

УДК 622.243.2:622.831.2.02

*д.т.н., проф. Литвинский Г. Г.  
(ДонГТИ, г. Алчевск, ЛНР, ligag@ya.ru)*

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТАТИКИ НДС В ТЕЛЕ С МИКРОДЕФЕКТАМИ

*Последовательно изучена новая континуальная модель статически напряженно-деформированного состояния (НДС) произвольно нагруженного твердого тела с микродефектами. Расширены и уточнены понятия сплошности и поврежденности путем ввода сдвиговых и разрывных микродефектов. Рассмотрены особенности и ограничения их матричного представления. Впервые установлена связь между углом внутреннего трения материала и соотношением размеров разрывных и сдвиговых микродефектов в их Z-ансамбле. Показано, что распределение напряжений в теле предопределяется уровнем предельных состояний на микросдвигах, тогда как деформации на микросдвигах предопределяются уровнем упругих деформаций на главном направлении нагрузки.*

**Ключевые слова:** поврежденность, сплошность, микродефекты, микросдвиг, микроразрыв, Z-ансамбль, матрица микродефектов, теория НДС, математическая модель, упругие и деформационные области, алгоритм расчета, напряжения, деформации.

### 1 Актуальность и цель исследований

В связи с незатухающим интересом исследователей к проблеме описания поведения сложных гетерогенных структур в условиях объемного напряженно-деформированного нагружения были достигнуты значительные результаты [1–9 и др.].

Исследования в этом направлении побуждались стремлением понять суть и адекватно описать приемлемыми математическими моделями сложный клубок термомеханических явлений, связанных с деформированием и разрушением материалов естественного и искусственного происхождения под действием многообразных внешних и внутренних факторов.

Однако эти задачи механики деформируемого твердого тела и горной геомеханики еще далеки от своего завершения. Так, из поля внимания многих исследований выпали проблемы формирования внутренней структуры тела, задачи устойчивости ее развития, обоснования микромеханических основ теорий пластичности, ползучести и разрушения.

В данной работе в рамках поставленной проблемы рассмотрена новая континуально-механическая модель микродефектного тела. В ее основу были положены накоп-

ленные к настоящему времени экспериментальные данные и ранее установленные в механике деформированного твердого тела базовые законы.

К числу исходных предпосылок, которые положены нами в основу изучения НДС микродефектного тела и не накладывают существенных ограничений на достоверность и общность получаемых выводов, следует отнести следующие:

- в твердом теле всегда имеются микродефекты, они расположены стохастически равномерно, при этом тело в целом квазиизотропно;

- микродефекты в теле представлены в виде микросдвигов, микроразрывов и их ансамблей [6];

- задана фиксированная на данный промежуток времени исходная структура микродефектов в виде матрицы  $W_{ij}$  [6], т. е. рассматривается квазистатическая задача без рассмотрения временных эффектов их поведения;

- главный вектор и главный момент внешней нагрузки равны нулю, т. е. рассматривается статическое равновесие.

Эти и принятые далее условия являются достаточно гибкими и не приводят к существенному ограничению общности решаемой задачи.

**Цель** исследования — разработать теоретическое описание напряженно-деформированного состояния (НДС) микродефектного тела при произвольно заданной внешней нагрузке.

**Идея** работы состоит в использовании ранее предложенной математической модели микродефектного тела, в котором существует структура из поврежденностей сдвигового и разрывного типов, и закономерностей ограничения напряжений и деформаций на микросдвигах.

**Объектом** исследований является образованная внутри тела структура микродефектов в виде сдвигов и разрывов и ее влияние на НДС; **предмет** исследований — закономерности НДС в теле с микродефектами.

Основные **задачи** исследования:

1) дополнить и уточнить основные понятия и определения структурной мезо- и микромеханики и описания микродефектов матрицами;

2) выполнить оценку соотношений между сдвиговыми и разрывными микродефектами при возникновении их ансамблей;

3) разработать математическую модель и алгоритм расчета НДС микродефектного тела;

4) привести демонстрационный пример расчета НДС тела с заданной матрицей микродефектов.

Выполненные исследования являются продолжением и существенным образом опираются на результаты работ автора [10–12 и др.], где представлена новая матричная теория микро- и мезодефектов в твердом теле, связанная с главными площадками НДС.

## 2.0 закономерностях распределения микродефектов

На первом этапе решения задачи о НДС микродефектного тела необходимо сделать некоторые дополнения, уточнить основные понятия и определения, чтобы устранить возможную неоднозначность и двойное толкование ряда положений.

Остановимся на базовых формулировках геометрической теории микродефектов.

Вводя понятия микродефектов  $W_{ij}$  с помощью матрицы второго порядка [10], подчеркнем сходство и различие между разрывными ( $i=j$ ) и сдвиговыми ( $i \neq j$ ) их типами. Оба типа микродефектов показывают относительную площадь каждого из нарушений и ее ориентацию относительно главных площадок НДС (рис. 1).

Микроразрывы  $W_{ii}$  ориентируются главным образом параллельно главным площадкам НДС при действии растягивающих деформаций, причем при сжимающих деформациях они закрываются. Полезно различать два типа разрывов: а) связанные с Z-ансамблем  $Wz_m$ ; б) условно свободные (не входящие в ансамбли) разрывы на площадках с растягивающими деформациями  $Wr_{mn}$ .

Микросдвиги  $W_{ij}$  (1) возникают благодаря действию сдвигающих деформаций, которые, как известно, ориентированы вдоль максимальных касательных напряжений, действующих под углом  $45^\circ$  к главным площадкам НДС. Порядок индексов показывает направление сдвигов на диагональной плоскости. Так, если на главных площадках действуют напряжения  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , то, соответственно, знаки микросдвигов будут  $W_{12} \geq 0 \geq W_{21}$ ;  $W_{23} \geq 0 \geq W_{32}$  и т. д., а в общем случае  $W_{ij} = -W_{ji}$ :

$$\|W_{ij}\|_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$0 \leq |W_{ij}| \leq 1, \quad W_{ij} = -W_{ji}, \quad W_{ii} \geq 0.$$

По аналогии с матрицей микродефектов (1) вводим матрицу сплошностей  $\|T_{ij}\|$  (2)

$$T_{ij} = 1 - |W_{ij}|,$$

$$\|T_{ij}\|_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$T_{ij} = T_{ji}, \quad 0 \leq T_{ij} \leq 1,$$

которые всегда положительны и являются, по сути, алгебраическим дополнением к матрице микродефектов  $\|W_{ij}\|$ .

