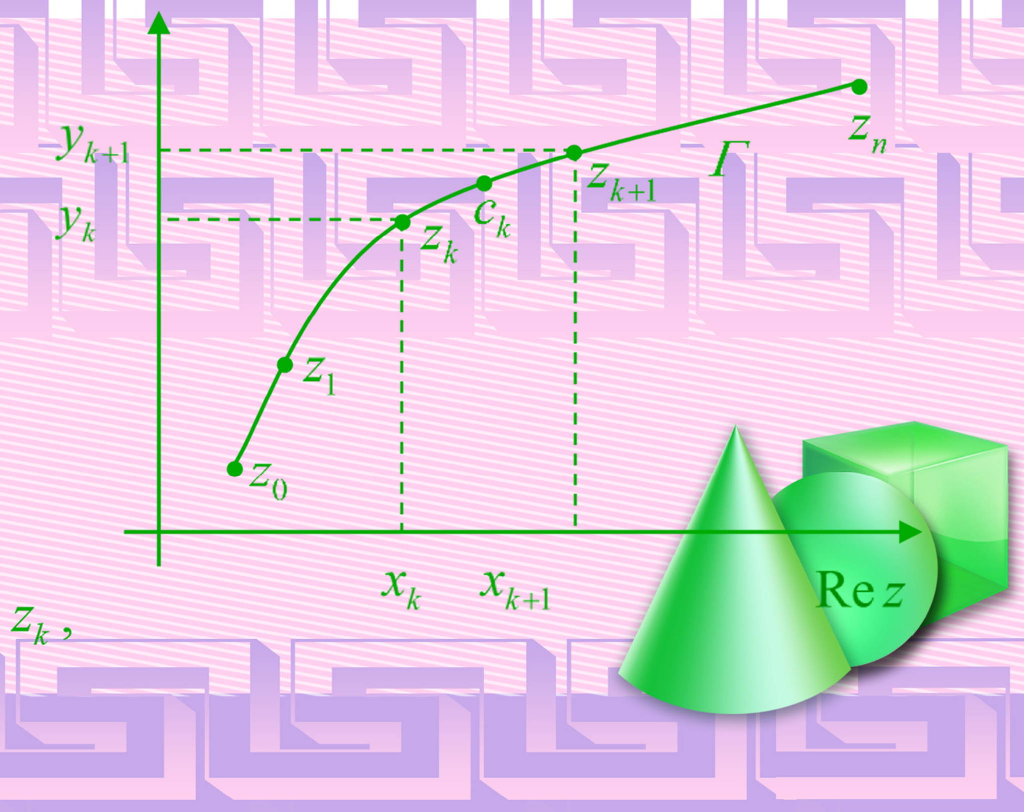
Т. В. Павленко
Т. Н. Сукач

Теория функций комплексного переменного в примерах и задачах



Министерство образования и науки Украины
Донбасский государственный технический университет

Т. В. Павленко, Т. Н. Сукач

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебное пособие

Рекомендовано ученым советом ДонГТУ

Алчевск
2014

УДК 517.53/55
ББК В161.5
П12

Павленко Татьяна Владимировна — кандидат экономических наук, доцент, заведующая кафедрой высшей математики Донбасского государственного технического университета;
Сукач Татьяна Николаевна — кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики Донбасского государственного технического университета.

Рецензенты:
В. В. Мурга — доцент, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой радиофизики Донбасского государственного технического университета;
С. В. Гонтовой — доцент, кандидат технических наук, заведующий кафедрой специализированных компьютерных систем Донбасского государственного технического университета.

Рекомендовано ученым советом
Донбасского государственного технического университета
(протокол № 3 от 28.03.2014)

Павленко Т. В.
П12 Теория функций елмплексного переменного в примерах и задачах : уч. пособ. / Т. В. Павленко, Т. Н. Сукач. — Алчевск : ДонГТУ, 2014. — 137 с.
ISBN 978-966-310-335-8

Изложены теоретические сведения и практические приложения по основным разделам теории функций комплексного переменного. Подробно рассмотрены типовые задачи и примеры, а также представлены задания для индивидуальной работы.
Для студентов высших учебных заведений.

УДК 517.53/55
ББК В161.5

ISBN 978-966-310-335-8

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие написано в соответствии с программой по специальным разделам курса высшей математики для студентов электротехнических, физико-математических специальностей.

Пособие состоит из шести глав, которые содержат теоретические сведения и практические приложения по основным разделам теории функций комплексного переменного.

В начале каждого параграфа приводятся необходимые теоретические сведения (определения, теоремы, формулы), а также подробно разбираются типовые задачи и примеры.

В учебном пособии также содержатся примеры для самостоятельного решения, которые снабжены ответами.

Первая и вторая главы посвящены комплексным числам и функциям комплексного переменного.

Третья и четвертая – дифференцированию и интегрированию функций комплексного переменного.

Ряды Лорана и Тейлора, вычеты и их применение рассмотрены в пятой и шестой главе.

В конце учебного пособия представлены задания для индивидуальной семестровой работы студентов стационарной и заочной формы обучения.

1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

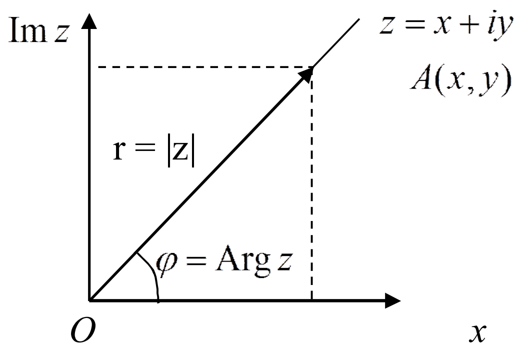
1.1. Комплексные числа

Определение 1. Комплексным числом z называется выражение $z = x + iy$, где x и y – действительные числа, i – мнимая единица, определяемая равенством $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$. Числа x и y называются соответственно **действительной** и **мнимой частями комплексного числа** z и обозначаются $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Определение 2. Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется **сопряженным** комплексному числу $z = x + iy$.

Определение 3. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ считаются равными, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Геометрическое изображение комплексного числа:



Комплексное число $z = x + iy$ изображается в плоскости XOY точкой с координатами (x, y) или вектором с началом в точке $O(0, 0)$ и концом в точке $A(x, y)$ (Рис. 1). Длина r вектора $\overline{OA}$ называется **модулем** комплексного числа и обозначается $|z|$: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Угол φ, образованный вектором $\overline{OA}$ с осью OX, называется **аргументом** комплексного числа z, обозначается $\varphi = \operatorname{Arg} z$ и определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...),$$

где $\arg z$ есть главное значение $\operatorname{Arg} z$, определяемое условиями

$$-\pi < \arg z \le \pi,$$

причем

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \ \textit{если} \ \ x > 0, \ \ y \ge 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \ \textit{если} \ \ x < 0, \ \ y \ge 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \ \textit{если} \ \ x < 0, \ \ y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, \ \textit{если} \ \ x = 0, \ \ y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, \ \textit{если} \ \ x = 0, \ \ y < 0. \end{cases} \qquad (1.1)$$

Имеют место следующие соотношения:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{Arg} z) = \frac{y}{x}, \ \ \sin(\operatorname{Arg} z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ \ \cos(\operatorname{Arg} z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (1.2)$$

Два комплексных числа z_1 и z_2 равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а их аргументы либо равны, либо отличаются на величину, кратную 2π:

$$|z_1| = |z_2|, \quad \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + 2\pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

1.2. Алгебраическая форма комплексного числа

Запись $z = x + iy$ называется **алгебраической формой записи** комплексного числа.

Пусть даны два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$.

Суммой $z_1 + z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \qquad (1.3)$$

Пример 1.

а) $(2+0i)+(7+4i)=9+4i$;

б) $(-2+3i)-(-9+5i)=7-2i$;

в) $(-3+5i)+(4-3i)=1+2i$.

Разностью z_1-z_2 комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2). \tag{1.4}$$

Произведением z_1z_2 комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1). \tag{1.5}$$

Из определения произведения комплексных чисел следует, что

$$z\bar{z}=x^2+y^2=|z|^2.$$

Пример 2.

$(-1-2i)(5-4i)=-5-10i+4i+8i^2=-5-10i+4i-8=-13-6i$.

Частным $\dfrac{z_1}{z_2}$ от деления комплексного числа z_1 на комплексное число $z_2\neq 0$ называется такое комплексное число z, которое удовлетворяет уравнению $zz_2=z_1$. Для частного имеет место формула

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}. \tag{1.6}$$

При этом была использована формула $z_2^{-1}=\dfrac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}$.

Пример 3.

$$\frac{7-4i}{3+2i}=\frac{(7-4i)\cdot(3-2i)}{(3+2i)\cdot(3-2i)}=....=1-2i;$$

Формулу $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$ можно записать в виде:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

Действительная часть $\operatorname{Re}z$ и мнимая часть $\operatorname{Im}z$ комплексного числа z выражаются через сопряженные комплексные числа следующим образом:

$$\operatorname{Re}z=\frac{\bar{z}+z}{2},\quad \operatorname{Im}z=i\frac{\bar{z}-z}{2}=\frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

Пример 4. Вычислить $z=\frac{z_1+z_1z_2+z_2^{\;2}}{z_1+z_3}$, если

$$z_1=2+3i;\ z_2=3-4i,\ z_3=1+i.$$

Решение.

$$z=\frac{(2+3i)+(2+3i)(3-4i)+(3-4i)^2}{2+3i+1+i}=$$

$$=\frac{2+3i+6+9i-8i-12i^2+9-24i+16i^2}{3+4i}=\frac{(13+20i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=$$

$$=\frac{39-60i-52i+80i^2}{9-16i^2}=\frac{-41-112i^2}{25}=-\frac{41}{25}-\frac{112}{25}i.$$

1.3. Тригонометрическая и показательная форма записи комплексного числа

Пусть $0x$ – полярная ось, $\varphi-$полярный угол, (0,0) – полюс, $|0A|=r$ – полярный радиус.

Любое комплексное число $z=x+iy$ $(z\neq 0)$ можно записать в **тригонометрической форме**

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\ \text{где}\ r=|z|,\quad \varphi=\operatorname{Arg}z. \qquad (1.7)$$

Комплексное число z может быть представлено в показательной форме

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi} \qquad (1.8)$$

где $r = |z|$ – модуль, $\varphi = \arg z$ – аргумент.

Связь между показательной и тригонометрической формами устанавливает **формула Эйлера:**

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (1.9)$$

Если $A - const$, то:

$A \geq 0$, тогда $A = |A|(\cos 0 + i\sin 0)$,

$A \leq 0$, тогда $A = |A|(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Пример 5. Записать в тригонометрической форме комплексное число $z = -1 - i\sqrt{3}$.

Решение.

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}, \quad \varphi = -\frac{2}{3}\pi;$$

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Пример 6. Найти модуль и главное значение аргумента $z = e^{3+5i}$.

Решение.

$$|z| = e^3; \quad \arg z = 5.$$

Пример 7. Решить уравнение $e^z - i = 0$.

Решение. Запишем число i в показательной форме:

$$i = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right) = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\pi\right)}.$$

$$z = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right).$$

Пусть два комплексных числа z_1 и z_2 даны в тригонометрической форме $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тогда их **произведение** находится по формуле:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

Пример 8. Найти произведение комплексных чисел

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \text{ и } z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Решение.

$$z_1 z_2 = 2 \cdot 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right)\right] = 6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 3 + 3\sqrt{3}i.$$

Частное двух комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ в тригонометрической форме находится по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

где
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|r_1|}{|r_2|}, \quad \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

Пример 9. Записать в тригонометрической форме число $\frac{2-2i}{1-\sqrt{3}i}$.

Решение.

$z_1 = 2 - 2i, \; z_2 = 1 - \sqrt{3}i$.

$|z_1| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}, \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{-2}{2} = -1, \; \arg z_1 = -\frac{\pi}{4}$.

$|z_2| = \sqrt{1 + (-\sqrt{3})^2} = 2. \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}, \quad \arg z_2 = -\frac{\pi}{3}$.

$|z| = \sqrt{2}, \; \arg z = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12}$, следовательно:

$$\frac{2-2i}{1-\sqrt{3}i} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + 2\pi k\right)\right], \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Пример 10. Найти действительные решения уравнения

$$(4+2i)x+(5-3i)y=13+i.$$

Решение. Выделим в левой части уравнения действительную и мнимую части:

$$(4x+5y)+i(2x-3y)=13+i.$$

Отсюда согласно определению равенства двух комплексных чисел получаем:

$$\begin{cases} 4x+5y=13, \\ 2x-3y=1. \end{cases}$$

Решив эту систему, находим

$$x=2, \quad y=1.$$

Возведение комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ в **натуральную степень** n находится по **формуле Муавра**:

$$z^n=(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)). \quad (1.10)$$

Отсюда очевидно при $r=1$:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi).$$

Пример 11. Вычислить по формуле Муавра $(\sqrt{3}+i)^3$.

Решение.

$z=\sqrt{3}+i, \quad r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2.$

$\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{6}.$

$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right).$

С помощью формулы Муавра находим:

$$(\sqrt{3}+i)^3=2^3\left(\cos\frac{3\pi}{6}+i\sin\frac{3\pi}{6}\right)=8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=8(0+i)=8i.$$

Вторая формула Муавра для извлечения корня n-й степени из комплексного числа z имеет n различных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{z(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad (1.11)$$

где $k = 0,1,2,\ldots,n-1, \quad \varphi = \arg z$.

Пример 12. Найти все значения кубического корня из единицы: $\sqrt[3]{1}$.

Решение. Представим 1 в тригонометрической форме:

$1 = \cos 0 + i\sin 0$.

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{0 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{0 + 2\pi k}{3};$$

$k = 0,\ x_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1;$

$$k = 1,\ x_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$k = 2,\ x_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Пример 13. Найти модуль и главное значение аргумента комплексного числа $z = -1 + i\sqrt{3}$ и записать его в тригонометрической и показательной форме.

Решение.

$|z| = r = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$.

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}; \quad \varphi = \pi - \operatorname{arctg}\varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

$$z = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

1.4. Множества и кривые на комплексной плоскости

Расстояние $\rho(z_1, z_2)$ между точками плоскости комплексного переменного $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ находится по формуле:

$$\rho(z_1, z_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |z_2 - z_1|. \quad (1.12)$$

Уравнение **окружности** радиуса R записывается в виде:

$$|z - z_0| = R.$$

Уравнение **круга** с центром z_0 радиуса R записывается неравенством:

$$|z - z_0| < R.$$

Кольцо с центром в точке z_0, радиусы внешней и внутренней окружностей которого R и r, задается неравенством

$$r < |z - z_0| < R.$$

Верхняя полуплоскость комплексной плоскости – множество точек, для которых $y \geq 0$, т.е. в комплексной форме $\operatorname{Im} z \geq 0$, соответственно $\operatorname{Im} z < 0$ – нижняя полуплоскость. Неравенство $\operatorname{Re} z \geq 0$ определяет правую полуплоскость, а неравенство $\operatorname{Re} z < 0$ – левую.

Пример 14. Найти множество точек на плоскости комплексного переменного z, определяемое условием $\operatorname{Im} z^2 > 2$.

Решение.

