, dL2,
koefSb)

'теорема подобия по варианту 8

$$x1 = T1.x - T3.x$$

$$y1 = T1.y - T3.y$$

$$m = x1^2 + y1^2$$

$$k = (dL1^2 + m - dL2^2) / 2$$

$$L = \text{SQR}(dL1^2 * m - k^2)$$

$$T2.x = T1.x + (k * x1 - \text{koefSb} * L * y1) / m$$

$$T2.y = T1.y + (k * y1 + \text{koefSb} * L * x1) / m$$

$$T2.Vx = T1.Vx + (k * T1.Vx - \text{koefSb} * L * T1.Vy) / m$$

$$T2.Vy = T1.Vy + (k * T1.Vy + \text{koefSb} * L * T1.Vx) / m$$

$$T2.Ax = T1.Ax + (k * T1.ax - \text{koefSb} * L * T1.ay) / m$$

$$T2.ay = T1.ay + (k * T1.ay + \text{koefSb} * L * T1.ax) / m$$

END SUB

Листинг реализации модуля инициализации данных

SUB init

$$np = \text{ABS}(\text{INT}(360 / \text{DF0}))$$

$$w = \text{ATN}(1) * N / 7.5$$

```

fi = RadGrad(F0, 1)
DF = RadGrad(DF0, 1)
E.x = xe
E.y = ye
F.x = xf
F.y = yf
FileName$ = "CON"      'Вывод результатов на экран
'FileName$ = "Otvet"   'Вывод результатов на диск в файл
END SUB

```

Листинг функции преобразования градусов в радианы и обратно

```

FUNCTION RadGrad (Arg, flag) 'Функция преобразования градусов в
рад и обратно
  SELECT CASE flag
    CASE 1
      RadGrad = Arg * ATN(1) / 45'Градусы в радианы
    CASE 2
      RadGrad = Arg * 45 / ATN(1)'Радианы в градусы
  END SELECT
END FUNCTION

```

Листинг функции определения расстояния между точками

```

FUNCTION DlinaVektor (Xn, Xk, Yn, Yk)
'Функция определения длины вектора
  DlinaVektor = SQR((Xk - Xn) ^ 2 + (Yk - Yn) ^ 2)
END FUNCTION

```

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин / И. И. Артоболевский. — М. : Наука, 1975. — 640 с.
2. Теория механизмов и машин. Терминология. Буквенные обозначения. — М. : Наука, 1984. — 40 с.
3. Белоконев И. М. Теория механизмов и машин / И. М. Белоконев. — К. : Выща шк., 1990. — 208 с.
4. Пейсах Э.Е., Нестеров В.А. Система проектирования плоских рычажных механизмов / Э. Е. Пейсах, В. А. Нестеров. — М. : Машиностроение, 1988. — 232 с.
5. Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. Введение в информатику с позиций математического моделирования / авт. пред. А. А. Самарский. — М. : Наука, 1988. — 176 с.
6. Зельднер Г. А. Программирование на языке QuickBASIC 4.5 / Г. А. Зельднер. — 2-е изд. испр. и доп. — М. : АБФ, 1996. — 432 с. : ил.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Виталий Анатольевич Козачишен
Елена Сергеевна Козачишена

**ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ
СРЕДСТВАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

Учебное пособие

В авторской редакции

Художественное оформление обложки Н. В. Чернышова

Заказ № 255. Формат 60x84 ¹/₁₆.

Бумага офс. Печать RISO.

Усл. печат. л. 4,8 Уч.-изд. л. 4,1

Издательство не несет ответственность за содержание
материала, предоставленного автором к печати.

Издатель и изготовитель:

ГОУ ВО ЛНР «ДонГТИ»

пр. Ленина, 16, г. Алчевск, ЛНР, 94204

(ИЗДАТЕЛЬСКО-ПОЛИГРАФИЧЕСКИЙ ЦЕНТР, ауд. 2113, т/факс 2-58-59)

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя
и распространителя средства массовой информации

МИ-СГР ИД 000055 от 05.