Обобщая матрицы (1) и (2), которые описывают только отдельные структурные дефекты, введем результирующие по заданным направлениям  $i, j, k = 1, 2, 3$  главных площадок с учетом сложения множеств и исключения их пересечений:

а) суммарную на главных площадках площадь микродефектов (3):

$$Wc_i = |W_{ii}| + |W_{ij}| + |W_{ik}| - |W_{ij}| \cdot |W_{ik}| - |W_{ii}| (|W_{ij}| + |W_{ik}|); \quad (3)$$

б) площадь сплошностей (4):

$$Tc_i = 1 - Wc_i, \quad (4)$$

при этом соблюдаются неравенства:

$$0 \leq Wc_i \leq 1; \quad 0 \leq Tc_i \leq 1.$$

Важно отметить, что по направлению сжимающих напряжений микроразрывы  $W_{ii}$  быстро залечиваются и исчезают, поэтому следует при их определении принимать дополнительные условия:

$$\varepsilon_i \geq 0 \Rightarrow W_{ii} \rightarrow 0 \cup T_{ii} \rightarrow 1. \quad (5)$$

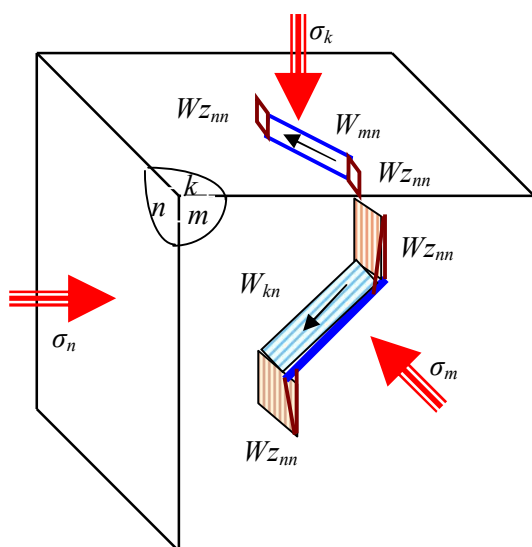


Рисунок 1 Схема Z-ансамблей микродефектов  $W_{z_{nn}}$ ,  $W_{kn}$  и  $W_{mn}$  в разных плоскостях

Такая особенность микроразрывов  $W_{ii}$  — открываться при растягивающих деформациях и закрываться при сжимающих — заметным образом усложняет расчетные алгоритмы.

### 3 Конфигурация Z-ансамбля микродефектов

До настоящего времени остается нерассмотренным вопрос о зависимостях, раскрывающих соотношение между микроразрывами  $W_{z_{jj}}$  и микродвигами  $W_{z_{ij}}$ , т. е. какова конфигурация Z-ансамбля микродефектов (рис. 2). Здесь опережающим концом Z-ансамбля микроразрывам присвоено обозначение  $W_{z_{jj}}$  (рис. 2), в отличие от иной природы микроразрывов, возникающих обособленно вне Z-ансамбля и обозначаемых  $Wr_{ii}$ .

Для определения соотношения длин сдвигов  $W_{z_{ij}}$  и разрывов  $W_{z_{ii}}$  воспользуемся хорошо экспериментально изученными данными о значениях угла внутреннего трения материалов при их объемных испытаниях с помощью стабилометров [12].

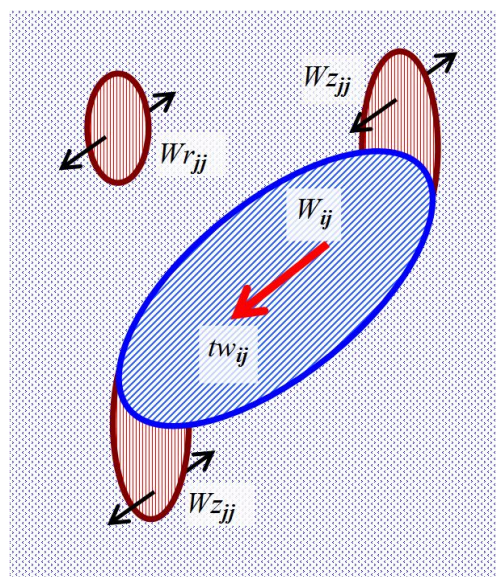


Рисунок 2 Геометрические соотношения в Z-ансамбле между микродвигом  $W_{ij}$  и опережающими его микроразрывами  $W_{z_{jj}}$

Угол внутреннего трения  $\varphi$  представляет собой наклон огибающей наибольших кругов напряжений диаграммы О. Мора и всегда уменьшается по мере роста минимальной компоненты напряжений (рис. 3). Для большинства известных материалов угол внутреннего трения в области за пределом их прочности на одноосное сжатие может изменяться в пределах  $0 \leq \varphi \leq 30...35^\circ$ .

На рисунке 3 показан паспорт прочности на диаграмме О. Мора, построенной в осях нормальных  $\sigma$  и касательных  $\tau$  напряжений. На ней отражены основные элементы паспорта прочности материала: показатели прочности на одноосные растяжение  $\sigma_0$  и сжатие  $\sigma_c$ , нормальное  $\sigma_n$  и касательное  $\tau_{nt}$  напряжения на площадке разрушения, угол внутреннего трения  $\varphi$ . С позиций аналитической теории прочности [12] здесь показаны когезия разрыва  $\sigma_0$ , зачастую равная в каменных материалах одноосному растяжению, и когезия сдвига  $\tau_0$ , равная так называемому коэффициенту сцепления по устаревшей терминологии механики горных пород.

Уменьшение угла внутреннего трения  $\varphi$  по мере роста минимальной компоненты напряжений вносит дополнительные трудности при решении задач прочности в геомеханике.

Зададимся вопросом, какая связь существует между конфигурацией Z-ансамбля и углом внутреннего трения  $\varphi$ , который является одним из обобщенных показателей прочностных свойств материала. Для этого используем расчетную схему Z-ансамбля, представленную на рисунке 4.