Пусть $z = x + iy$. Тогда

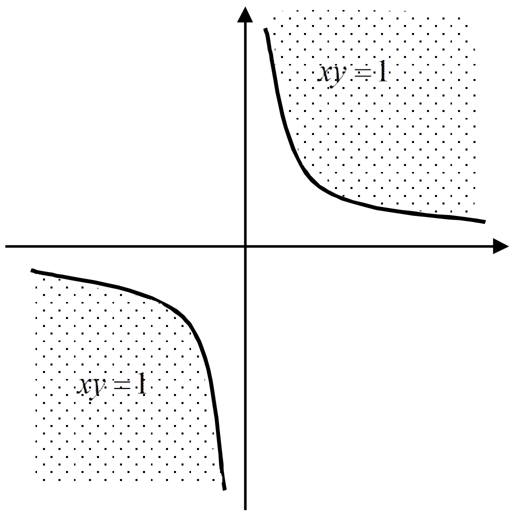
$z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$

$\operatorname{Im} z^2 = 2xy > 2$

$2xy > 2$

$xy > 1$

$y > \dfrac{1}{x}\ (x > 0);\quad y < \dfrac{1}{x}\ (x < 0)$



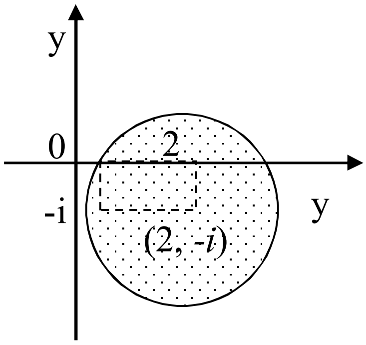
Это неравенство определяет множество точек в первой и третьей четвертях комплексной плоскости, соответственно над и под гиперболой $xy = 1$.

Пример 15. Найти множество точек координатной плоскости, изображающих комплексные числа, удовлетворяющие условию:

$$|z+i-2|\leq 2.$$

Решение. Запишем комплексное число z в алгебраической форме: $z=x+iy$. Тогда

$$z+i-2=x+iy+i-2=(x-2)+i(y+1).$$



По определению модуля комплексного числа

$$|z+i-2|=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}, \text{ откуда}$$

$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}\leq 2$, или $(x-2)^2+(y+1)^2\leq 2^2$.

Множество точек координатной плоскости,

удовлетворяющих последнему неравенству, представляет собой множество всех точек, лежащих внутри и на окружности радиуса 2 с центром в точке $(2;-i)$.

1.5. Практическое занятие 1

Пример 1. Вычислить:

1.1 $(-5+2i)-(3-5i)=-8+7i$;

1.2 $(3-4i)-(3+4i)=0-8i$.

1.3 $\dfrac{1+3i}{2+i}=\dfrac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{2-i+6i+3}{4-i^2}=\dfrac{5+5i}{5}=\dfrac{5(1+i)}{5}=1+i$;

1.4 $\dfrac{5+i}{1+2i}=\dfrac{(5+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{5+i-10i-2i^2}{1+4}=\dfrac{7-9i}{5}=\dfrac{7}{5}-\dfrac{9}{5}i$.

Пример 2. Записать комплексные числа $z_1=-1+i,\ z_2=-1$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение.

а) Для z_1 имеем $|z|=r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}.$

$$\arg z=arctg(-1)+\pi=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4};\varphi=\frac{3\pi}{4}.$$

$$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{\frac{i3\pi}{4}}.$$

б) Для z_2 имеем $|z|=\sqrt{1}=1$.

$$\arg z=\pi-\operatorname{arctg}(0)=\pi;\quad \varphi=\pi.$$

Поэтому:

$$-1=1(\cos\pi+i\sin\pi)=1e^{i\pi}.$$

Пример 3. Найти $(1+\sqrt{3}i)^9$.

Решение. Запишем число $z=1+\sqrt{3}i$ в тригонометрической форме:

$$r=\sqrt{1+3}=2.$$

$$\arg z=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1};\ \varphi=\frac{\pi}{3}.$$

$$1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

По формуле Муавра:

$$(1+\sqrt{3}i)^9=2^9\left(\cos\frac{9\pi}{3}+i\sin\frac{9\pi}{3}\right)=2^9(\cos 3\pi+i\sin 3\pi)=2^9(-1)=-512.$$

Пример 4. а) Найти $\sqrt[3]{i}$.

Решение. Запишем подкоренное число в тригонометрической форме:

$$i=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\sqrt[3]{\mathrm{i}}=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{{}^{\pi}\!/_{2}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{{}^{\pi}\!/_{2}+2\pi k}{3}\right).$$

$$k=0\quad \sqrt[3]{i}=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}.$$

$$k=1\quad \sqrt[3]{i}=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}.$$

$$k=2 \quad \sqrt[3]{i}=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i.$$

б) Найти $\sqrt{-1}$.

Решение. Запишем подкоренное число в тригонометрической форме:

$$-1=\cos\pi+i\sin\pi.$$

$$\sqrt{-1}=\sqrt{\cos\pi+i\sin\pi}=\cos\frac{\pi+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{2}.$$

$$k=0 \quad \sqrt{-1}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i.$$

$$k=1 \quad \sqrt{-1}=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i.$$

Пример 5. Вычислить $(1-i\sqrt{3})^3$.

Решение.

$$|z|=r=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2.$$

$$\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{1}; \quad \varphi=-\frac{\pi}{3}.$$

$$(1-i\sqrt{3})^3=\left(2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^3=2^3\left(\cos 3\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin 3\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=8(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi))=-8.$$

Пример 6. Найти множество точек координатной плоскости, изображающих комплексные числа, удовлетворяющие условию:

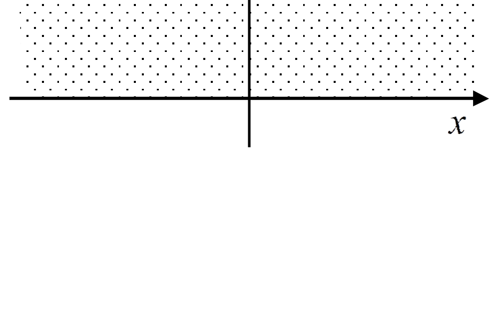
$$|z+i|>|z-i|$$

Решение. Пусть $z=x+iy$.

Тогда данное соотношение перепишется в виде:

$$|x+(y+1)i|>|x+(y-1)i|,$$

или $x^2+(y+1)^2>x^2+(y-1)^2$,



откуда

$$(y+1)^2 > (y-1)^2, \quad 4y > 0, \quad y > 0.$$

Следовательно, исходному соотношению удовлетворяют только комплексные числа, для которых $\operatorname{Im} z > 0$.

Пример 7. Найти все значения $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$.

Решение. Имеем $1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

$$z_k = \sqrt{1+i\sqrt{3}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{2}\right), \quad k = 0; 1.$$

Если $k = 0$, то $z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$,

При $k = 1$, $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Поэтому:

$$\sqrt{1+i\sqrt{3}} = \pm\left(\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Пример 8. Вычислить $(1+i)^{12}$.

Решение. Представим число $z = 1+i$ в тригонометрической или показательной форме:

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \ \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}.$$

Тогда по формуле Муавра:

$$z^{12}=(\sqrt{2})^{12}\left(\cos\left(12\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(12\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2^{12}}e^{3\pi i}=64(\cos 3\pi+i\sin 3\pi)=-64$$

Пример 9. Найти корни уравнения $z^6+1=0$.

Решение. Данное уравнение можно переписать так:

$$z^6=-1 \text{ или } z=\sqrt[6]{-1}.$$

Число -1 в тригонометрической форме имеет вид:

$-1=1(\cos\pi+i\sin\pi)$.

Корни исходного уравнения:

$$z_k=\sqrt[6]{-1}=1\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)=\mathrm{e}^{\frac{i(\varphi+2\pi k)}{n}},$$

где $k=\overline{0,5}$. Придавая k последовательно значения $0,1,2,...,5$, находим все шесть возможных корней данного уравнения $z^6+1=0$:

$$z_0=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{\frac{\pi i}{6}},$$

$$z_1=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i=e^{\frac{\pi i}{2}},$$

$$z_2=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{\frac{5\pi i}{6}},$$

$$z_3=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=e^{\frac{7\pi i}{6}}=e^{\frac{-5\pi i}{6}},$$

$$z_4=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i=e^{\frac{-\pi i}{2}}=e^{\frac{3\pi i}{2}},$$

$$z_5=\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=e^{\frac{11\pi i}{6}}=e^{\frac{-\pi i}{6}},$$

Пример 10. Вычислить z^4, если $z=1-\sqrt{3}i$.

Решение. Данное число в тригонометрической форме имеет вид

$$z=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

По первой формуле Муавра получаем:

$$z^4 = 2^4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^4 = 2^4\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 2^4\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2^4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^3(\sqrt{3}i - 1) = 8(\sqrt{3}i - 1)$$

.

1.6. Задания для самостоятельного решения

1. Найти все значения корня из комплексного числа.

1.1. $\sqrt[3]{-1}$. $\left[-1,\quad \frac{\left(\pm\sqrt{3} + i\right)}{2}\right]$

1.2. $\sqrt[4]{-4}$. $\left[\pm(1 \pm i)\right]$

1.3. $\sqrt{2 + 2\sqrt{3}i}$. $\left[\pm\left(\sqrt{3} + i\right)\right]$

1.4. $\sqrt{-2 + 2\sqrt{3}i}$. $\left[\pm\left(1 + \sqrt{3}i\right)\right]$

1.5. $\sqrt{-2 - 2\sqrt{3}i}$. $\left[\pm\left(1 - \sqrt{3}i\right)\right]$

1.6. $\sqrt[6]{-27}$. $\left[\pm\sqrt{3}i,\quad \pm\frac{\left(3 \pm \sqrt{3}i\right)}{2}\right]$

1.7. $\sqrt[6]{1}$. $\left[\pm 1,\quad \pm\frac{\left(1 \pm \sqrt{3}i\right)}{2}\right]$

1.8. $\sqrt[4]{-8 - 8\sqrt{3}i}$. $\left[\pm 1 \pm \sqrt{3}i\right]$

2. Найти значение выражения $(z_1 + 2z_2)z_3$, если $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 + 2i$, $z_3 = 5 - 2i$. $[54 + 19i]$

3. Даны комплексные числа $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = 3 - 4i$, $z_3 = 1 - 2i$. Найти число $z = \frac{(z_1 + z_3)z_2}{z_3}$. $\left[\frac{38}{5} + \frac{41}{5}i\right]$

4. Представить в тригонометрической и показательной формах комплексные числа $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = -i$, $z_4 = -4$.

5. Найти корни уравнения $z^8 - 1 = 0$.

$$\left[z_0 = 1,\; z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i,\; z_2 = i, \right.$$

$$\left. z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i,\; z_4 = -1,\; z_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i,\; z_6 = i,\; z_7 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right]$$

6. Найти значение выражения $(z_1 + 2z_3)z_2$, если $z_1 = 4 + 5i$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = 7 - 9i$. $[40 - 32i]$

7. Найти значение выражения $(z_1 + z_2 z_3)z_2$, если $z_1 = 4 + 8i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 9 + 13i$. $[7 + 19i]$

8. Решить уравнение $z^2 - i = 0$. $\left[\pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right]$

9. Найти значение выражения $(z_1{}^2 + z_2 + z_3)/z_2$, если $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -1 + 2i$, $z_3 = 8 + 12i$. $[2 + 2i]$

10. Представить в тригонометрической и показательной формах комплексные числа:

10.1. $z = -4i$ $\left[4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2} \right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = 4e^{-i\frac{\pi}{2}} \right]$

10.2. $z = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$ $\left[1\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right) = e^{-\frac{3\pi}{4} i} \right]$

10.3. $z = 1 + i\sqrt{3}$ $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + 2\pi k \right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) = 2e^{\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k \right) i} \right]$

11. Найти действительные значения x и y из уравнения $(4 - 3i)x - (2 - 5i)y = 2 + 9i$. $[x = 2,\; y = 3]$

12. Найти значение $\sqrt{1 + i\sqrt{3}}$. $\left[\sqrt{1 + i\sqrt{3}} = \pm\left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} \right) \right]$

13. Записать в тригонометрической форме число $z = \sqrt{3} + i$.

$$\left[z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k \right) + i\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k \right) \right) = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k \right)} \right]$$

14. Вычислить $(1 + i)^{12}$. $[-64]$

15. Найти корни уравнения $z^6 + 1 = 0$.

$$\left[z_0 = e^{\frac{i\pi}{6}}\right], \left[z_1 = e^{\frac{i\pi}{2}}\right], \left[z_2 = e^{\frac{-5i\pi}{6}}\right], \left[z_3 = e^{-\frac{5i\pi}{6}}\right], \left[z_4 = e^{\frac{3i\pi}{2}}\right], \left[z_5 = e^{-\frac{i\pi}{6}}\right]$$

16. Найти множества точек на плоскости комплексного переменного z, которые определяются заданными неравенствами:

16.1. $|z| \geq 2$. [Вся координатная плоскость, из которой вырезан круг радиуса 2 с центром в начале координат]

16.2. $\frac{1}{|z|} \geq 1, z \neq 0$. [Круг радиуса $r = 1$ с центром в начале координат, причем центр этого круга удален (круг «проколот»)]

16.3. $\left|\frac{1}{z}\right| \leq 2, z \neq 0$. [Вся координатная плоскость, из которой вырезан круг радиуса $r = \frac{1}{2}$ с центром в начале координат]

16.4. $|z - 5i| = 8$. [Окружность радиуса $r = 8$ с центром в точке $z = 5i$]

16.5. $|z - 1 - i| \leq 4$. [Круг вместе с границей радиуса $r = 4$ с центром в точке $z = 1 + i$]

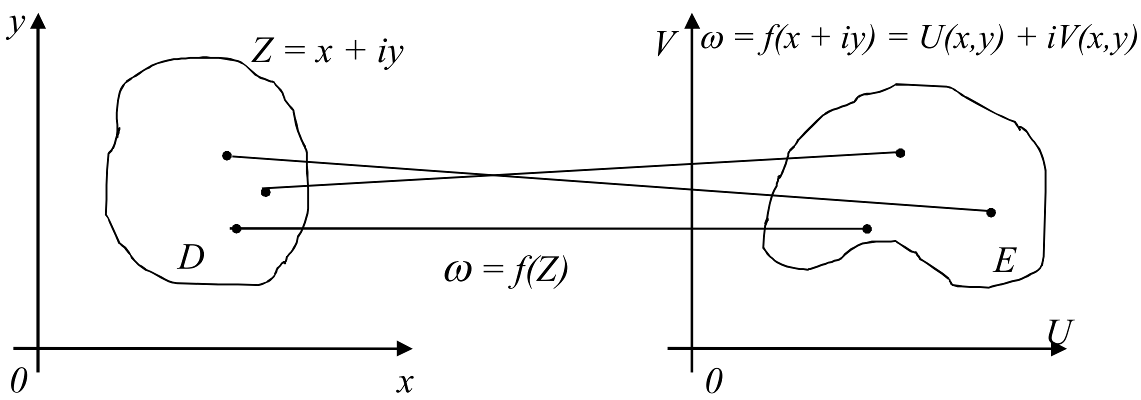
2. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

2.1. Основные понятия

Рассмотрим два множества D и E. Элементы множества D будем изображать точками комплексной плоскости Z и элементы множества E будем изображать точками комплексной плоскости ω.

Если каждому числу $z \in D$ поставлено в соответствие одно или несколько комплексных чисел $\omega = u + iv \in E$, то говорят, что на множестве D определена функция комплексного переменного $\omega = f(z)$

При этом возникает две функции $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$, причем $u(x,y)$ и $v(x,y)$ – функции действительного переменного.



Определение 1. Множество D называют областью **определения** функции комплексного переменного $\omega = f(z)$, а множество E называют областью **значения** функции комплексного переменного $\omega = f(z)$.

Пример 1. Выделить действительную и мнимую часть функции $\omega = f(z) = z^2 + i\bar{z}$.

Решение. Пусть $z = x + iy$, тогда

$$\omega = (x+iy)^2 + i(x-iy) = x^2 + 2xiy + i^2y^2 + ix - i^2y =$$

$$= (x^2 - y^2 + y) + i(2xy + x) = u + iv.$$

Итак: $u = \operatorname{Re}\omega = x^2 - y^2 + y$, $v = \operatorname{Im}\omega = 2xy + x$.