На рисунке 4 штриховой линией, соединяющей концы микроразрывов, показана плоскость макроразрушения материала сдвигом при его сжатии, угол наклона которой  $\alpha_{nt}$ , как известно, равен

$$\alpha_{nt} = 45^\circ + \varphi / 2. \quad (6)$$

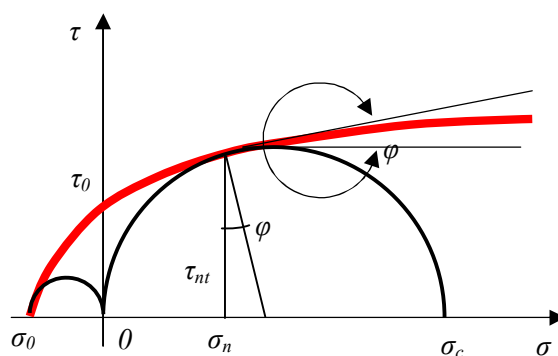


Рисунок 3 Определение угла внутреннего трения на диаграмме О. Мора

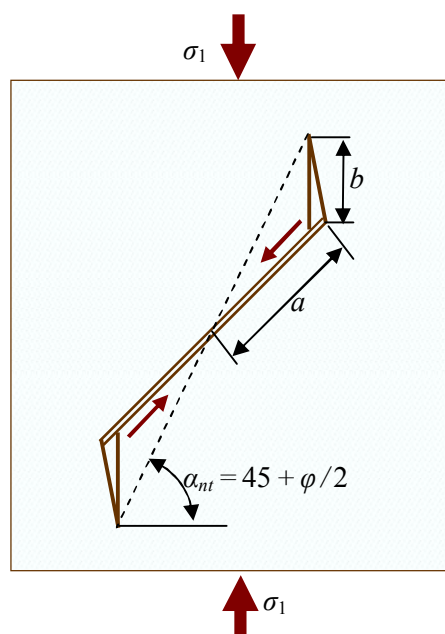


Рисунок 4 К определению соотношения размеров разрывных и сдвиговых микродефектов Z-ансамбля при сжатии материала

Из рисунка 4 путем несложных геометрических построений получаем искомое соотношение размеров микроразрывов и микросдвигов в Z-ансамбле:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{2} \left[ \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} - 1 \right], \quad (7)$$

где  $a$ ,  $b$  — полудлины соответственно микросдвигов и разрывов (рис. 4).

Очевидно, что переход в область объемного НДС увеличения минимальной ком-

поненты напряжений  $\sigma_3$  неизбежно приводит к уменьшению соотношения  $b/a$  между микроразрывами и микродвижениями, а значит, и формы Z-ансамбля микродефектов.

Если перейти к более общему случаю описания прочностных показателей материала с помощью аналитической теории прочности [12], то получим обобщение на случай многоосного сжатия, когда предельное соотношение для  $a/b$  зависит от НДС. Для этого воспользуемся исходной базовой формулой паспорта прочности [12] в соответствии с рисунком 3:

$$[\tau_{nt}] = \tau_0 \cdot \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_0} + 1 \right)^\alpha, \quad (8)$$

где  $[\tau_{nt}]$  — предельное значение касательных напряжений на площадке сдвига  $nt$ , Па;

$\tau_0, \sigma_0$  — когезии соответственно сдвига и отрыва, Па;

$\alpha$  — параметр хрупкости материала, отражающий соотношение сухого и жидкостного трения на площадке сдвига;

$\sigma_n$  — нормальные напряжения на площадке сдвига, Па.

Тогда можем найти значение для угла внутреннего трения  $\varphi$  из выражения

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{d[\tau_{nt}]}{d\sigma_n} = \alpha \cdot \frac{[\tau_{nt}]}{(\sigma_n + \sigma_0)}, \quad (9)$$

которое следует подставить в (7) и определить  $a/b$ .

Как следует из (9), соотношение  $a/b$  уменьшается по мере увеличения действующих на площадке сдвига нормальных напряжений  $\sigma_n$ .

Таким образом, если опираться на экспериментальные данные, полученные при лабораторных испытаниях материалов по определению их угла внутреннего трения  $\varphi$ , можно заключить, что в среднем по всей выборке геометрия Z-ансамбля подчиняется зависимости (7).

С целью упрощения расчетов вместо зависимости (7) можно использовать ее

линейную аппроксимацию (8), которая показана на рисунке 5. Это уравнение (8) пригодно для описания материалов, у которых угол внутреннего трения  $\varphi < 40^\circ$ , а его погрешность не превышает  $\pm 5\%$ . С учетом (9) окончательно запишем

$$\frac{b}{a} = \frac{\varphi^0}{30} = \frac{6}{\pi} \varphi = \frac{6}{\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{\alpha \cdot [\tau_{nt}]}{\sigma_n + \sigma_0} \right), \quad (10)$$

где  $\varphi$  выражено в радианах,  $0 \leq \varphi < 0,5$  рад.

Такого рода аппроксимация позволяет не только упростить расчетные алгоритмы, но и получить оценки угла внутреннего трения по измеренным экспериментально конфигурациям микродефектов.

Из рисунка 1 можно понять, что вся совокупность микроразрывов  $Wz_{nn}$  по любому направлению  $n$  образуется двумя микродвижениями  $Wz_{kn}$  и  $Wz_{mn}$ , т. е. такими, у которых второй индекс совпадает с указанным направлением.

Поскольку в Z-ансамбле микродефектов должно соблюдаться соотношение между размерами сдвигов и разрывов  $b/a$ , то каждый Z-ансамбль  $W_{ij}$  и приносит микроразрывы  $Wz_{jj}$ , относительная площадь участка которых равна, согласно (7),

$$Wz_{jj} = \frac{b}{a} (|W_{ij}| + |W_{kj}|). \quad (11)$$

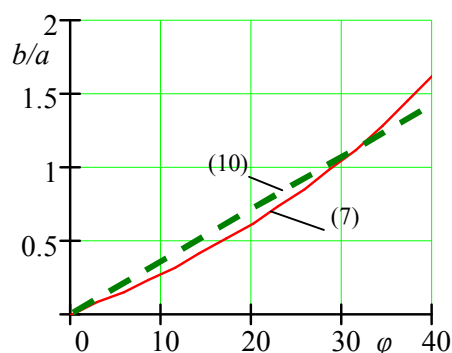


Рисунок 5 Сопоставление графиков исходного уравнения (7) и его линейной аппроксимации (10)

Кроме того, при наличии растягивающих деформаций  $\varepsilon_j < 0$ , величина которых превышает предельные для данного материала  $\varepsilon_j < -[\varepsilon_r]$ , появляются микро-разрывы, не связанные с Z-ансамблями, которые обозначим  $W_{jj}$ . Тогда в сумме все микро-разрывы по направлению  $jj$ , вызванные соответствующими микросдвигами и деформациями растяжения, равны

$$W_{jj} = W_{r_{jj}} + \frac{b}{a}(W_{ij} + W_{kj}). \quad (12)$$

Предыдущие оценки относились главным образом к телу, подвергнутому сжатию. При появлении деформаций растяжения в материале, у которого прочность на растяжение меньше прочности на сжатие ( $\sigma_r < \sigma_c$ ), Z-ансамбли микродефектов могут вырождаться в микро-разрывы, ориентированные перпендикулярно деформациям растяжения, т. е.  $(a/b) \rightarrow 0$ .

Следовательно, основные проблемные вопросы по определению структуры микродефектов решены, и можно перейти к определению НДС тела с микродефектами.

#### 4 Математическая модель расчета НДС микродефектного тела

В качестве основной предпосылки математической модели считаем микродефектное тело квазиоднородным с равномерным распределением по всему объему всех типов микродефектов, а определение параметров НДС производим отдельно для упругой и микродефектной областей.

Материал в исходном состоянии считаем квазиоднородным и изотропным, а распределение напряжений будем определять для произвольной совокупности дефектов сдвига и разрыва, представленной матрицей (1).

В рамках обычных решений теории упругости напряженное состояние тела в точке будет задано тремя напряжениями  $\sigma_i$ , действующими на главных площадках. Однако следует иметь в виду, что в микродефектном теле уже нельзя гово-

рить о напряжении в точке, поскольку необходимо рассматривать некоторый представительный объем материала, содержащий в среднем все типы микродефектов и выполняющий роль точки в континуальной теории деформаций и напряжений.

Рассмотрим в материале характерный объем в виде куба единичных размеров, грани которого ориентированы по главным площадкам с ортами  $i, j, k$ . В общем случае на тело действуют макронапряжения  $\sigma_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), причем принимаем, что  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  (рис. 6).

На каждой грани куба пунктирными кривыми условно показаны границы между областями упругими (сплошности  $Tc_k$ ) и микродефектными (поврежденности  $Wc_k$ ). На этих условно выделенных участках  $Tc_k$  и  $Wc_k$  действуют соответствующие нормальные напряжения: среднеинтегральные по всей площади  $\sigma$ , на упругих  $\sigma_u$  и микродефектных  $\sigma_w$  участках, условно отделенных друг от друга штриховыми кривыми.

Согласно известным уравнениям теории упругости, дополненным соотношениями для упругого ( $U$ -area) и микродефектного ( $W$ -area) участков тела, средние нормальные напряжения равны

$$\begin{aligned} \sigma n_{ij} &= (\sigma_i + \sigma_i) / 2, \\ \sigma n_{ij} &= (\sigma u_i + \sigma u_i) / 2, \\ \sigma n_{ij} &= (\sigma w_i + \sigma w_i) / 2, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\sigma_i, \sigma u_i, \sigma w_i$  — нормальные напряжения на, соответственно, общих, упругих и сдвиговых площадках с ориентацией  $i$ ;

$\sigma n_{ij}, \sigma n_{ij}, \sigma n_{ij}$  — средние нормальные напряжения на, соответственно, общих, упругих и сдвиговых диагональных площадках с ориентацией  $i, j$ .

Максимальные касательные напряжения  $\tau_{ij}$  на площадках, наклоненных к главным под 45 градусов, будут равны (рис. 7)

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= (\sigma_i - \sigma_j) / 2, \\ \tau_{uij} &= (\sigma u_i - \sigma u_j) / 2, \\ \tau_{w_{ij}} &= (\sigma w_i - \sigma w_j) / 2. \end{aligned} \quad (14)$$

На рисунке 7 по аналогии с рисунком 6 площадка условно разделена на две области: упругую  $T_{ij}$  и микросдвиговую  $W_{ij}$ , в каждой из которых действуют соответствующие нормальные и касательные напряжения.

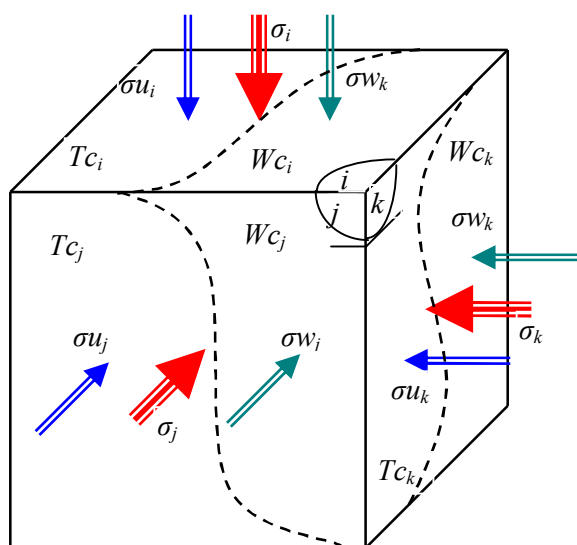


Рисунок 6 Совокупность нормальных напряжений на главных площадках в материале с микродефектами

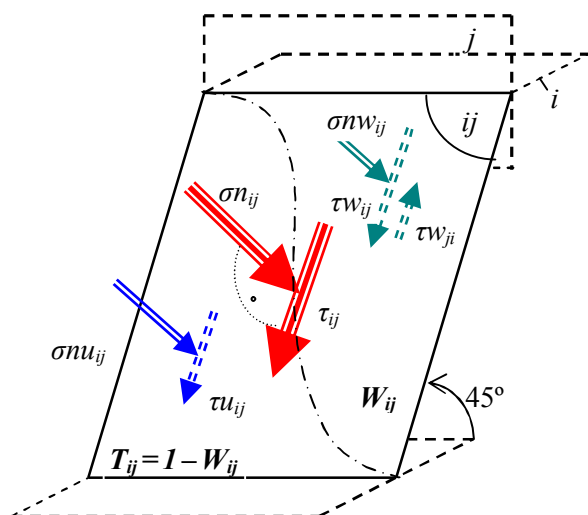


Рисунок 7 Совокупность касательных и нормальных напряжений на диагональной площадке  $i, j$  по направлению максимального сдвига  $\tau_{ij}$