2.2. Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Пусть однозначная функция $\omega = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0, исключая, может быть, саму точку z_0. Под δ– **окрестностью точки** z_0 комплексной плоскости понимают внутренность круга радиуса δ с центром в точке z_0.

Определение 2. Число ω_0 называется **пределом функции** $\omega = f(z)$ **в точке** z_0 (или при $z \to z_0$), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что для всех $z \neq z_0$, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - \omega_0| < \varepsilon$.

Записывают: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \omega_0$.

Из определения следует, что если предел ω_0 существует, то существуют и пределы

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x;y) = u_0 \text{ и } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x;y) = v_0 .$$

Верно и обратное утверждение.

Теоремы об арифметических свойствах пределов для функции одного (или нескольких) действительного переменного остаются справедливыми и для функции комплексного переменного.

Так, если функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ имеют пределы в точке $z_0 \in D$, то

$$\lim_{z \to z_0}(c_1 f_1(z) \pm c_2 f_2(z)) = c_1 \lim_{z \to z_0} f_1(z) \pm c_2 \lim_{z \to z_0} f_2(z), \qquad (2.1)$$

где c_1, c_2 – постоянные;

$$\lim_{z \to z_0}(f_1(z) \cdot f_2(z)) = \lim_{z \to z_0} f_1(z) \cdot \lim_{z \to z_0} f_2(z); \qquad (2.2)$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{\lim\limits_{z \to z_0} f_1(z)}{\lim\limits_{z \to z_0} f_2(z)}, \qquad (2.3)$$

если $\lim\limits_{z \to z_0} f_2(z) \neq 0$.

Определение 3. Пусть функция $\omega = f(z)$ определена в точке $z = z_0$ и в некоторой ее окрестности. Функция $\omega = f(z)$ называется **непрерывной в точке** z_0, если $\lim\limits_{z \to z_0} f_2(z) = f(z_0)$.

Определение непрерывности можно сформулировать и так: функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta f(z) = 0.$$

Функция $f(z)$ непрерывна в области D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Модуль непрерывной функции комплексного переменного обладает теми же свойствами, что и непрерывная функция действительного переменного.

2.3. Показательная функция комплексного переменного

Показательную функцию комплексного переменного

$$w = e^z$$

определим равенством

$$e^z = e^{(x+iy)} = e^x(\cos y + i\sin y), \tag{2.4}$$

положив $z = x$ ($y = 0$), установим, что для действительных z функция $e^z = e^x(\cos 0 + i\sin 0) = e^x$ – совпадает с известной функцией действительного переменного.

Также при $x = 0$ справедлива следующая **формула Эйлера**:

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y. \tag{2.5}$$

Функция $w = e^z$ определена на всей комплексной плоскости и на действительной оси совпадает с соответствующей функцией действительного переменного.

Укажем некоторые **свойства показательной функции**:

1) $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$; $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$;

2) $e^z \neq 0$, так как $|e^z| = e^x > 0$;

3) e^z периодическая с периодом $T = 2\pi i$, т.к. $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} =$
$= e^z(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = e^z$.

4) $\lim\limits_{\substack{\operatorname{Re} z \to -\infty \\ z \to -\infty}} e^z = 0$, $\lim\limits_{\substack{\operatorname{Re} z \to +\infty \\ z \to +\infty}} e^z = \infty$;

5) e^z не всегда > 0, например $e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 < 0$.

Пример 2. Вычислить e^{1+2i}.

Решение.

$e^{1+2i} = e(\cos 2 + i\sin 2) = 2{,}7(-0{,}4161 + i0{,}9092) = -1{,}1235 + 2{,}4451\,i$.

2.4. Логарифмическая функция

Определение 4. Логарифмическая функция

$$w = \operatorname{Ln} z,$$

где $z \neq 0$, определяется как функция обратная к показательной функции $z = e^w$, причем

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z = \ln|z| + i\arg z + i2\pi k,\ \ k \in \mathrm{Z}. \qquad (2.6)$$

Эта функция является многозначной. Ее значение при $k = 0$ называется главным значением или главной ветвью логарифма и обозначается $\ln|z|$, т.е.

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z \text{ и } \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i2\pi k,\ \ k \in \mathrm{Z}. \qquad (2.7)$$

Представим число Z в показательной форме: $z = re^{i\varphi}$, а функцию: $\omega = u + iv$. Тогда $re^{i\varphi} = e^{u+iv} = e^u e^{iv}$, значит, $r = e^u$ и $e^{i\varphi} = e^{iv}$, или $\varphi = v + 2\pi k$.

Итак, $u = \ln r = \ln|z|$ и $v = \varphi + 2\pi k = \arg z + 2\pi k$.

Справедливы следующие **свойства логарифмической функции**:

1) $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$,

2) $\operatorname{Ln}\dfrac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$,

3). $\operatorname{Ln}(z^n) = n\operatorname{Ln} z$, (2.8)

4). $\operatorname{Ln}\sqrt[n]{z} = \dfrac{1}{n}\operatorname{Ln} z$

Пример 3. Вычислить $\mathrm{Ln}(5+3i)$.

Решение. Найдем модуль и аргумент числа $z=5+3i$.

$$|z|=\sqrt{25+9}=\sqrt{34},\quad \arg z=\mathrm{arctg}\frac{3}{5}.$$

Из представления функции $\mathrm{Ln}z$ имеем:

$$\mathrm{Ln}(5+3i)=\ln\sqrt{34}+i\left(\mathrm{arctg}\frac{3}{5}+2\pi k\right),\ k\in Z.$$

Пример 4. Вычислить $\ln i$.

Решение. $|i|=1;\quad \mathrm{arctg}\, i=\frac{\pi}{2}$.

$$\ln i=\ln 1+i\frac{\pi}{2}+i2\pi k=i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right).$$

2.5. Степенная функция

Степенная функция $\omega=z^n$.

Возможны случаи:

а) $n\in N$, функция однозначна, определяется первой формулой Муавра:

$$\omega=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi);\tag{2.9}$$

б) $n=\frac{1}{p}$, где $p\in N$, функция многозначна, определяется второй формулой Муавра:

$$\omega=r^{\frac{1}{p}}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{p}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{p}\right)\ k=0,\dots,p-1;\tag{2.10}$$

в) $n=\frac{m}{p}$, где $m,p\in N$, функция многозначна, определяется комбинацией формул Муавра:

$$\omega=r^{\frac{m}{p}}\left(\cos\frac{m(\varphi+2\pi k)}{p}+i\sin\frac{m(\varphi+2\pi k)}{p}\right)\ k=0,\dots,p-1.\tag{2.11}$$

г) Общая степенная функция $\omega = z^n$

где $n = \alpha + i\beta$ – любое комплексное число, определяется равенством

$$z^n = e^{n\mathrm{Ln}z}. \tag{2.12}$$

Это многозначная функция, главное значение которой равно $z^n = e^{n\mathrm{Ln}z}$.

д) Общая показательная функция

$$w = a^z$$

где $a = \alpha + i\beta \neq 0$ – любое комплексное число, определяется равенством

$$a^z = e^{z\mathrm{Ln}a}. \tag{2.13}$$

Это многозначная функция, главное значение которой равно $a^z = e^{z\mathrm{Ln}a}$.

Пример 5. Найти значение степени $(1 - i\sqrt{3})^i$.

Решение. Представим $(1 - i\sqrt{3})^i$ согласно определению показательной функции в виде

$$(1 - i\sqrt{3})^i = e^{i\mathrm{Ln}(1 - i\sqrt{3})}.$$

Найдём значение

$$\mathrm{Ln}(1 - i\sqrt{3}).$$

Для чего найдём модуль и аргумент комплексного числа $1 - i\sqrt{3}$, получим:

$$|1 - i\sqrt{3}| = 2, \quad \arg(1 - i\sqrt{3}) = \mathrm{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{1} = -\frac{\pi}{3}.$$

Отсюда имеем

$$\mathrm{Ln}(1 - i\sqrt{3}) = \ln 2 + i\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right).$$

Используя последнее выражение, найдем:

$$(1-i\sqrt{3})^{i}=e^{iLn(1-i\sqrt{3})}=e^{i\left(ln2+i\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)\right)}=e^{\frac{\pi}{3}-2\pi\pi}e^{iln2}=$$

$$=e^{\frac{\pi}{3}-2\pi\pi}(\cos\ln 2+i\sin\ln 2),\ k\in Z.$$

2.6. Тригонометрические и гиперболические функции

Тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ определим через показательную функцию по формулам Эйлера

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i};\ \ \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2};\ \ \mathrm{tg}\, z=\frac{\sin z}{\cos z};\ \ \mathrm{ctg}\, z=\frac{\cos z}{\sin z}\ . \quad (2.14)$$

Укажем некоторые **свойства тригонометрических функций**:

1) При $z=x$, $\sin z$ и $\cos z$ совпадают с тригонометрическими функциями $\sin x$ и $\cos x$ действительной переменной x.

2) Выполняются основные тригонометрические соотношения.

3) $\sin z$ и $\cos z$ периодические функции с основным периодом 2π.

4) $\sin z$–нечетная функция, $\cos z$–четная функция.

5) Могут принимать любые значения, а не только ограниченные по модулю единицей.

Определим функции гиперболический синус $\mathrm{sh}z$ и гиперболический косинус $\mathrm{ch}z$ формулами:

$$\mathrm{sh}z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}\ \text{ и }\ \mathrm{ch}z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}. \quad (2.15)$$

Из определения функций $\mathrm{sh}z$ и $\mathrm{ch}z$ следует, что они периодичны с периодом $2\pi i$.

Соответственно:

$$\mathrm{th}\, z=\frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z};\quad \mathrm{cth}\, z=\frac{\mathrm{ch}\, z}{\mathrm{sh}\, z}. \quad (2.16)$$

Функции $\mathrm{th}\, z$ и $\mathrm{cth}z$ периодичны с периодом πi.

Связь гиперболических функций с тригонометрическими выражается равенствами:

$$\sin z=-i\cdot\mathrm{sh}(iz),\quad \cos z=\mathrm{ch}(iz)\qquad \mathrm{sh}z=-i\cdot\sin(iz),\quad \mathrm{ch}z=\cos(iz)$$

$$\mathrm{tg}\, z=-i\cdot\mathrm{th}(iz),\quad \mathrm{ctg}\, z=i\cdot\mathrm{cth}(iz)\quad \mathrm{th}\, z=-i\cdot\mathrm{tg}(iz),\quad \mathrm{cth}\, z=i\cdot\mathrm{ctg}(iz)$$

Основные тождества для гиперболических функций:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1 & \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = e^z \\ \operatorname{ch} 2z = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z & \operatorname{sh} 2z = 2\operatorname{sh} z \cdot \operatorname{ch} z \\ \operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z & \operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z \end{array} \tag{2.17}$$

Пример 6. Найти действительную и мнимую часть комплексного числа $\cos(1+i)$.

Решение. Воспользуемся тригонометрической формулой

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

тогда

$$\cos(1+i) = \cos 1 \cos i - \sin 1 \sin i.$$

Запишем $\cos i$ и $\sin i$ через гиперболические функции

$$\cos i = \operatorname{ch} 1 \text{ и } \sin i = i \cdot \operatorname{sh} 1.$$

Окончательно получаем

$$\cos(1+i) = \cos 1 \operatorname{ch} 1 - i \cdot \sin 1 \operatorname{sh} 1.$$

Таким образом,

$$\operatorname{Re}\cos(1+i) = \cos 1 \operatorname{ch} 1, \quad \operatorname{Im}\cos(1+i) = -\sin 1 \operatorname{sh} 1$$

Пример 7. Доказать $\sin iz = i \operatorname{sh} z$.

Решение.

$$\sin iz = \frac{1}{2i}(e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}) = \frac{1}{2i}(e^{-z} - e^{z}) = \frac{-i(e^{-z} - e^{z})}{2i^2} = \frac{i(e^{z} - e^{-z})}{2} = i \operatorname{sh} z$$

2.7. Обратные тригонометрические функции

Функции $\omega = \operatorname{Arcsin} z$, $\omega = \operatorname{Arccos} z$, $\omega = \operatorname{Arctg} z$, $\omega = \operatorname{Arcctg} z$ определяются как функции обратные к тригонометрическим функциям $z = \sin\omega$, $z = \cos\omega$, $z = \operatorname{tg}\omega$, $z = \operatorname{ctg}\omega$ соответственно. Все они являются многозначными и выражаются через логарифмическую функцию:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Arc}\sin z = -i\operatorname{Ln}\left(\mathrm{i}z + \sqrt{1-z^2}\right)\\
&\operatorname{Arc}\cos z = -i\operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)\\
&\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}\\
&\operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+i}{z-i}
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

Пример 8. Решить уравнение $\sin z = 5$.

Решение. Если $\sin z = 5$, то $z = \arcsin 5$. Воспользуемся соответствующей формулой:

$$z = \arcsin 5 = -i\operatorname{Ln}\left(i5 + \sqrt{1-5^2}\right) = -i\operatorname{Ln}\left(i5 + \sqrt{-24}\right).$$

Получим две серии корней:

$$z = -\mathrm{i}\operatorname{Ln}\left(i5 + i2\sqrt{6}\right) \text{ и } z = -i\operatorname{Ln}\left(i5 - i2\sqrt{6}\right).$$

Так как

$$|(5+2\sqrt{6})i| = 5+2\sqrt{6}, \quad |(5-2\sqrt{6})i| = 5-2\sqrt{6}$$

и
$$\arg(5+2\sqrt{6})i = \arg(5-2\sqrt{6})i = \frac{\pi}{2},$$

получим

$$\operatorname{Ln}(5+2\sqrt{6})i = \operatorname{Ln}(5+2\sqrt{6}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

и
$$\operatorname{Ln}(5-2\sqrt{6})i = \operatorname{Ln}(5-2\sqrt{6}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right).$$

Следовательно,

$$z_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(5+2\sqrt{6}),$$

$$z_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(5-2\sqrt{6}); \quad k \in \mathrm{Z}.$$

Пример 9. Записать в алгебраической форме $\operatorname{Arctg}(1+i)$.

Решение. Т.к. $\operatorname{arctg} z = -\dfrac{i}{2}\ln\dfrac{1+iz}{1-iz}$, а $z = 1+i$, получим:

$$\operatorname{Arctg}(1+i)=-\frac{i}{2}\ln\frac{1+i(1+i)}{1-i(1+i)}=-\frac{i}{2}\ln\frac{i}{2-i}=-\frac{i}{2}\ln\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right).$$

Далее:

$$\ln z=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z, \quad |z|=\sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}=5^{-\frac{1}{2}}$$

$$\ln\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right)=-\frac{1}{2}\ln 5+(2k+1)\pi i-i\operatorname{arctg} 2.$$

И окончательно:

$$\operatorname{Arctg}(1+i)=-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2+(2k+1)\frac{\pi}{2}+\frac{i}{4}\ln 5 \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots).$$

2.8. Практическое занятие 2

Пример 1. Вычислить e^{1+2i}.

Решение.

$$e^{1+2i}=e(\cos 2+i\sin z)=2{,}7(-0{,}4161+i0{,}9092)=-1{,}1235+2{,}4451i.$$

Пример 2. Записать в показательной форме число $z=\sqrt{3}+i$.

Решение. Представим число в тригонометрической форме:

$$|z|=\sqrt{3+1}=2,\ \arg z=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$$

и
$$z=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)\right)=2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)}.$$

Пример 3. Найти модуль и главное значение аргумента комплексного числа $z=e^{3+5i}$.

Решение. Представим число z в тригонометрической форме

$$z=e^{3+5i}=e^3(\cos 5+i\sin 5).$$

Отсюда видно, что

$$|z|=e^3,\ \arg z=5.$$

Пример 4. Решить уравнение $e^z - i = 0$.