На рисунке 7 показаны все напряжения, действующие на диагональной площадке  $ij$  единичного куба: касательные напряжения общие  $\tau_{ij}$ , которые слагаются из напряжений  $\tau_{u_{ij}}$  и  $\tau_{w_{ij}}$ , согласно (13), на упругих  $T_{ij}$  и микродефектных  $W_{ij}$  участках диагональной плоскости, и средние нормальные напряжения  $\sigma n_{ij}$ ,  $\sigma n_{u_{ij}}$ ,  $\sigma n_{w_{ij}}$  согласно (14). Для определения сдвиговых (касательных) напряжений  $\tau_{w_{ij}}$ , действующих на микросдвигах  $W_{ij}$ , в качестве основного уравнения примем условие прочности, которое ограничивает их пределом прочности  $Pw_{ij}$ :

$$\text{if } |\tau_{ij}| \begin{cases} \leq Pw_{ij} \\ \geq Pw_{ij} \end{cases} \text{ then } \tau_{w_{ij}} = \begin{cases} \tau_{ij} \\ Pw_{ij} \end{cases}, \quad (i \neq j). \quad (15)$$

Отсюда следует, что касательные напряжения на микросдвигах всегда находятся в границах  $-Pw_{ij} \leq \tau_{w_{ij}} \leq Pw_{ij}$ .

При разгрузке материала происходит пропорциональное упругое снижение напряжений на всех площадках вплоть до момента, пока на сдвиговых площадках  $W_{ij}$  не будет достигнуто отрицательное значение сдвиговой прочности:  $\tau_{ij} \leq -Pw_{ij} \rightarrow \tau_{w_{ij}} = -Pw_{ij}$ . После этого дальнейшая разгрузка происходит при фиксированном предельном значении касательных напряжений  $Pw_{ij}$  на сдвиговых площадках  $W_{ij}$  вплоть до момента очередного нарушения неравенств (15) при изменении внешней нагрузки.

В упругой области, которую принято называть сплошностью  $T_{ij}$  или  $U$ -area и которая является дополнением к дефектной области  $W_{ij}$  ( $W$ -area), согласно соотношению

$$T_{ij} = 1 - |W_{ij}|, \quad (16)$$

действуют упругие касательные напряжения  $\tau_{u_{ij}}$ . Здесь  $T_{ij}$ ,  $W_{ij}$  — сплошность и поврежденность на диагональной площадке между главными площадками  $i$  и  $j$ .

Определим базовое уравнение связи между упругими  $\tau u_{ij}$  и сдвиговыми  $\tau w_{ij}$  касательными напряжениями на упругих  $T_{ij}$  и сдвиговых  $W_{ij}$  площадках. Исходя из условий равновесия на главных и диагональных площадках, должны соблюдаться суммы

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sigma u_i \cdot T c_i + \sigma w_i \cdot W c_i, \\ \tau_{ij} &= \tau u_{ij} \cdot T_{ij} + \tau w_{ij} \cdot W_{ij}, \end{aligned} \quad (i \neq j), \quad (17)$$

где  $\tau_{ij}$  — среднеинтегральное значение напряжений сдвига для всей площади тела, Па.

Тогда из условий равновесия сил на всей рассматриваемой площадке находим из (17) касательное напряжение на упругой ее части ( $U$ -area) по формуле

$$\tau u_{ij} = (\tau_{ij} - \tau w_{ij} \cdot W_{ij}) / T_{ij}. \quad (18)$$

Уравнение (18) является основным для вычисления упругих касательных напряжений  $\tau u_{ij}$  по всегда известным предельным значениям (15) касательных напряжений  $\tau w_{ij}$  на микросдвигах. Таким образом, касательные напряжения  $\tau w_{ij}$  и  $\tau u_{ij}$  на участках  $W$ -area и  $U$ -area каждой диагональной площадки с индексом  $ij$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) определены.

Опираясь на подобную (15) трактовку нормальных напряжений  $\sigma w_i$  на сдвиговых площадках  $W$ -area как предельных для материала, которые не могут превышать его прочность при соответствующем предельном состоянии, можем записать условия, которым они должны удовлетворять:

$$\text{if } |\tau_{ij}| \begin{cases} \leq P w_{ij} \\ \geq P w_{ij} \end{cases} \text{ then } \sigma w_i = \begin{cases} \sigma_i \\ [\sigma_i] \end{cases}, \quad (19)$$

где  $[\sigma_i]$  — показатель предела прочности материала в соответствии с принятой теорией прочности, в случае идеальной пластичности  $[\sigma_i] = 2P w_{ij}$ .

После определения  $\sigma w_i$  находим нормальное напряжение  $\sigma u_i$  на соответст-

вующей упругой площадке из первого уравнения (17):

$$\sigma u_i = (\sigma_i - \sigma w_i \cdot W c_i) / T c_i. \quad (20)$$

Для завершения задачи о напряженном состоянии материала с дефектами необходимо найти значения (13–14) всех нормальных напряжений на упругих и сдвиговых участках каждой из площадок  $i, j, k$  ( $i, j, k = 1, 2, 3$ ) по заданным внешним нагрузкам в виде среднеинтегральных нормальных  $\sigma_i$  макронапряжений, а также с учетом вычисленных по формулам (15–18) микронапряжений  $\tau w_{ij}$  и  $\tau u_{ij}$ .

Напряжения  $\sigma u_i$ ,  $\sigma w_i$  выражаются по определению через уже ранее определенные касательные и нормальные напряжения  $\tau u_{ij}$ ,  $\tau w_{ij}$ ,  $\sigma n_{ij}$  по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sigma n_{ij} + \tau_{ij} = \sigma n_{ik} + \tau_{ik}, \\ \sigma u_i &= \sigma n u_{ij} + \tau u_{ij} = \sigma n u_{ik} + \tau u_{ik}, \\ \sigma w_i &= \sigma n w_{ij} + \tau w_{ij} = \sigma n w_{ik} + \tau w_{ik}. \end{aligned} \quad (21)$$

В качестве контрольного уравнения проверки используем основное соотношение между нормальными напряжениями на  $i$ -площадке:

$$\sigma_i = \sigma u_i \cdot T c_i + \sigma w_i \cdot W c_i. \quad (22)$$

На основании полученных для вычисления напряжений соотношений можно перейти к следующему этапу решения задачи: рассмотрению особенностей распределения деформаций в теле с микродефектами.