Решение. Запишем число i в показательной форме

$$i = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right) = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}.$$

Перепишем уравнение $e^z - i = 0$ в виде

$$e^z = e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi \mathrm{k}\right)}, \text{ поэтому } z = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in Z.$$

Пример 5. Найти $\ln z$ и $\mathrm{Ln}\, z$ для числа а) $z = i$, б) $z = 1 - \sqrt{3}i$.

Решение. а) Находим модуль и аргумент числа $z = i$:

$$|z| = 1,\ \arg z = \frac{\pi}{2}.$$

Имеем:

$$\ln i = \ln 1 + \frac{\pi}{2}i = \frac{\pi}{2}i, \quad \mathrm{Ln}\, i = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

б) Для числа $z = 1 - \sqrt{3}i$ находим модуль и аргумент:

$$|z| = 2,\ \mathrm{tg}\,\varphi = -\sqrt{3},\ \varphi = -\frac{\pi}{3}.$$

Поэтому $\ln(1 - \sqrt{3}i) = \ln 2 - \dfrac{\pi}{3}i$.

$$\mathrm{Ln}(1 - \sqrt{3}i) = \ln 2 + \left(2k\pi - \frac{\pi}{3}\right)i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Пример 6. Дана функция $\omega = e^z$. Найти ее значение при:

а) $z = \pi i$; б) $z = \pi\left(2 - \dfrac{1}{3}i\right)$; в) $z = -2 + \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right)i, \quad k \in z$.

Решение. а) По формуле Эйлера находим:

$$\omega = e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

б) $\omega = e^{\pi\left(-2\frac{1}{3}i\right)} = e^{2\pi}e^{-\frac{\pi}{3}i} = e^{2\pi}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = e^{2\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

в) $\omega = e^{-2+\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)i} = e^{-2}e^{\frac{\pi}{2}i} = e^{-2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = e^{-2}i = \frac{i}{e^2}$.

Пример 7. Найти $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, если:

а) $z = \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2i\right)$, б) $z = \operatorname{sh}\left(2 + \frac{\pi}{6}i\right)$.

Решение.

а) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2i\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos 2i + \cos\frac{\pi}{3}\sin 2i = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2i + \frac{1}{2}\sin 2i$.

Учитывая связь гиперболических функций с тригонометрическими находим:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} 2 + \frac{1}{2}i\operatorname{sh} 2.$$

Отсюда имеем $\operatorname{Re} z = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} 2$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2$.

б) Аналогично находим:

$$z = \operatorname{sh}\left(2 + \frac{\pi}{6}i\right) = \operatorname{sh} 2 \cdot \operatorname{ch}\frac{\pi}{6}i + \operatorname{ch} 2 \cdot \operatorname{sh}\frac{\pi}{6}i = \operatorname{sh} 2 \cdot \cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{ch} 2 \cdot \sin\frac{\pi}{6} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh} 2 + i\frac{1}{2}\operatorname{ch} 2.$$

Итак, имеем

$$\operatorname{Re} z = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh} 2, \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2}\operatorname{ch} 2.$$

Пример 8. Вычислить i^{-i}.

Решение. По формуле общей степенной функции запишем i^{-i} в виде $i^{-i} = e^{-i\operatorname{Ln} i}$. Найдем значение для $\operatorname{Ln} i$:

$$\operatorname{Ln} i = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Поэтому $i^{-i} = e^{-i^2\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} = e^{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

2.9. Задания для самостоятельного решения

1. Записать в показательной форме числа:

1.1. $z=-1$. $[e^{i\pi}]$

1.2. $z=-i$. $\left[e^{\frac{i\pi}{2}}\right]$

1.3. $z=1-i$. $\left[\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}\right]$

1.4. $z=\sqrt{3}-i$. $\left[2e^{-\frac{i\pi}{6}}\right]$

2. Найти модули и главные значения аргументов комплексных чисел:

2.1. e^{3+2i}. $\left[|z|=e^3, \arg z=2\right]$

2.2. e^{1-3i}. $\left[|z|=e, \arg z=-3\right]$

2.3. $e^{i\varphi}$, $|\varphi|<\pi$. $\left[|z|=1, \arg z=\varphi\right]$

2.4. $e^{-i\varphi}$, $|\varphi|<\pi$. $\left[|z|=1, \arg z=-\varphi\right]$

3. Найти действительные и мнимые части следующих функций:

3.1. $z=\cos(2+i)$. $\left[\operatorname{Re} z=\cos 2\operatorname{ch}1,\ \operatorname{Im} z=-\sin 2\operatorname{sh}1\right]$

3.2. $z=\sin 2i$. $\left[\operatorname{Re} z=0,\ \operatorname{Im} z=\operatorname{sh}2\right]$

3.3. $z=\operatorname{sh}(-2+i)$. $\left[\operatorname{Re} z=-\cos 1\operatorname{sh}2,\ \operatorname{Im} z=\sin 1\operatorname{ch}2\right]$

3.4. $z=\operatorname{ch} i$. $\left[\operatorname{Re} z=\cos 1,\ \operatorname{Im} z=0\right]$

3.5. $z=\operatorname{tg}(2-i)$. $\left[\operatorname{Re} z=\dfrac{\sin 4}{2(\cos^2 2+\operatorname{sh}^2 1)},\ \operatorname{Im} z=\dfrac{\operatorname{sh}2}{2(\cos^2 2+\operatorname{sh}^2 1)}\right]$

4. Вычислить:

4.1. $\operatorname{Ln} e$. $\left[1+i2k\pi,\ k\in Z\right]$

4.2. $\operatorname{Ln}(-1)$. $\left[i(2k+1)\pi,\ k\in Z\right]$

4.3. $\operatorname{Ln} i$. $\left[i(4k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k\in Z\right]$

4.4. $\operatorname{Ln}(3-4i)$. $\left[\ln 5+i\left(-\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}+2k\pi\right),\ k\in Z\right]$

4.5. $\mathrm{Ln}(-4+3i)$. $\left[\ln 5 + i\left(-\mathrm{arctg}\dfrac{3}{4} + \pi(2k+1)\right),\ k \in Z\right]$

4.6. $\mathrm{Ln}\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$. $\left[i\left(\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right),\ k \in Z\right]$

4.7. $\mathrm{Ln}\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$. $\left[i\left(-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right),\ k \in Z\right]$

5. Найти значения степеней:

5.1. $i^{\sqrt{2}}$. $\left[\cos 2\sqrt{2}k\pi + i\sin 2\sqrt{2}k\pi,\ k \in Z\right]$

5.2. i^{i}. $\left[e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi},\ k \in Z\right]$

5.3. $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$. $\left[\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}(8k+1)},\ k \in Z\right]$

5.4. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$. $\left[\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}e^{\frac{\pi}{6}(12k-1)},\ k \in Z\right]$

5.5. $(3-4i)^{1+i}$. $\left[\cos\left(\ln 5 - \mathrm{arctg}\dfrac{4}{3}\right) + i\sin\left(\ln 5 - \mathrm{arctg}\dfrac{4}{3}\right),\ k \in Z\right]$

6. Вычислить:

6.1. $\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{1}{2}\right)$. $\left[(-1)^{k}\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z\right]$

6.2. $\mathrm{Arccos}\left(\dfrac{1}{2}\right)$. $\left[\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z\right]$

6.3. $\mathrm{Arccos}\,2$. $\left[2 + i\ln(2+\sqrt{3}),\ 2\pi k - i\ln(2+\sqrt{3}),\ k \in Z\right]$

6.4. $\mathrm{Arcsin}\,i$. $\left[(\pi k + i(-1)^{k}\ln(1+\sqrt{2}),\ k \in Z\right]$

6.5. $\mathrm{Arc\,tg}(1+2i)$. $\left[-\dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}\dfrac{1}{2} + (2k+1)\dfrac{\pi}{2} + i\dfrac{\ln 5}{4},\ k \in Z\right]$

3. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ И АНАЛИТИЧНОСТЬ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

3.1. Производная функции

Рассмотрим простейший случай: **комплексная функция действительного переменного** $\omega : D \to E$, где $D \subseteq R$, тогда производной называется

$$\omega'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\omega(x_0 + \Delta x) - \omega(x_0)}{\Delta x} = A \text{; и } \omega'(x_0) = u'(x_0) + iv'(x_0)\,.$$

Рассмотрим теперь **комплексную функцию комплексного переменного** $Z = x + iy$.

Частной производной функции $\omega : D \to E$, где $D \subseteq R$ во внутренней точке $z_0 \in D$ называется

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \omega'_x(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\omega(z_0 + \Delta x) - \omega(z_0)}{\Delta x} = A$$

или аналогично

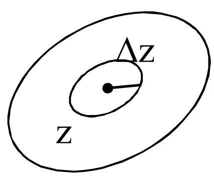
$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \omega'_y(z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\omega(z_0 + i\Delta y) - \omega(z_0)}{\Delta y} = B\,.$$

Итак: $\dfrac{\partial \omega}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial x} + i\dfrac{\partial V}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial \omega}{\partial y} = \dfrac{\partial U}{\partial y} + i\dfrac{\partial V}{\partial y}$.

Производная в смысле комплексной переменной:

$$\omega'_z(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\omega(z_0 + \Delta z) - \omega(z_0)}{\Delta z} = \frac{d\omega}{dz}(z_0). \tag{3.1}$$

Если существует этот предел, то говорят, что функция дифференцируема в точке z_0.



По любому направлению приближаясь к z_0, получаем единственный предел.

Из дифференцируемости функции $\omega(z)$ следует её непрерывность в точке z_0, но обратное не верно.

3.2. Условия Коши-Римана

Пусть $z = x + iy$ и функция $\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x,y)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$. Функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 тогда и только тогда, когда

1) $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы как функции двух переменных в точке (x_0,y_0);

2) выполняются **условия Коши-Римана:**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{или} \quad \begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}. \tag{3.2}$$

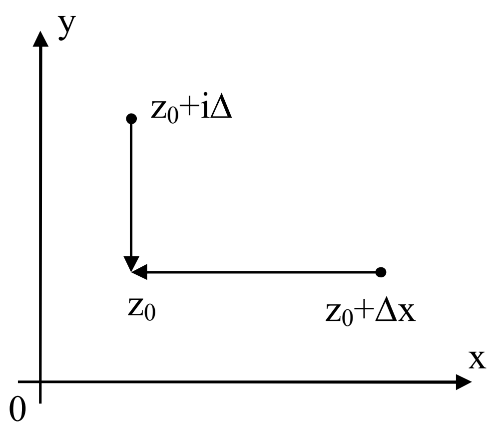
Докажем **необходимость:**

Пусть $f(z)$ дифференцируема в точке z_0, тогда

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

существует и не зависит от пути приближения к z_0.

Рассмотрим два приближения:



1) вдоль действительной оси $\Delta z = \Delta x$ и $\Delta y = 0$, тогда

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} = f'_x(z_0) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x}$$

2) вдоль мнимой оси $\Delta z = i\Delta y$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(z_0 + i\Delta y) - f(z_0)}{i\Delta y} = -i\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(z_0 + i\Delta y) - f(z_0)}{\Delta y} =$$

$$= -i\left(\frac{\partial U}{\partial y} + i\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{\partial V}{\partial y} - i\frac{\partial U}{\partial y},$$

а т.к. результат должен получится один и тот же, то

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Достаточность: Пусть теперь известно, что выполняются условия $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$ и $\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}$. Докажем, что функция $f(z)$ – дифференцируема.

По условию теоремы функции $U(x,y)$ и $V(x,y)$ – дифференцируемы в точке z_0, тогда их полные приращения

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \text{ и } \Delta V = \frac{\partial V}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\Delta y + \alpha_2,$$

где α_1 и α_2 — бесконечно малые функции относительно $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta U + i\Delta V}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \alpha_1\right) + i\left(\frac{\partial V}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\Delta y + \alpha_2\right)}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y\right) + i\left(\frac{\partial V}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\Delta y\right)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\alpha_1 + i\alpha_2}{\Delta x + i\Delta y} =$$

(используем условие $\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}$ и $\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{\partial U}{\partial y}$)

$$=\frac{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\Delta x-\frac{\partial V}{\partial x}\Delta y\right)+i\left(\frac{\partial V}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial U}{\partial x}\Delta y\right)}{\Delta x+i\Delta y}+\alpha_3=$$

$$=\frac{\frac{\partial U}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)+i\frac{\partial V}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}+\alpha_3=\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial x}+\alpha_3.$$

Рассмотрим предел

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial x}+\alpha_3\right)=\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial x}$$

Он существует, значит, функция $f(z)$ - дифференцируема.

Справедливы следующие **правила дифференцирования**:

Пусть функции $f(z)$ и $q(z)$ дифференцируемы, а C произвольная постоянная, тогда

1) $C'=0$.
2) . $(Cf(z))'=Cf'(z)$.
3) . $(f(z)+q(z))'=f'(z)+q'(z)$. (3.3)
4) . $(f(z)q(z))'=f'(z)q(z)+f(z)q'(z)$.
5). $\left(\frac{f(z)}{q(z)}\right)'=\frac{f'(z)q(z)-f(z)q'(z)}{q^2(z)},\quad q(z)\neq 0$.

6) Производная **сложной** функции. Если функция $\varphi=f(z)$ имеет производную в точке z_0, а функция $\xi=\varphi(w)$, определенная на множестве значений функции $f(z)$, имеет производную в точке w_0, $w_0=f(z_0)$, то сложная функция $\xi=\varphi(f(z))$ имеет производную в точке z_0 и справедливо равенство:

$$(\varphi(f(z_0)))'=\varphi'(w_0)f'(z_0). \tag{3.4}$$

7) Производная **обратной** функции. Если функция $\varphi=f(z)$ имеет производную в точке z_0 и $f'(z_0)\neq 0$, а обратная к $f(z)$ функция

$z=\varphi(w)$ существует и непрерывна, то она имеет производную в точке w_0, $w_0=f(z_0)$ и справедливо равенство

$$\varphi'(w_o)=\frac{1}{f'(z_0)}. \tag{3.5}$$

3.3. Теорема (о дифференцируемости основных элементарных функций комплексного переменного)

Функция: e^z, sin*z*, cos*z*, sh*z*, ch*z*, $z^n(n\in N)$ дифференцируемы в любой точке плоскости. Функции tg*z* и th*z* также дифференцируемы в любой точке кроме $\left(\frac{\pi}{2}+\pi\kappa\right)$ и $\left(\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\kappa\right)i\right)$ - соответственно. Для функции $\mathrm{Ln}\,z$ и z^a можно выделить однозначную ветвь в окрестности z и эта ветвь будет дифференцирована.

(Без доказательства)

Определение 1. Функция называется **аналитической** или **голоморфной** в точке z, если она дифференцируема (выполняются условия Коши-Римана) в некоторой окрестности этой точки. Функция $f(z)$ называется **аналитической** в области *D*, если она дифференцируема в каждой точке $z\in D$.

Определение 2. Точки плоскости, в которых однозначная функция $f(z)$ аналитична, называются **правильными** точками $f(z)$. Точки, в которых функция $f(z)$ не является аналитической, называются **особыми точками** этой функции.

Пример: $\omega=z^2$ проверить на аналитичность

$$\omega=(x+iy)^2=\left(x^2-y^2\right)+i2xy=U+iV. \tag{3.6}$$

Проверим условие Коши-Римана:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=2x \qquad \frac{\partial U}{\partial y}=-2y \qquad \frac{\partial V}{\partial x}=2y \qquad \frac{\partial V}{\partial y}=2x$$

Итак $$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y} \qquad \frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial x}$$

Если условие выполняется во всех точках плоскости, следовательно, функция дифференцируема и

$$\frac{d\omega}{dx}=\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial x}=2x+i2y=2(x+iy)=2z \text{ или } \frac{\partial\omega}{\partial z}=\left(z^2\right)'=2z.$$

Таблица производных (3.7)

1. $(z^n)'=nz^{n-1}$.
2. $(e^z)=e^z$.
3. $(\sin z)'=\cos z$.
4. $(\cos z)'=-\sin z$
5. $(\operatorname{tg} z)'=\dfrac{1}{\cos^2 z}$
6. $(\operatorname{ctg} z)'=-\dfrac{1}{\sin^2 z}$.
7. $(\operatorname{sh} z)'=\operatorname{ch} z$.
8. $(\operatorname{ch} z)'=\operatorname{sh} z$.
9. $(\operatorname{th} z)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 z}$.
10. $(\operatorname{cth} z)'=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 z}$.
11. $(\arcsin z)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$.
12. $(\arccos z)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$.
13. $(\operatorname{arctg} z)'=\dfrac{1}{1+z^2}$.
14. $(\operatorname{arcctg} z)'=-\dfrac{1}{1+z^2}$.
15. $(\ln z)'=\dfrac{1}{z}$.

Заметим, что при дифференцировании рассматриваются только однозначные функции. В равенствах (11)–(15) понимаем левую часть как производную от произвольной однозначной ветви соответствующей функции, выделенной в окрестности данной точки.

Пример 1. Найти модуль и аргумент производной $f'(z)$ в точке z_0, если:

а) $f(z)=2iz-3i$; б) $f(z)=\dfrac{z-4i}{z+2i}$, $z_0=1-i$; в) $f(z)=z^2$.

Решение.

а) используя правила дифференцирования, находим $f'(z)=2i$. Поэтому $f'(z_0)=2i$ для любой точки z_0 и $|f'(z_0)|=2$, $\arg f'(z_0)=\dfrac{\pi}{2}$.

б) используя правила дифференцирования частного, находим

$$f'(z)=\frac{z+2i-(z-4i)}{(z+2i)^2}=\frac{6i}{(z+2i)^2},$$

$$f'(z_0)=\frac{6i}{(z_0+2i)^2}.$$

$$f'(1-i)=\frac{6i}{(1+i)^2}=\frac{6i}{2i}=3$$

В результате имеем:

$$|f'(1-i)|=3,\quad \arg f'(1-i)=0.$$

в) $(z^2)'=2z$, тогда $f'(z_0)=2z_0$

и $|f'(z_0)|=2|z_0|,\quad \arg f'(z_0)=2\arg z_0$.

Производная дифференцируемой функции может вычисляться по одной из формул:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.8) \qquad f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.10)$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.9) \qquad f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.11)$$

Правило исследования функции на дифференцируемость и нахождение производной:

1) Для заданной функции $f(z)$ найти действительную и мнимую части:

$$u=\operatorname{Re} f(z),\quad v=\operatorname{Im} f(z),\quad u=u(x,y),\quad v=v(x,y).$$

2) Найти частные производные $u(x,y),\ v(x,y)$.

3) Проверить выполнение условий Коши-Римана. Точки, в которых эти условия не выполняются, являются точками, где функция не дифференцируема. Точки, в которых условия Коши-Римана выполняются и частные производные являются непрерывными, принадлежат области, где функция дифференцируема.

4). Записать выражение производной в точках дифференцируемости по одной из приведенных выше формул.

Пример 2. Показать, что функция $f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2 y - y^3)$ дифференцируема и найти ее производную.

Решение. Здесь $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ и $v(x, y) = 3x^2 y - y^3$ – везде дифференцируемые функции переменных x и y.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^3 - 3xy^2, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy, \ \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy, \ \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2.$$

Условия Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ выполняются.

Находим производную:

$$f'(z) = (3x^2 - 3y^2) + 6ixy.$$

Определение 3. Функция $\varphi(x, y)$ называется **гармонической в области** D, если она имеет в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяют в этой области уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{3.12}$$

Если функция $f(z) = u + iv$ является аналитической в некоторой области D, то ее действительная часть $u(x, y)$ и мнимая часть $v(x, y)$ так же являются **гармоническими в этой области**.

Но, если $u_1(x, y)$ и $v\ (x, y)$ – любые две гармонические функции, то функция $f_1(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y)$ может и не быть аналитической функцией. Для аналитичности $f_1(z)$ необходимо, чтобы функции u_1 и v_1 дополнительно удовлетворяли условиям Коши-Римана.

Пример 3. Исследовать на дифференцируемость функцию e^z. Найти производную.

Решение. Из равенства $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ находим $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$.

Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y,\ \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y,\ \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y.$$

Условия Коши-Римана выполняются в любой точке z, и частные производные непрерывны всюду. Следовательно, функция e^z дифференцируема повсюду.

Используя таблицу производных, находим производную:

$$(e^z)' = e^z.$$

Пример 4. Построить аналитическую функцию, для которой $u = x^2 - y^2 + 2x$ является действительной частью.

Решение. 1). Проверим условие Лапласа:

$u'_x = 2x + 2;$ $\quad u'_y = -2y;$

$u''_{xx} = 2;$ $\quad u''_{yy} = -2;$ $\quad u''_{xx} + u''_{yy} = 2 - 2 = 0.$ – удовлетворяет уравнению Лапласа.

2). Из Коши-Римана

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases} \quad \begin{cases} u'_x = 2x + 2 = v'_y \\ u'_y = -2y = -v'_x \end{cases} \quad \begin{cases} v'_y = 2x + 2 \\ v'_x = 2y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v = 2x + 2y + \varphi(x) \\ 2y + \varphi'(x) = 2y \end{cases} \quad \begin{matrix} \varphi'(x) = 0 \\ \varphi(x) = C \end{matrix}$$

Тогда $v = 2xy + 2y + C$.

$$f(z) = u + vi = x^2 - y^2 + 2x + (2xy + 2y + C)i =$$

$$= (x^2 + 2xyi + (iy)^2 + 2(x + iy) + Ci = (x + yi)^2 + 2(x + iy) + Ci.$$

Т.к. $z = x + iy$, то $f(z) = z^2 + 2z + Ci$.

Ответ: $v = 2xy + 2y + C$, $f(z) = z^2 + 2z + Ci$.

Пример 5. Проверить, является ли функция $f(z) = z\,\mathrm{Re}\,z$

а) аналитической в точке $z = 0$;

б) дифференцируемой в точке $z = 0$.

Решение. $f(z) = u + iv = zRez = (x + iy)x = x^2 + ixy; \quad u = x^2, \ v = xy$.

Найдем частные производные:

$$u'_x = 2x; \qquad v'_x = y; \qquad u'_x \neq v'_y;$$
$$u'_y = 0. \qquad v'_y = x. \qquad u'_y \neq -v'_x.$$

Функция не является аналитической в точке $z = 0$.

Проверим ее дифференцируемость в точке $z = 0$:

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta z \Delta x}{\Delta z} = 0$ – дифференцируема в точке $z = 0$.

Пример 6. Показать, что функция $f(z) = z^2 + 3e^z$ аналитическая в области $Д := \{z : |z| < 1\}$.

Решение. $f'(z) = 2z + 3e^z$.

$\forall z \in Д$, $|\text{z}| < 1$ существует конечная производная функции $f(z) = z^2 + 3e^z$, значит – аналитическая.

Пример 7. Найти аналитическую функцию $w = f(z)$ по известной ее действительной части $u(x, y) = 2e^x \cos y$ и при дополнительном условии $f(0) = 2$.

Решение. Имеем $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2e^x \cos y$. По первому условию Коши-Римана $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, так что $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 2e^x \cos y$.

Отсюда $v(x, y) = \int 2e^x \cos y dy = 2e^x \sin y + \varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ неизвестна.

Дифференцируя $v(x, y)$ по x и используя второе из условий Коши-Римана, получим

$$2e^x \sin y + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2e^x \sin y,$$

откуда $\varphi'(x) = 0$, а значит, $\varphi(x) = \mathrm{C}$, где $C = \text{const}$.

Итак, $v(x, y) = 2e^x \sin y + C$, и, следовательно,

$$f(z) = 2e^x \cos y + i(2e^x \sin y + \mathrm{C}) = 2e^x + iC.$$

Постоянную C найдем из условия $f(0)=2$, т.е. $2e^0+iC=2$, отсюда $C=0$.

Аналитическая функция $f(z)=2e^x$.

3.4. Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в точке z_0 и $f'(z_0)\neq 0$. Тогда $|f'(z_0)|$ равен коэффициенту растяжения в точке z_0 при отображении $w=f(z)$ плоскости z на плоскость w. При $|f'(z_0)|>1$ имеет место растяжение, а при $|f'(z_0)|<1$ – сжатие.

Аргумент производной $f'(z_0)$ геометрически равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к любой гладкой кривой на плоскости z, проходящей через точку z_0, чтобы получить направление касательной в точке $w_0=f(z_0)$ к образу этой кривой на плоскости w при отображении $w=f(z)$.

Следует учитывать, что если $\varphi=\arg f'(z)>0$, то поворот происходит против часовой стрелки, а при $\varphi<0$ – по часовой.

Пример 8. Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $w=z^2$ в точке $z_0=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

Решение. Имеем $w'(z)=2z$, так что $w'\big|_{z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}}=2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}$.

Перейдя от алгебраической формы записи комплексного числа $2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}$

к тригонометрической, получим

$$2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Значит, $|f'(z)|_{z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}}=4,\quad \arg f'(z)|_{z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}}=\dfrac{\pi}{4}$,

т.е. коэффициент растяжения $r=4$, а угол поворота $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

3.5. Практическое занятие 3

Пример 1. Исследовать на дифференцируемость функции: а) $f(z)=|z|^2$, б) $f(z)=\bar{z}$.

Решение.

а) $u=\operatorname{Re} f(z),\ v=\operatorname{Im} f(z),\ u=x^2+y^2,\ v=0$.

Определяем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Условия Коши-Римана выполняются только в точке $z=0$, где $x=0$ и $y=0$. Непрерывность частных производных очевидна. Следовательно, функция $f(z)=|z|^2$ дифференцируема только в одной точке $z=0$.

б) Находим $\operatorname{Re}\bar{z}$ и $\operatorname{Im}\bar{z}$, то есть $u=x$ и $v=-y$.

Условия Коши-Римана не выполняются ни в одной точке, т.к. $\frac{\partial u}{\partial x}=1,\ \frac{\partial v}{\partial y}=-1$. Следовательно, функция не дифференцируема ни в одной точке.

Пример 2. Проверить условие Коши-Римана для функции $f(z)=z^n$.

Решение. Запишем $f(z)=u+iv$ в полярных координатах.

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

$$u(r,\varphi)=r^n\cos n\varphi$$

$$v(r,\varphi)=r^n\sin n\varphi$$

Вычислим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=nr^{n-1}\cos n\varphi; \qquad \frac{\partial v}{\partial \varphi}=nr^n\cos n\varphi$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=nr^{n-1}\sin n\varphi; \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi}=nr^n\sin n\varphi$$

Условия Коши-Римана в полярных координатах выполнены.

Пример 3. Показать, что функция e^z аналитическая на всей комплексной плоскости и доказать, что $(e^z)' = e^z$.

Решение.

$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

$u = \operatorname{Re} z = e^x \cos y$

$v = \operatorname{Im} z = e^x \sin y$

$\begin{cases} u'_x = e^x \cos y \\ v'_y = e^x \cos y \end{cases} \Rightarrow \ u'_x = v'_y$

$\begin{cases} u'_y = e^x - \sin y \\ v'_x = e^x \sin y \end{cases} \Rightarrow \ u'_x = -v'_y$ – условия Коши-Римана выполняется для любого x и y.

Пример 4. Является ли функция $\omega = z\bar{z}$ аналитической хотя бы в одной точке?

Решение. Имеем $z\bar{z} = x^2 + y^2$, так что

$$u(x, y) = x^2 + y^2, \ v(x, y) \equiv 0.$$

Условия Коши-Римана в этом случае имеют вид $\begin{cases} 2x = 0, \\ 2y = 0 \end{cases}$ и удовлетворяются только в точке $(0,0)$.

Следовательно, функция $\omega = z\bar{z}$ дифференцируема только в точке $z = 0$ и нигде не аналитична.

Покажем, что функция $\omega = z\bar{z}$ дифференцируема в точке $z = 0$. В самом деле, $f(0) = 0$, поэтому

$$\Delta f = f(0 + \Delta z) - f(0) = \Delta z \cdot \overline{\Delta z}$$

и
$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z \cdot \overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \overline{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (\Delta x - i\Delta y) = 0$$

Таким образом, производная $f'(0)$ существует и равна нулю.

Пример 5. Определить, является ли функция $\omega = \bar{z} = x - iy$ аналитической.

Решение. Здесь $u(x,y)=x,\ v(x,y)=-y$ – всюду дифференцируемые функции переменных x и y. Далее

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=-1.$$

Так что $\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$, т.е. первое из условий Коши-Римана не выполняется ни в одной точке комплексной плоскости.

Значит, функция $\omega=\bar{z}=x-iy$ – нигде не дифференцируемая, а следовательно, и не аналитическая.

Пример 6. Найти аналитическую функцию $f(z)$, если

$$u(x,y)=\mathrm{Re}\, f(z)=x^3-3xy^2+2y \text{ и } f(i)=2.$$

Решение. Находим частные производные функции $u(x,y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-6xy+2.$$

Из условия Коши-Римана

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=6xy-2$$

находим

$$\mathrm{v}=\int\frac{\partial v}{\partial x}dx+\varphi(y)=\int(6xy-2)dx+9(y)=3x^2y-2x+g(y).$$

Дифференцируя v по y, получаем

$$\frac{\partial v}{\partial y}=3x^2+g'(y).$$

Для нахождения функции $g(y)$ используем 1-е условие Коши-Римана. Приравнивая $\frac{\partial v}{\partial y}=3x^2+g'(y)$ производной

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2,$$

получаем обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$g'(y) = -3y^2,$$

из которого определяем $g(y)$

$$g(y) = -\int 3y^2 dy = -y^3 + C.$$

Таким образом, получаем функцию

$$v(x, y) = 3x^2 y - 2x - y^3 + C.$$

Записываем искомую функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = u + iv = x^3 - 3xy^2 + 2y + i(3x^2 y - y^3 - 2x + C_1).$$

Преобразуем полученное выражение к функции переменной z,

$$z = x + iy \text{ и } z^3 = (x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2 y - y^3).$$

Получаем $f(z) = z^3 - 2iz + C.$

где C — произвольная комплексная постоянная.

Находим значение C из условия $f(i) = 2$: $2 = i^3 - 2i \cdot i + C.$

Получаем $C = i$ и, следовательно, $f(z) = z^3 - 2iz + i.$

Пример 7. Найти аналитическую функцию $f(z) = u + iv$ по известной ее мнимой части $v(x, y) = 2x^2 - 2y^2 + x$.

Решение. Так как $\frac{\partial v}{\partial x} = 4x + 1,$ $\frac{\partial v}{\partial y} = -4y$, то по условиям Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -4y \quad (1), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -4x + 1 \quad (2).$$

Проинтегрируем (1) по переменной x:

$$u(x, y) = -4\int y dx = -4xy + \mathrm{C}(y) \quad (3),$$

где функция $C(y)$ пока неизвестна. Для ее определения необходимо продифференцировать (3) и подставить в (2).

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -4xy + C'(y),\ -4xy + C'(y) = -4x - 1,$$

отсюда $C'(y) = -1,\ C(y) = -y + C$.

Следовательно, $u(x,y) = -4xy - y + C$. Тогда окончательно

$$f(z) = u + iv = -4xy - y + C + i(2x^2 - 2y^2 + x) = 2i(x^2 - y^2 + 2xyi) +$$

$$+ i(x + iy) + C = 2iz^2 + iz + C.$$

Пример 8. Найти, где дифференцируема функция $f(z) = \frac{e^z + 1}{e^z - 1}$ и найти её производную.