### 5 Определение деформаций в микродефектном теле

Алгоритм определения деформаций в какой-то мере аналогичен вышеизложенному алгоритму для напряжений. Существенным отличием является порядок решения и базовые предпосылки. Если при определении напряжений мы исходили из формулирования условий напряженности на сдвиговых площадках (прочность на сдвигах была предопределяющей для по-



следующих результатов), то в случае разработки алгоритма для изучения деформаций, наоборот, упругие деформации определяют деформационное состояние тела в целом, а деформации на площадках сдвига играют подчиненную (пассивную) роль.

На рисунке 8 показан некий выделенный представительный объем тела в виде единичного куба с единичными осями  $i, j, k$  вдоль главных действующих напряжений  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

На каждой грани куба пунктирными кривыми условно показаны границы между областями упругими (сплошности  $Tc_k$ ) и микродефектными (поврежденности  $Wc_k$ ). На этих условно выделенных участках действуют соответствующие продольные деформации:

$\epsilon_k$  — полные (среднеинтегральные по всей грани куба);

$\epsilon u_k, \epsilon w_k$  — соответственно упругие и микродефектные деформации.

Упругие участки тела должны подчиняться общим уравнениям теории упругости, в частности обобщенному закону Гука, согласно которому деформации на всех главных площадках равны

$$\epsilon u_i = [\sigma u_i - \nu(\sigma u_j + \sigma u_k)] / E, \quad (23)$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона;

$E$  — продольный модуль упругости, Па.

На главной площадке с максимальным нормальным напряжением  $\sigma_1$  продольные деформации будут однородными, т. е. равны

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon u_1; \\ \epsilon w_1 &= \epsilon u_1. \end{aligned} \quad (24)$$

Однако если упругие деформации  $\epsilon u_2, \epsilon u_3$  по другим главным направлениям следуют зависимостям (23), то деформации на микросдвигах  $\epsilon w_2, \epsilon w_3$  будут следовать законам идеально пластического тела (т. е. условию несжимаемости) и поэтому будут равны

$$\epsilon w_2 = \epsilon w_3 = -0,5 \cdot \epsilon u_1. \quad (25)$$

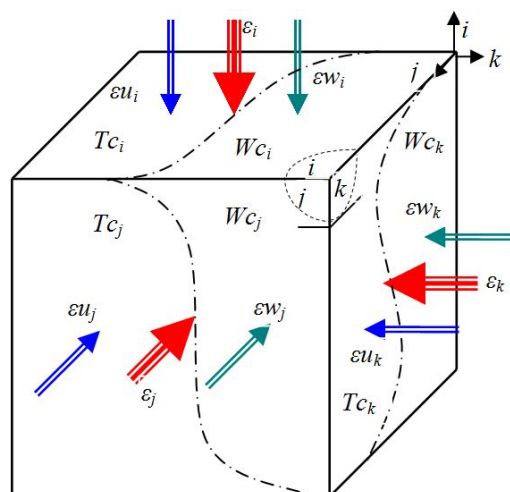


Рисунок 8 Действие продольных деформаций  $\epsilon, \epsilon u, \epsilon w$  на главных площадках  $i, j, k$  в материале с микродефектами

Учитывая, что полные боковые деформации складываются из вклада упругих и сдвиговых компонент с учетом размеров упругой  $Tc$  и микродефектной  $Wc$  зон, окончательно получаем

$$\begin{aligned} \epsilon_2 &= \epsilon u_2 \cdot Tc_2 + \epsilon w_2 \cdot Wc_2, \\ \epsilon_3 &= \epsilon u_3 \cdot Tc_3 + \epsilon w_3 \cdot Wc_3. \end{aligned} \quad (26)$$

Качественная картина распределения касательных (сдвиговых) деформаций представлена на рисунке 9, который выполнен по аналогии со схемой распределения касательных напряжений (рис. 7).

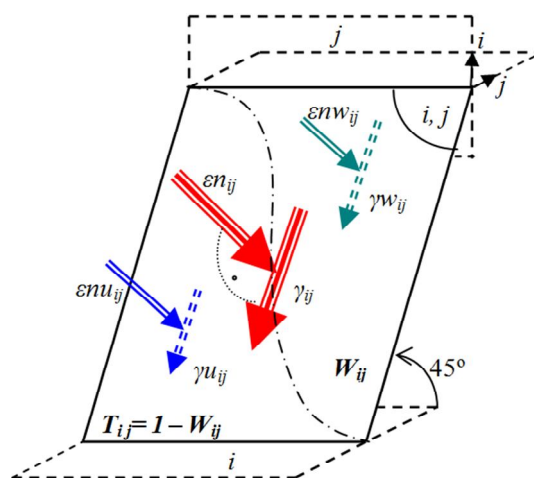


Рисунок 9 Сдвиговые  $\gamma_{ij}$  и средние нормальные  $\epsilon n_{ij}$  деформации на диагональных площадках в материале с микродефектами

Формулы для вычисления касательных деформаций для областей  $U$ -area и  $W$ -area на диагональной плоскости  $ij$  имеют обычный вид:

$$\begin{aligned}\gamma_{ij} &= (\varepsilon_i - \varepsilon_j) / 2, \\ \gamma u_{ij} &= (\varepsilon u_i - \varepsilon u_j) / 2, \\ \gamma w_{ij} &= (\varepsilon w_i - \varepsilon w_j) / 2.\end{aligned}\quad (27)$$

### 6 Демонстрационный пример расчета НДС тела с микродефектами

С целью достижения обзримости результатов расчета НДС зададимся исходными данными, которые, с одной стороны, близки к реальным показателям материала — песчаника средней прочности, а с другой — имеют в большинстве своем округленные целочисленные значения.

Поскольку расчеты НДС ведутся в некоторый фиксированный момент времени (статика), следует иметь в виду, что исходные данные о структурном строении материала, которые отражаются матрицей микродефектов  $\|W\|$ , на самом деле нельзя назначать произвольно, поскольку она формируется в итоге предшествующей истории нагружения материала.