Решение. Функция $f(z)$ определена везде кроме точек, где

$$e^z - 1 = 0,\ e^z = 1.$$

Положим

$$z = x + iy,\ e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Представим число 1 в тригонометрической форме

$$1 = \cos 2\pi k + i\sin 2\pi k,\ k \in Z,$$

поэтому $e^x = 1,\ y = 2\pi k$ или $x = 0,\ y = 2\pi k,\ k \in Z$. Окончательно получим $z = i2\pi k, k \in Z$. Таким образом, функция $f(z)$ определена всюду кроме точек $z = i2\pi k, k \in Z$.

По правилу дифференцирования частного двух функций получим

$$f'(z) = \frac{(e^z + 1)'(e^z - 1) - (e^z + 1)(e^z - 1)'}{(e^z - 1)^2} = \frac{e^z(e^z - 1) - e^z(e^z + 1)}{(e^z - 1)^2} = \frac{-2e^z}{(e^z - 1)^2}.$$

Из последнего равенства видно, что функция $f(z) = \frac{e^z + 1}{e^z - 1}$ является дифференцируемой во всех точках, где она определена.

Пример 9. Найти коэффициент растяжения и угол поворота в точке $z = 2i$ при отображении $\omega = \frac{z + 1}{z + i}$.

Решение. Находим производную $\omega' = \dfrac{z+i-z-1}{(z+i)^2}$, ее значение в точке $2i$: $\omega'(2i) = \dfrac{1-i}{9}$.

Коэффициент k растяжения равен модулю производной: $k = |\omega'(2i| = \dfrac{1}{9}\sqrt{2}$, угол поворота – аргументу производной $\arg\omega'(2i) = -\dfrac{\pi}{4}$.

Пример 10. Определить, какая часть плоскости при отображении $\omega = z^2$ растягивается, а какая – сжимается.

Решение. Находим производную: $\omega' = z^2$, коэффициент растяжения в любой точке равен $\omega'(z_0) = 2|z_0|$, $k = 2|z_0|$. Множество точек z_0, для которых $k > 1$, то есть $2|z_0| > 1 \Rightarrow |z_0| > \dfrac{1}{2}$, очевидно, образует часть плоскости, которая при отображении растягивается. Следовательно, при отображении $\omega = z^2$ внешность круга $|z| > \dfrac{1}{2}$ растягивается, а внутренняя часть $|z| < \dfrac{1}{2}$ сжимается.

3.6. Задания для самостоятельного решения

1. Дана действительная часть $u(x,y)$ дифференцируемой функции $f(z)$. Найти эту функцию:

1.1. $u = x^2 - y^2 - x$ $\quad\left[v = 2xy - y + c, \quad f(z) = z^2 - z + ci\right]$

1.2. $u = x^2 - y^2 + 5x + y - \dfrac{y}{x^2+y^2}$

$$\left[v = 2xy - x + 5y - \frac{x}{x^2+y^2} + c, \quad f(z) = z^2 + (5-i)z - \frac{i}{z} + ci\right]$$

1.3. $u = e^x(x\cos y - y\sin y) + 2\sin x \operatorname{sh} y + x^3 - 3xy^2 + y$

$$\Big[v = e^x(y\cos y + x\sin y) + 3x^2y - y^3 + x + 2\cos x \operatorname{ch} y + c,$$

$$f(z) = ze^z + 2i\cos z + z^3 - iz + ci\Big]$$

2. Дана мнимая часть $v(x,y)$ дифференцируемой функции $f(z)$. Найти эту функцию:

2.1. $v = x + y$ $\qquad$ $\left[u = x - y + c, \quad f(z) = (1+i)z + c\right]$

2.2. $v = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$

$$\left[u = -2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - y - 2x + c, \quad f(z) = 2i\ln z + iz - 2z + c\right]$$

2.3. $v = 3 + x^2 - y^2 - \dfrac{y}{2(x^2+y^2)}$

$$\left[u = -2xy + \frac{x}{2(x^2+y^2)} + c, \quad f(z) = \frac{1}{2z} + iz^2 + 3i + c\right]$$

3. Найти аналитическую функцию $f(z) = u + iv$ по условиям:

3.1. $u = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3, \quad f(0) = 0$

$$\left[v = 3x^2y + 6xy^2 - 2x^3 - y^3, \quad f(z) = (1-2i)z^3\right]$$

3.2. $v = \dfrac{y}{x^2+y^2}, \quad f(2) = 0$ $\qquad$ $\left[u = -\dfrac{x}{x^2+y^2} + \dfrac{1}{2}, \quad f(z) = \dfrac{z-2}{2z}\right]$

3.3. $u = \dfrac{x}{x^2+y^2} - 2y, \quad f(1) = 0$

$$\left[v = -\frac{y}{x^2+y^2} - 2 + 2x, \quad f(z) = \frac{1}{z} + 2iz - 1 - 2i\right]$$

3.4. $v = e^x(y\cos y + x\sin y) + x + y, \quad f(0) = 1$

$$\left[u = e^x(x\cos y + y\sin y) + x - y + 1, \quad f(z) = ze^z + (1+i)z + 1\right]$$

3.5. $u = x^2 - y^2 + xy, \quad f(0) = 0$

$$\left[v = 2xy - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}, \quad f(z) = \left(1 - \frac{i}{2}\right)z^2\right]$$

3.6. $u = 2^x\cos(y\ln 2), \quad f(0) = 2$ $\qquad$ $\left[v = 2^x\sin(y\ln 2) - i, \quad f(z) = 2^z + 1\right]$

4. Найти аналитическую функцию в окрестностях точки z_0, если известны ее действительная $u(x,y)$ или мнимая $v(x,y)$ часть и значение $f(z_0)$:

4.1. $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $\quad f(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$ $\qquad \left[\dfrac{1}{z}\right]$

4.2. $v = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $\quad f(1) = 0$

$[\ln z]$

4.3. $u = 3x^2 - 4xy - 3y^2$, $\quad f(i) = -3 - 2i$ $\qquad \left[z^2(3+2i)\right]$

4.4. $v = 2y(5x-3)$, $\quad f\left(\dfrac{1}{5}\right) = -1$ $\qquad \left[5z^2 - 6z\right]$

5. Найти аналитическую функцию $f(z)$, если заданы ее действительная или мнимая часть и значение $f(z)$ в некоторой точке z_0.

5.1. $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + 2x$, $f(i) = 2i - 1$. $\qquad \left[f(z) = z^2 + 2z\right]$

5.2. $\operatorname{Re} f(z) = \dfrac{x}{\left(x^2 + y^2\right)}$, $f(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$. $\qquad \left[f(z) = \dfrac{1}{z}\right]$

5.3. $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $f(1) = 0$. $\qquad \left[f(z) = \ln z\right]$

5.4. $\operatorname{Re} f(z) = 3x^2 - 4xy - 3y^2$, $f(-i) = -3 - 2i$. $\qquad \left[f(z) = z^2(3+2i)\right]$

5.5. $\operatorname{Im} f(z) = 10xy - 6y$, $f\left(\dfrac{1}{5}\right) = -1$. $\qquad \left[f(z) = 5z^2 - 6z\right]$

5.6. $\operatorname{Im} f(z) = \sin y \operatorname{ch}(x+1)$, $f\left(-1 + \pi\dfrac{i}{2}\right) = i$. $\qquad \left[f(z) = \operatorname{sh}(z+1)\right]$

5.7. $\operatorname{Im} f(z) = 2y\left[y^2 + (x+1)^2\right]$, $f(i) = i$. $\qquad \left[f(z) = \dfrac{(z-1)}{(z+1)}\right]$

5.8. $\operatorname{Im} f(z) = \dfrac{x}{\left(x^2 + y^2\right)} + x$, $f(1) = -2i$. $\qquad \left[f(z) = \dfrac{i}{z} + iz\right]$

5.9. $\operatorname{Re} f(z) = e^{-y}(x\cos x - y\sin x)$, $f(0) = 0$. $\qquad \left[f(z) = ze^{iz}\right]$

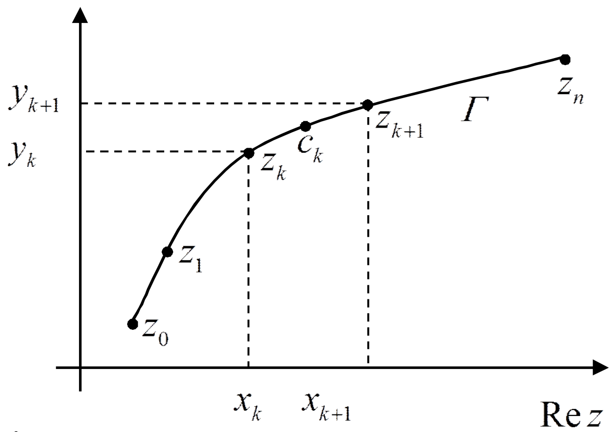
5.10. $\operatorname{Re} f(z) = x\sin x \operatorname{ch} y - y\cos x \operatorname{sh} y$, $f(0) = 0$. $\qquad \left[f(z) = z\sin z\right]$

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

4.1. Основные понятия. Определение криволинейного интеграла от функции комплексного переменного

Рассмотрим на отрезке действительной оси $[a,b]$ функцию $f(t) = q(t) + ih(t)$, которая принимает комплексные значения. Пусть $q(t)$ и $h(t) \in R$ и интегрируемы. Тогда $\int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^b q(t)dt + i\int\limits_a^b h(t)dt$.

Рассмотрим теперь функцию комплексного переменного $f(z)$, которая определена и непрерывна во всех точках некоторой кривой Γ.



Разобьем гладкую кривую Γ на n частей (элементарных дуг (z_k, z_{k+1}).

Составим интегральную сумму $S_k = \sum\limits_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta z_k$,

где $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$, а c_k - некоторая средняя точка дуги (z_k, z_{k+1}).

Определение 1. Интегралом от функции $f(z)$ по контуру Γ называется:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \lim_{\substack{\max|\Delta z_k| \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta z_k . \qquad (4.1)$$

Рассмотрим теперь представление $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Тогда интегральная сумма

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(u(x,y)\Big|_{c_k} + iv(x,y)\Big|_{c_k} \right) \cdot (\Delta x_k + i\,\Delta y_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(u(\widetilde{x}_k, \widetilde{y}_k) \cdot \Delta x_k - v(\widetilde{x}_k, \widetilde{y}_k)\Delta y_k \right) + i\sum_{k=1}^{n} \left(u(\widetilde{x}_k, \widetilde{y}_k) \cdot \Delta y_k + v(\widetilde{x}_k, \widetilde{y}_k)\Delta x_k \right)$$

Каждая из полученных сумм является интегральной. Итак:

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\Gamma} u\,dx - v\,dy + i\int_{\Gamma} u\,dy + v\,dx\,. \tag{4.2}$$

Для использования и запоминания формулы вычисления отметим, что равенству (4.2) соответствует формальное выполнение в левой части под знаком интеграла действий выделения действительной и мнимой части функции $f(z)$, умножения на $dz = dx + idy$ и записи полученного произведения в алгебраической форме: (4.3)

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\Gamma}(u+iv)(dx+idy = \int_{\Gamma} u\,dx - v\,dy + i(u\,dy + vdx) =$$

$$= \int_{\Gamma} u\,dx - vdy + i\int_{\Gamma} u\,dy + vdx.$$

Формулу (4.2) можно рассматривать и как определение криволинейного интеграла от функции комплексного переменного, и как формулу его вычисления через криволинейные интегралы второго рода от функций двух действительных переменных.

Вычисление интеграла от функции комплексного переменного сводится к вычислению 2-х криволинейных интегралов второго рода от функций действительного переменного.

Используя определение интеграла или формулу (4.2) и свойства криволинейных интегралов второго рода, нетрудно убедиться в справедливости следующих свойств криволинейного интеграла от функций комплексного переменного.

Основные свойства интеграла:

1) $\int_{\Gamma} dz = z_n - z_0$

2) $\int_{\Gamma} f_1(z) \pm f_2(z)\ dz = \int_{\Gamma} f_1(z)\,dz \pm \int_{\Gamma} f_2(z)\,dz$

(4.4)

3) $\int_{\Gamma} \alpha \cdot f(z)\,dz = \alpha \cdot \int_{\Gamma} f(z)\,dz, \quad \alpha \in C$

4) $\int_{\Gamma^+} f(z)\,dz = -\int_{\Gamma^-} f(z)\,dz$, при перемене направления пути, знак интеграла меняется на противоположный.

5) $\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz$, где $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$, но $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$.

6) Оценка модуля интеграла:

$|\int f(z)dz| \le M \cdot l$, если $|f(z)| < M$, где l – длина кривой Γ.

Доказательство:

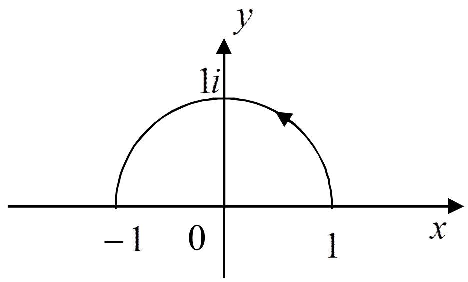
$$\left|\int_{\Gamma} f(z)dz\right| \le \left|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(c_k)| \cdot |\Delta z_k| \le M\sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k| \le M \cdot l,$$

т.к. $\sum_{k=1}^{n}(\Delta z_k)$ – длина ломаной, вписанной в кривую Γ.

Пример 1.

Вычислить $I = \int_L Imz\,dz$,

где $L = \{|z| = 1,\ 0 \le \arg z \le \pi\}$.



Решение.

$$I = \int_L y(dx + idy) = \int_L ydx + i\int_L ydy = \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d(\cos\varphi) + i\int_0^{\pi} \sin\varphi\, d(\sin\varphi) =$$

$$= \int_0^{\pi} (-\sin^2\varphi\, d\varphi) + \frac{i}{2}\int_0^{\pi} \sin 2\varphi\, d\varphi = \int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)\right)d\varphi + \frac{i}{4}(-\cos 2\varphi)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \left(-\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi} + \frac{i}{4}(-\cos 2\pi + \cos 0) = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}(\sin 2\pi - \sin 0) = -\frac{\pi}{2}.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_L (1 + i - 2\bar{z})dz$ по линиям, соединяющим точки $z_1 = 0,\ z_2 = 1 + i$ по:

1) прямой;

2) параболе $y = x^2$;

3) ломаной z_1, z_3, z_2, где $z_3 = 1$.

Решение.

Перепишем подынтегральную функцию в виде:

$1 + i - 2\bar{z} = 1 + i - 2(x - iy) = (1 - 2x) + i(1 + 2y)$.

Здесь $u = 1 - 2x;\ v = 1 + 2y$.

Применяя формулу

$$\int_L f(z)dz = \int_L udx - vdy + i\int_L vdx + udy,$$

получим

$$\int_L (1+i-2\bar{z})dz = \int_L (1-2x)dx - (1+2y)dy + i\int_L (1+2y)dx + (1-2x)dy.$$

1) Уравнение прямой, соединяющей точки $z_1 = 0,\ z_2 = 1+i$, есть $y = x$, где $0 \le x \le 1$, а значит $dy = dx$.