Условно зададимся матрицей микродефектов, значения которой не противоречат ограничениям, указанным в (1):

$$W := \begin{pmatrix} 0,0 & 0,2 & 0,3 \\ -0,2 & 0,1 & 0 \\ -0,3 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с формулами (2) получим следующие значения для матрицы сплошностей и микродефектов:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 & 0,7 \\ 0,8 & 0,9 & 1 \\ 0,7 & 1 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем значения обобщенных для каждой главной площадки микродефектов  $Wc$  и сплошности  $Tc$  (пренебрегая, ввиду малости, произведением множеств для повышения наглядности результатов):

$$Wc = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{pmatrix}, \quad Tc = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,7 \\ 0,6 \end{pmatrix}.$$

Внешнее нагружение условного единичного образца осуществляем путем одноосного сжатия  $\sigma_1 = 120$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , что дает соответствующие матрицы для нормальных и касательных напряжений с размерностью в МПа:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 60 \\ -60 & 0 & 0 \\ -60 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как условия предела прочности на одноосное сжатие, если для простоты считать материал идеально пластичным, принимаем предел сдвига  $Pw$  и показатель прочности на одноосное сжатие  $\sigma_c$ :

$$Pw = 40 \text{ МПа}, \quad \sigma_c = 2Pw = 80 \text{ МПа}.$$

Для вычислений с использованием индексированных переменных MathLab условия прочности на сдвигах при идеальной пластичности материала записываем в виде

$$\tau w_{i,j} := \text{if} \left( \left| \tau_{i,j} \right| < Pw, \tau_{i,j}, Pw \cdot \text{sign}(\tau_{i,j}) \right),$$

что после подстановки в (15) даст значения касательных напряжений на сдвиговых (диагональных) участках  $W$ -area материала:

$$\tau w = \begin{pmatrix} 0 & 40 & 40 \\ -40 & 0 & 0 \\ -40 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Находим нормальные напряжения на главных площадках  $W$ -area с микросдвигами согласно (18):

$$\sigma w = \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

По формуле (19) находим значения упругих напряжений на главных площадках со сплошностями ( $U$ -area):

$$\sigma u = \begin{pmatrix} 160 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

После этого можно найти касательные напряжения на упругих участках тела *U-area* по каждому направлению согласно (18):

$$\tau u = \begin{pmatrix} 0 & 65 & 68,57 \\ -65 & 0 & 0 \\ -68,57 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для проверки правильности вычислений используем итоговые равенства (17), численное значение которых совпадает с исходным полем напряжений при одноосном сжатии.

Осталось вычислить средние нормальные напряжения по каждой из осей  $i, j, k$  главных площадок:

$$\sigma n = \begin{pmatrix} 120 & 60 & 60 \\ 60 & 0 & 0 \\ 60 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{un} = \begin{pmatrix} 160 & 80 & 80 \\ 80 & 0 & 0 \\ 80 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{wn} = \begin{pmatrix} 80 & 40 & 40 \\ 40 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для проверки правильности результатов воспользуемся уравнениями (22), которые должны дать исходное поле приложенных напряжений, после чего убеждаемся в корректности расчетов.

Анализ полученных результатов показывает, что даже при наличии сравнительно умеренных нарушений сплошности тела, представленных в исходной матрице микродефектов  $\|W\|$ , наблюдаются значительные различия в напряжениях на главных и диагональных площадках с микродефектами *W-area* и на участках вне них,

т. е. на сплошности *U-area*. Так, можно отметить (рис. 10), что напряжения  $\sigma u_1 = 160$  МПа на упругих участках *U-area* тела вдвое превышают нормальные напряжения на микродефектных участках *W-area*  $\sigma w_1 = 80$  МПа. Это убедительно демонстрируют круги напряжений на диаграмме О. Мора, построенные по результатам вычислений.

Следующий этап расчетов — определение всех типов деформаций согласно уравнениям (23–26). Для получения численных результатов деформаций зададимся исходными данными по деформационным свойствам материала, в качестве которого примем горную породу типа песчаника средней прочности:

$$E := 2 \cdot 10^4, \quad \nu := 0,2,$$

$$G := E[2 \cdot (1 + \nu)]^{-1}, \quad G = 8,33 \cdot 10^3,$$

где  $E$  — продольный модуль упругости (модуль Юнга), МПа;

$\nu$  — коэффициент Пуассона;

$G$  — модуль сдвига материала, МПа.

Все полные продольные и сдвиговые деформации будут равны (26)

$$\varepsilon \cdot 10^3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1,2 \\ -1,2 \end{pmatrix}, \quad \gamma \cdot 10^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3,6 & 3,6 \\ -3,6 & 0 & 0 \\ -3,6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

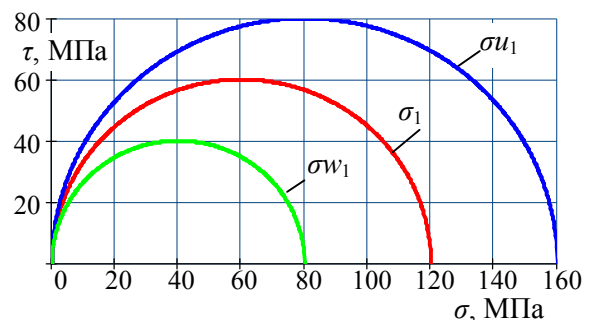


Рисунок 10 Диаграмма напряжений О. Мора с кругами для нормальных полных  $\sigma_1$ , упругих  $\sigma u_1$  и микродефектных  $\sigma w_1$  напряжений

От этих деформаций  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ , вычисленных по обычным формулам теории упругости, значительно отличаются продольные и сдвиговые деформации  $\varepsilon u$ ,  $\gamma u$  на упругих участках тела согласно (23–25)

$$\varepsilon u \cdot 10^3 = \begin{pmatrix} 8 \\ -1,6 \\ -1,6 \end{pmatrix},$$

$$\gamma u \cdot 10^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4,8 & 4,8 \\ -4,8 & 0 & 0 \\ -4,8 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а на участках с микродефектами *W-area* будут действовать деформации  $\varepsilon w$ ,  $\gamma w$ , определяемые по формулам (23), (26):

$$\varepsilon w \cdot 10^3 = \begin{pmatrix} 8 \\ -5,6 \\ -5,6 \end{pmatrix},$$

$$\gamma w \cdot 10^3 = \begin{pmatrix} 0 & 6,8 & 6,8 \\ -6,8 & 0 & 0 \\ -6,8 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученные численные значения деформаций показывают, что при наличии микродефектов соблюдаются следующие соотношения между напряжениями и деформациями:

$$\begin{aligned} \sigma u_1 &\geq \sigma_1 \geq \sigma w_1, \\ \varepsilon u_1 &\geq \varepsilon w_1 \geq \varepsilon_1, \quad \gamma w_{12} \geq \gamma u_{12} \geq \gamma_{12}. \end{aligned}$$

Это значит, что всегда при «прямом» на прессе лабораторном испытании микродефектного тела мы получим заниженное значение модуля продольной упругости и завышенный показатель коэффициента Пуассона.

Памятуя об этих соотношениях, можно более достоверно судить о деформационных и прочностных показателях материалов с одной стороны, а с другой — получить возможность с большей надежностью проводить лабораторные их испытания.

В целом предложенная математическая модель и алгоритм расчета НДС микроде-

фектного тела позволяют перейти на новый уровень оценки деформационно-прочностных показателей материала и, тем самым, повысить адекватность и надежность оценки прочности, несущей способности и деформируемости инженерных конструкций и природных образований под действием силовых нагрузок.

### Выводы

Кратко резюмируя полученные результаты, можно заключить, что в работе предложены новая математическая модель и алгоритм расчета НДС при действии статических нагрузок на тело с микродефектами, в которых:

а) расширены и уточнены понятия сплошности и поврежденности путем ввода сдвиговых и разрывных микродефектов, дополненные особенностями и ограничениями на их матричное представление;

б) рассмотрены особенности геометрической теории микродефектов и закономерности их распределения в теле;

в) изучены закономерности, которым подчиняется конфигурация *Z*-ансамбля микродефектов, впервые получена численная оценка соотношения размеров микросдвигов и микроразрывов;

г) предложена континуальная математическая модель определения НДС на упругих (*U-area*) и сдвиговых (*W-area*) участках тела, в которой при определении напряжений учитывается их предельное состояние на микросдвигах, а в случае нахождения деформаций упругие деформации  $\varepsilon u_1$  на *U-area* предопределяют деформационное состояние тела в целом, тогда как деформации на площадках сдвига  $\varepsilon w_1$  (*W-area*) играют подчиненную (пассивную) роль;

д) демонстрационный пример расчета НДС подтвердил, что даже умеренные значения поврежденности тела вызывают существенные различия напряжений и деформаций на микродефектных и упругих участках и всего тела в целом.

Опираясь на полученные результаты статистики НДС микродефектного тела, мож-

но перейти к решению основной проблемы залечивания микродефектов в теле с учетом реономной микромеханики — обоснованию, составлению и решению фундаментальных кинетических уравнений роста и воздействию на него переменных термосиловых воздействий, чему будут подчинены последующие публикации.

### Библиографический список

1. Шермергор, Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред [Текст] / Т. Д. Шермергор // М. : Наука, 1977. — 400 с.
2. Макклиток, Ф. Деформация и разрушение материалов [Текст] / Ф. Макклиток, А. Аргон // М. : Мир, 1970. — 444 с.
3. Повреждение материалов в конструкциях. Анализ. Предсказание. Предотвращение [Текст] : пер. с англ. / Дж. Коллинз ; под ред. Э. И. Григолюка. — М., 1984. — 624 с.
4. Boudifa, M. A micromechanical model for inelastic ductile damage prediction in polycrystalline metals for metal forming [Text] / M. Boudifa, K. Saanouni, J.-L. Chaboche // Int. J. Mech. Sci. — 2009. — Vol. 51. — P. 453–464.
5. Черепанов, Г. П. Механика разрушения [Текст] / Г. П. Черепанов. — М. — Ижевск : Изд-во ИКИ, 2012. — 872 с.
6. Сосновский, Л. Концепции поврежденности материалов [Текст] / Л. Сосновский, С. Щербаков // Обзор: Вестник ТНТУ. — 2011. — Спецвыпуск. — Ч. 1. — С. 14–23.
7. Биргер, И. А. Детерминированные и статистические модели суммирования повреждений [Текст] / И. А. Биргер // Проблемы прочности. — 1978. — № 11. — С. 3–11.
8. Золотаревский, Р. Ю. Фрагментация и текстуробразование при деформации металлических материалов [Текст] / Р. Ю. Золотаревский, В. В. Рыбин. — СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2014. — 208 с.
9. Ставрогин, А. Н. Экспериментальная физика и механика горных пород [Текст] / А. Н. Ставрогин, Б. Г. Тарасов. — СПб. : Наука, 2001. — 343 с.
10. Литвинский, Г. Г. Ансамбли и структуры микродефектов в твердом теле (горной породе) [Текст] / Г. Г. Литвинский // Сб. науч. трудов ДонГТИ. — Алчевск : ГОУ ВО ЛНР «ДонГТИ», 2022. — № 26 (69). — С. 5–15.
11. Литвинский, Г. Г. Фрагментация напряжений в теле с микродефектами [Текст] / Г. Г. Литвинский // Сб. науч. трудов ДонГТИ. — Алчевск : ГОУ ВО ЛНР «ДонГТИ», 2022. — № 27 (70). — С. 5–17.
12. Литвинский, Г. Г. Аналитическая теория прочности горных пород и массивов [Текст] / Г. Г. Литвинский. — Донецк : Норд-Пресс, 2008. — 207 с.

© Литвинский Г. Г.

**Рекомендована к печати д.т.н., проф., зам. директора РАНИМИ АН ДНР Дрибаном В. А., к.т.н., доц., проректором по научной работе ДонГТИ Смекалиным Е. С.**

Статья поступила в редакцию 05.09.2022.

**Doctor of Technical Sciences, Prof. Litvinsky G. G. (DSTI, Alchevsk, LPR, ligag@ya.ru)**

### **MATHEMATICAL MODEL OF THE SSS STATICS IN A BODY WITH MICRODEFECTS**

*A new continuum model of statics of the stress-strain state (SSS) of an arbitrarily loaded solid body with microdefects is consistently studied. The concepts of continuity and damage are expanded and clarified by introducing shear and discontinuous microdefects. The features and limitations of their matrix representation are considered. For the first time, the link has been determined between the angle of internal friction of the material and the ratio of sizes of discontinuous and shear microdefects in their Z-ensemble. It is shown that the distribution of stresses in the body is predetermined by the level of limiting states on the microshiftes, while deformations on the microshiftes are predetermined by the level of elastic deformations on the main direction of load.*

**Key words:** damage, continuity, microdefects, microshift, microfracture, Z-ensemble, microdefect matrix, SSS theory, mathematical model, elastic and defect areas, calculation algorithm, stresses, deformations.