Поэтому:

$$\int_L (1+i-2\bar{z})dz = \int_0^1 (1-2x)dx - (1+2y)dx + i\int_0^1 (1+2y)dx + (1-2x)dx =$$

$$= \int_0^1 (-4x)dx + i\int_0^1 2dx = \left.\frac{-4x^2}{2}\right|_0^1 + \left. i2x\right|_0^1 = -2+2i = 2(i-1).$$

2) Для параболы $y = x^2$ имеем $dy = 2xdx$, где $0 \le x \le 1$. Следовательно:

$$\int_L (1+i-2\bar{z})dz = \int_0^1 (1-2x)dx - (1+2x^2)2xdx + i\int_0^1 (1+2x^2)dx + (1-2x)2xdx =$$

$$= \int_0^1 (1-2x-2x-4x^3)dx + i\int_0^1 (1+2x^2+2x-4x^2)dx =$$

$$= \left.\left(x - \frac{4x^2}{2} - \frac{4x^4}{4}\right)\right|_0^1 + i\left.\left(x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - \frac{4x^3}{3}\right)\right|_0^1 = (1-2-1) + i\left(1 + \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{3}\right) =$$

$$= -2 + i\frac{4}{3} = -2 + \frac{4}{3}i.$$

3) На отрезке z_1z_3: $y = 0,\ dy = 0,\ 0 \le x \le 1.$

На отрезке z_3z_2: $x = 1,\ dx = 0,\ 0 \le y \le 1.$

Используя свойство линейности криволинейных интегралов, получим:

$$\int_L (1+i-2\bar{z})dz = \int_{z_1z_3} (1+i-2\bar{z})dz + \int_{z_3z_2} (1+i-2\bar{z})dz =$$

$$=\int_0^1(1-2x)dx+i\int_0^1 1dx+\int_0^1(-1-2x)dy+i\int_0^1-1dy=$$

$$=\left(x-\frac{2x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1+i\cdot x\Bigg|_0^1-\left(y+\frac{2y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1-i\cdot y\Bigg|_0^1=0+1\cdot i-2-i\cdot 1=-2$$

4.2. Вычисление интегралов от функций комплексного переменного, если кривая задана параметрически

Если кривую в формуле (4.2) задать параметрически: $z=z(t)$, $t\in[t_1;t_2]$ или, что соответствует действительной форме $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ $t_1\le t\le t_2$, то, используя правила вычисления интегралов второго рода в случае параметрической кривой, можно преобразовать формулу (4.2) к виду

$$\int_\Gamma f(z)\,dz=\int_{t_1}^{t_2}f(z(t))\cdot z'(t)\,dt\,. \qquad (4.5)$$

Алгоритм вычисления интегралов $\int_\Gamma f(z)\,dz$ от непрерывной функции путем сведения к определенному интегралу в случае параметрического задания пути интегрирования – применения формулы (4.5):

1. Записать параметрическое уравнение кривой $z=z(t)$ и из него определить пределы интегрирования: $t=t_1$ соответствует начальной точке пути интегрирования, $t=t_2$ – конечной.

2. Найти дифференциал комплекснозначной функции $z(t)$: $dz=z'(t)\,dt$.

3. Подставить $z(t)$ в подынтегральное выражение, преобразовать интеграл:

$$\int_{t_1}^{t_2}f(z(t))\cdot z'(t)\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\varphi(t)\,dt\,. \qquad (4.6)$$

4. Вычислить полученный в п. 3 интеграл от комплекснозначной функции действительной переменной.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma}\frac{1}{(\sqrt{z})_1}dz$, где Γ – правая полуокружность $|z|=2$, $\operatorname{Re}z\geq 0$, проходящая от точки $z_1=-2i$ до точки $z=2i$. Через $(\sqrt{z})_1$ обозначена одна из непрерывных ветвей двузначной функции $\sqrt{z}$.

Решение. Запишем дугу Г в параметрической виде как $z=2e^{it}$, $-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}$.

Получим:

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{1}{(\sqrt{z})_1}dz=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2ie^{it}}{\sqrt{2}e^{i\frac{t}{2}}}dt=\sqrt{2}i\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{t}{2}}dt=\frac{\sqrt{2}i\cdot e^{i\frac{t}{2}}\cdot 2}{i}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\sqrt{2}e^{i\frac{t}{2}}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

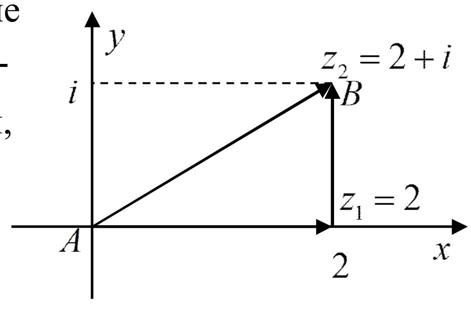
$$=2\sqrt{2}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)=4\sqrt{2}i\sin\frac{\pi}{4}=4i.$$

Пример 4. Вычислить $\int\limits_{AB}\operatorname{Re}z\,dz$ при условии, что путь интегрирования AB:

1) задан уравнением $z=(2+i)t$, $0\leq t\leq 1$;

2) представляет собой ломаную, составленную из отрезка $[0;2]$ действительной оси и отрезка, соединяющего точки $z_1=2$ и $z_2=2+i$.

Решение.



1) комплексное уравнение $z=(2+i)t$ эквивалентно параметрическим уравнениям $x=2t$, $y=t$. Учитывая, что:

$\operatorname{Re}z=x=2t$, $dz=(2+i)dt$, $t\in[0;1]$.

$$\int\limits_{AB}\operatorname{Re}z\,dz=\int\limits_0^1 2t(2+i)dt=\frac{2t^2(2+i)}{2}\Bigg|_0^1=2+i.$$

2) Путь интегрирования состоит из двух отрезков. Для отрезка $[0;2]$ действительной оси имеем $y=0$, $dy=0$, $dz=dx$, $\operatorname{Re}z=x\in[0;2]$.

Учитывая аддитивность интеграла от функции комплексного переменного, находим:

$$\int\limits_{AB} \operatorname{Re} z dz = \int\limits_0^2 x dx + \int\limits_0^1 2i dy = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 + \left.2iy\right|_0^1 = 2 + 2i .$$

4.3. Обобщенная формула Ньютона-Лейбница для вычисления интегралов от функции комплексной переменной

Пусть интеграл от непрерывной функции в некоторой области не зависит от вида кривой, соединяющей две точки этой области. Зафиксируем начальную точку, обозначив z_0, конечная точка — переменная, обозначим ее z. Тогда значение интеграла будет зависеть только от точки z. Обозначим функцию $F(z)$ – интеграл с переменным верхним пределом.

Используя определение производной, т.е. рассматривая $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta F}{\Delta z}$, нетрудно убедиться, что $F(z)$ имеет производную в любой точке области определения, а следовательно, является в ней аналитической. При этом для производной получим формулу

$F'(z) = f(z)$. (4.7)

Производная интеграла с переменным верхним пределом равна значению подынтегральной функции при верхнем пределе.

Функция $F(z)$, для которой выполняется равенство (4.7), называется первообразной для функции $f(z)$ в односвязной области, а совокупность первообразных $\Phi(z) = F(z) + c$, где $c = const$, — неопределенным интегралом от функции $f(z)$.

Получаем следующие утверждения.

1. Интеграл с переменным верхним пределом $\int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,dt$ от аналитической в односвязной области функции есть функция, аналитическая в этой области; эта функция является первообразной для подынтегральной функции.

2. Любая аналитическая в односвязной области функция имеет в ней первообразную (существование первообразной).

Первообразные аналитических функций в односвязных областях находятся по тем же правилам как и в случае действительного анализа: используются свойства интегралов, таблица интегралов, правила интегрирования.

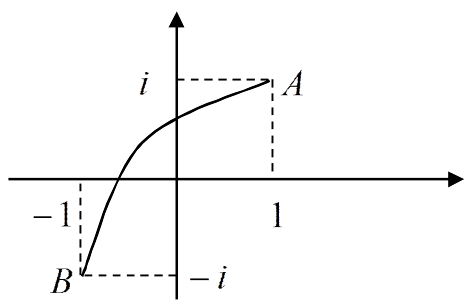
Например, $\int e^z dz = e^z + c, \quad \int \cos z\, dz = \sin z + c$.

$$\int_{-1}^{1} e^{2it} dt = \left.\frac{e^{2it}}{2i}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{2i}\left(e^{2i} - e^{-2i}\right) = \sin 2 .$$

Между криволинейным интегралом от аналитической функции и ее первообразной в односвязной области имеет место связь, аналогичная формуле Ньютона-Лейбница из действительного анализа:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1). \tag{4.8}$$

Пример 5. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, вычислить интеграл $\int_{\Gamma} (z-1)dz$, где Γ – кривая, соединяющая точки $A = 1+i$, $B = -1-i$, как показано на рисунке.



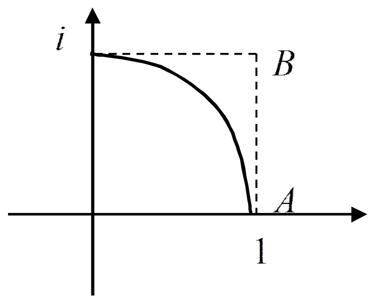
Решение.

Функция $f(z) = z-1$ аналитическая во всей комплексной плоскости, поэтому мы можем применить формулу Ньютона-Лейбница.

$$\int_{\Gamma} (z-1)dz = \int_{1+i}^{-1-i} (z-1)dz = \left.\left(\frac{z^2}{2} - z\right)\right|_{1+i}^{-1-i} = \left(\frac{(-1-i)^2}{2} - (-1-i)\right) - \left(\frac{(1+i)^2}{2} - (1+i)\right) =$$

$$= \frac{1+2i-1}{2} + 1 + i - \frac{1+2i-1}{2} + 1 + i = 1 + i + 1 + i = 2 + 2i .$$

Пример 6. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{z} dz$, где кривая Г – четверть окружности, соединяющая точки $A=1$ и $B=i$, как показано на рисунке.



Решение.

Однозначная функция $F(z) = \ln z = \ln|z| + i\arg z$ является первообразной для функции $f(z) = \frac{1}{z}$. По формуле Ньютона-Лейбница получим:

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = \int\limits_{1}^{i} \frac{1}{z} dz = \ln z \Big|_{1}^{i} = \ln i - \ln 1 = i \cdot \frac{\pi}{2}.$$

4.4. Теоремы Коши

Теорема 1. Коши для односвязной области (простого контура). Если функция $f(z)$ аналитична в некоторой односвязной области D, то для любого замкнутого Γ интеграл

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z) dz = 0. \qquad (4.9)$$

Доказательство. Предположим, что $f'(z)$ – непрерывна (для упрощения доказательства). Тогда в силу аналитичности $f(z)$ интеграл

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z) dz = \oint\limits_{\Gamma} u\,dx - v\,dy + i\oint\limits_{\Gamma} v\,dx + u\,dy = 0.$$

Рассмотрим подробнее полученные криволинейные интегралы второго рода:

$$\oint\limits_{\Gamma} u\,dx - v\,dy = \iint\limits_{D} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy = 0 \text{ и } \oint\limits_{\Gamma} v\,dx + u\,dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = 0.$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ по формулам Коши-Римана.

Следствия из теоремы Коши для простого контура.

1. Теорема справедлива и в случае, если C — граница области D, а функция $f(z)$ является аналитичной в области и на границе, т.е. в $\overline{D}$, так как, согласно определению, аналитичность в $\overline{D}$ предполагает аналитичность функции в некоторой области B, содержащей $D\,(B \supset \overline{D})$, а C при этом будет внутренним контуром в B.

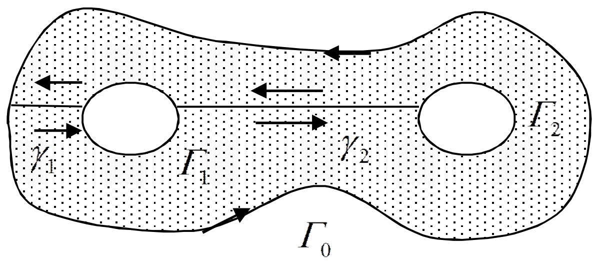
2. Интеграл от аналитической функции не зависит от вида кривой интегрирования, соединяющей две точки области аналитичности функции и не выходящей из этой области. То есть интегралы по различным кривым, лежащим в односвязной области аналитичности функции и соединяющим две точки этой области, равны между собой, т.е. $\int\limits_{l_1} f(z)\,dz = \int\limits_{l_2} f(z)\,dz$, где l_1 и l_2 - произвольные кривые, соединяющие точки z_1 и z_2.

Для доказательства достаточно рассмотреть контур C, состоящий из кривой l_1 (от точки z_1 к точке z_2) и кривой l_2 (от точки z_2 к точке z_1) Свойство можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2. Коши для многосвязной области. Пусть функция $f(z)$ аналитична в замкнутой многосвязной области $\overline{D}$, $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \Gamma_k$ – граница этой области (т.е. f аналитична в исходной области $V \supset \overline{D}$ вместе с ее границей), то:

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{k} \oint\limits_{\Gamma_k} f(z)dz = 0. \quad (4.10)$$

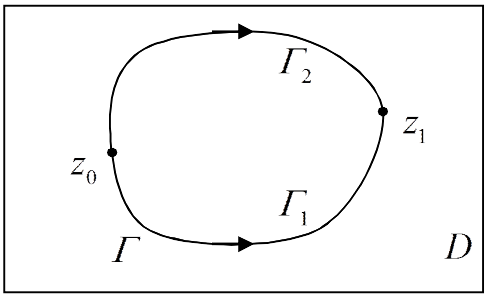
Доказательство. Проводя два «разреза» γ_1 и γ_2, т.е. добавив два отрезка, которые проходятся в противоположных направлениях, получим односвязную область.



Следствия из теоремы Коши для многосвязной области.

1. Если функция $f(z)$ – аналитична в многосвязной области D, то интеграл от нее не зависит от пути интегрирования, а зависит только от начальной z_0 и конечной точки z_1 пути.

Доказательство.



$$\oint_{\varGamma} f(z)\,dz = \int_{\varGamma_1^+} f(z)\,dz + \int_{\varGamma_2^-} f(z)\,dz = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{\varGamma_1} f(z)\,dx = \int_{\varGamma_2} f(z)\,dx = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dx$$

.

2. При выполнении условий теоремы Коши для многосвязной области интеграл по внешнему контуру равен сумме интегралов по внутренним; обход на всех контурах в одну сторону

$$\oint_{\varGamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz. \tag{4.11}$$

3. Если $f(z)$ является аналитичной в односвязной области D и на границе области, за исключением, быть может, точки a этой области, то интегралы по различным замкнутым кривым, которые лежат в области D и ограничивают области, содержащие точку a, равны между собой :

$$\oint_{C_k} f(z)dz = \oint_{C_m} f(z)dz. \tag{4.12}$$

Доказательство очевидно, поскольку каждый такой контур можно рассматривать как внутреннюю границу двусвязной области, внешней границей которой является граница области D. В соответствии с формулой (4.11) при $n=1$ любой такой интеграл равен интегралу по границе D.

Сравнение формулировок теоремы и следствия из теоремы позволяет сделать обобщение, которое запишем в виде следующего утверждения.

Если $f(z)$ аналитическая в D, то $\oint_{\varGamma} f(z)dz = 0$, где $\varGamma$ – граница области D (простой или сложной).

Теорема 3. Интегральная формула Коши. Если функция $f(z)$ является аналитической в области D и на ее границе Γ, то для любой внутренней точки a области ($a \in D$) имеет место равенство:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \qquad (4.13)$$

(Без доказательства)

Область D может быть односвязной или многосвязной, а граница области – простым или сложным контуром.

Следует обратить внимание, что точка a не принадлежит границе области и поэтому подынтегральная функция является непрерывной на C и интеграл существует.

Интеграл $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$ определяет аналитическую функцию в любой точке z, не принадлежащей контуру Γ, причем в точках конечной области D, ограниченной контуром, он равен $f(z)$, а вне $\overline{D}$ – равен нулю в силу оснований теоремы Коши.

Приведенная формула имеет важное прикладное значение – по ней решается так называемая краевая задача теории функций комплексного переменного: по значениям функции на границе области определяется ее значение в любой внутренней точке.

Формула Коши применяется также в следующем виде:

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0). \qquad (4.14)$$

Из формулы Коши можно получить формулу для производных функции $f(z)$.

Теорема. Если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области $\overline{D}$, то в каждой точке области D она дифференцируема сколько угодно раз, причем

n–ая производная представляется формулой

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}},$$

откуда

$$\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^n}dz=\frac{2\pi i}{(n-1)!}f^{(n-1)}(z_0),\qquad (4.15)$$

где Γ – граница области D обходится в положительном направлении.

Эта формула может также служить для вычисления некоторых контурных интегралов.

Пример 7. Вычислить $\int_{l}\frac{e^z dz}{z(z-3)}$, где l – окружность радиуса $\frac{3}{2}$ с центром в точке 2.

Решение.

В качестве функции $f(z)$ надо взять $\frac{e^z}{z}$, аналитическую в круге $|z-2|<\frac{3}{2}$.

Применив формулу Коши, находим:

$$\int_{l}\frac{e^z dz}{z(z-3)}=\int_{l}\frac{f(z)dz}{z-3}=2\pi i\cdot f(3)=2\pi i\cdot\frac{e^3}{3}.$$

Пример 8. Вычислить $\int_{l}\frac{e^z dz}{(z-i)^3}$, где l – произвольный контур, однократно обходящий точку i в положительном направлении.

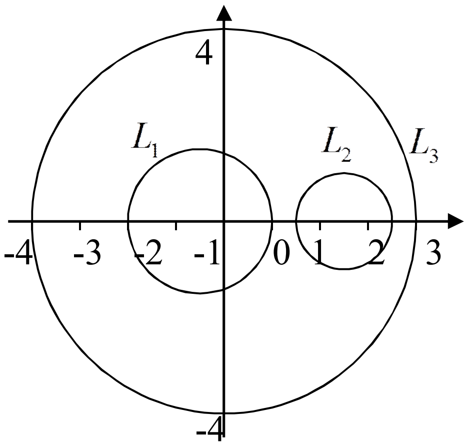
Решение.

Функция $f(z)=e^z$ аналитична в области, ограниченной контуром l. По теореме Коши находим:

$$\int_{l}\frac{e^z dz}{(z-i)^3}=\frac{2\pi i}{2!}f''(i)=\pi i e^i=\pi(-\sin 1+i\cos 1).$$

Пример 9. Вычислить $\int_{|z|=4}\frac{\sin z}{z(z-3)}dz$.

Решение. Внутри круга $|z|=4$ лежат обе особые точки $z_0=0$ и $z_1=3$. В круге L_1, содержащем точку $z_0=0$, аналитична функция $\dfrac{\sin z}{(z-3)}$, а в круге L_2, содержащем точку $z_1=3$, аналитична функция $\dfrac{\sin z}{z}$.



По теореме Коши для многосвязной области, имеем

$$\int_{L_3}\frac{\sin z}{z(z-3)}dz=\int_{L_1}\frac{\sin z}{z(z-3)}dz+\int_{L_2}\frac{\sin z}{z(z-3)}dz=-\frac{2}{3}\pi i\sin 0+\frac{2}{3}\pi i\sin 3=\frac{2}{3}\pi i\sin 3$$

4.5. Практическое занятие 4

При вычислении интегралов функции комплексного переменного через криволинейные интегралы II рода от функции двух действительных переменных используется формула (4.2)

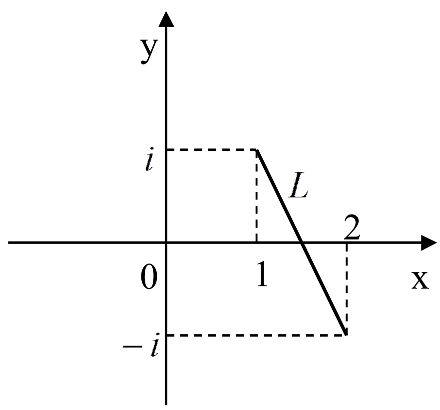
$$\int_{Г} f(z)\,dz=\int_{Г} u\,dx-v\,dy+i\int_{Г} u\,dy+v\,dx.$$

Пример 1. Вычислить $\int_L \operatorname{Re} z\,dz$, где L – прямая от точки $z_0=1+i$ до точки $z_1=2-i$.

Решение.

$$\int_L \operatorname{Re} z\,dz=\begin{bmatrix} u(x,y)=x \\ v(x,y)=0 \end{bmatrix}=\int_L x(dx+idy)=$$

$$=\int_L xdx+i\int_L xdy.$$



Т.к. L – прямая, проходящая через 2 точки, то по формуле $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ можно составить уравнение и из него выразить y через x.

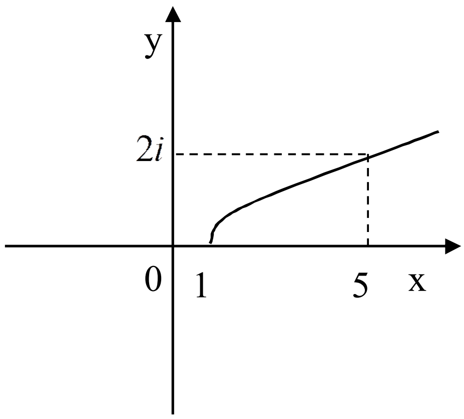
$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}$$
$$y-1=-2x+2$$
$$y=-2x+3,$$
тогда $dy=-2dx$.

В этом случае переменной интегрирования выступает x: $x_1=1;\ x_2=2$.

Тогда

$$\int_L xdx+i\int_L xdy=\int_1^2 xdx+i\int_1^2 x(-2)dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2+i\left.\left(\frac{-2x^2}{2}\right)\right|_1^2=2-\frac{1}{2}+i(-4+1)=\frac{3}{2}-3i$$
.

Пример 2. Вычислить $\int_L (\bar{z}-1)\,dz$, где L – дуга параболы $x=y^2+1$ от точки $z_1=1$ до точки $z_2=5+2i$.



Решение.

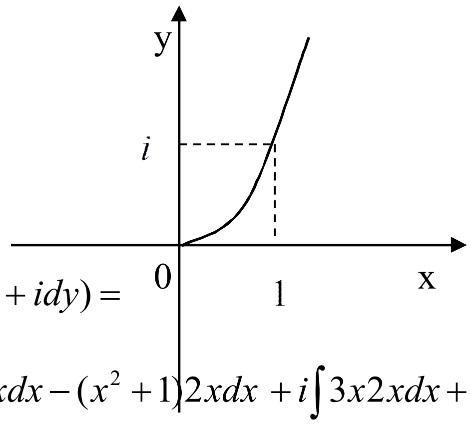
$$\int_L (\bar{z}-1)\,dz=\int_L (x-iy-1)\,dz=$$
$$=\int_L ((x-1)-iy)(dx+idy)=$$
$$=\int_L (x-1)\,dx+ydy+i\int_L (x-1)\,dy-ydx$$

Далее вычисляем криволинейные интегралы, сведя их к определенным по переменной y: $x=y^2+1;\quad dx=2y\,dy;\ y_1=0,\ y_2=2$.

$$\int_L (x-1)dx+ydy+i\int_L (x-1)dy-ydx=\int_0^2 (y^2+1-1)2ydy+ydy+i\int_0^2 y^2dy-y2ydy=$$
$$=\int_0^2 (2y^3+y)\,dy+i\int_0^2 (-y^2)dy=\left.\left(\frac{2y^4}{4}+\frac{y^2}{2}\right)\right|_0^2+i\left.\left(-\frac{y^3}{3}\right)\right|_0^2=10-\frac{8}{3}i$$
.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_L (2z+\bar{z}+i)\,dz$, где L – дуга параболы $y=x^2$ от точки $z_1=0$ до точки $z_2=1+i$.

Решение. $\int\limits_L (2z+\bar{z}+i)\,dz=$



$=\int\limits_L (2(x+iy)+(x-iy)+i)(dx+idy)=$

$=\int\limits_L (2x+2iy)+x-iy+i)\,(dx+idy)=$

$=\int\limits_L (3x+iy+i)(dx+idy)=\int\limits_L (3x+i(y+1))(dx+idy)=$

$=\int\limits_L 3xdx-(y+1)\,dy+i\int\limits_L 3xdy+(y+1)dx=\int\limits_L 3xdx-(x^2+1)2xdx\;+i\int\limits_L 3x2xdx+(x^2+1)dx=$

$=\int\limits_0^1 (3x-2x^3-2x)dx+i\int\limits_0^1 (7x^2+1)dx=\int\limits_0^1 (x-2x^3)dx+i\int\limits_0^1 (7x^2+1)dx=$

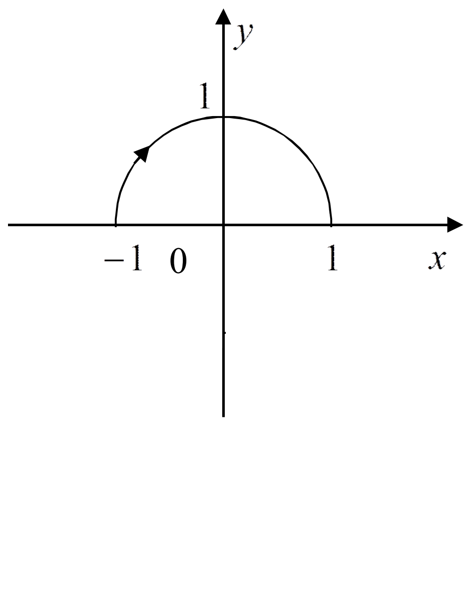
$=\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{2x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1+i\left(\dfrac{7x^3}{3}+x\right)\Bigg|_0^1=0+i\dfrac{10}{3}=\dfrac{10}{3}i\,.$

При интегрировании функций комплексного переменного, если кривая задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$**,** $y=y(t)$**, а начальная и конечная точки дуги соответствуют значениям** $t=a, t=b$**, используется формула (4.5)**

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz=\int\limits_a^b f(z(t))z'(t)dt\,.$$

Пример 4. Вычислить $\int\limits_L |z|\,dz$, где L – полуокружность радиуса 1 с центром в начале координат, лежащая в верхней полуплоскости, причем обход совершается по часовой стрелке.

Решение. Контуром интегрирования является окружность, уравнение которой можно записать через параметр $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$, тогда



$z(t)=\cos t+i\sin t\,; dz=(-\sin t+i\cos t)dt\,.$

При этом

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}=1\,.$

Т.к. обход совершается по часовой стрелке, т.е. от $x_1=-1$ до $x_2=1$, то $t_1=\pi$, $t_2=0$.

$$\int_L |z|\,dz=\int_\pi^0 1(-\sin t+i\cos t)dt=(\cos t+i\sin t)\Big|_\pi^0=(1+i\cdot 0)-(-1+i\cdot 0)=2.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int_L |z|\bar{z}dz,$ где L - полуокружность радиуса 1 с центром в начале координат, лежащая в верхней полуплоскости, с обходом против часовой стрелки.

Решение. В данном случае удобно воспользоваться уравнением кривой L в параметрической форме $z=e^{it}$ $\left(0\le t\le\pi\right)$

Находим $\bar{z}=e^{-it}$, $|z|=1$, $dz=ie^{it}dt.$

Подставляем в подынтегральное выражение и вычисляем интеграл

$$\int_L |z|\bar{z}dz=\int_0^\pi e^{-it}ie^{it}dt=\int_0^\pi idt=i\pi.$$

При применение формулы Ньютона-Лейбница к вычислению интегралов функции комплексного переменного используется формула (4.7)

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz=F(z)\Big|_{z_1}^{z_2}=F(z_2)-F(z_1).$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int_0^i z\cos z dz$.

Решение. Функции $f(z)=z$ и $\varphi(z)=\cos z$ являются аналитическими всюду. Применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int_0^i z\cos zdz=\int_0^i z(\sin z)'dz=(z\sin z)\Big|_0^i-\int_0^i \sin zdz=i\sin i+\cos z\Big|_0^i=$$

$$=-\mathrm{sh}1+\mathrm{ch}1-1=\frac{1-e}{e}.$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int_L \sin^2 zdz,$

где L — отрезок прямой от точки $z_1=0$ до точки $z_1=i.$

Решение. Функция $f(z)=\sin^2 z$ аналитична всюду, и, следовательно, интеграл не зависит от пути интегрирования и может быть вычислен по формуле Ньютона-Лейбница

Находим первообразную $F(z)=\frac{1}{2}\left(z-\frac{\sin 2z}{2}\right)$, используя формулы понижения степени $\sin^2 z=\frac{1}{2}(1-\cos 2z)$.

Вычисляем интеграл по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_0^i \sin^2 z dz = \frac{1}{2}\left(z-\frac{\sin 2z}{2}\right)\Bigg|_0^i = \frac{1}{2}i-\frac{1}{4}\sin(2i)=\frac{i}{4}(2-\operatorname{sh}2).$$

При применении интегральных формул Коши к вычислению интегралов используются формулы (4.14) и (4.15)

$$\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0) \qquad \text{и} \qquad \oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}dz=\frac{2\pi i}{(n-1)!}f^{(n-1)}(z_0)$$

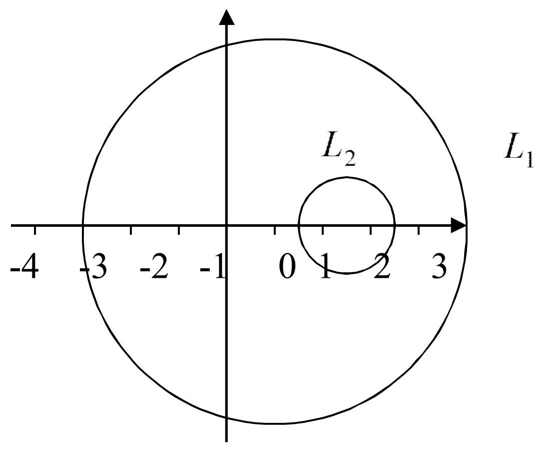
С помощью этих формул вычисляются интегралы функций вида $\frac{f(z)}{(z-z_0)^n}$, где $f(z)$ – аналитическая функция. Естественно, точка z_0 должна лежать внутри контура L (если она лежит вне контура, подынтегральная функция аналитична, и интеграл равен 0).

Пример 6. Вычислить $\int\limits_{|z-1|=4} \frac{e^z}{z-3}dz$.

Решение. Здесь $f(z)=e^z$, $z_0=3$ лежит внутри круга $|z-1|=4$.

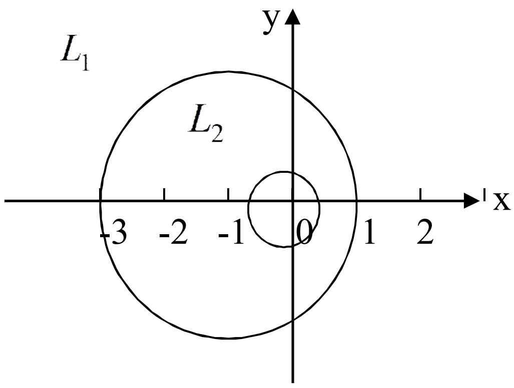
Поэтому

$$\int\limits_{|z-1|=4} \frac{e^z}{z-3}dz = 2\pi i e^3$$



Пример 7.

Вычислить $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=2} \frac{\sin z}{z(z-3)}dz$.



Решение. Внутри круга $|z+1|=2$ лежит точка $z_0=0$, поэтому $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z-3)}$, и

$$\int\limits_{|z+1|=2} \frac{\sin z}{z(z-3)}dz = 2\pi i\left(\frac{\sin 0}{0-3}\right)=0 .$$

Пример 8. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{|z|=\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2z}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^3}dz$.

Решение. Здесь $f(z)=\sin 2z,\ z_0=\dfrac{\pi}{3},\ n=3$.

$$\int\limits_{|z|=\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2z}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}(\sin 2z)''\Big|_{z=\frac{\pi}{3}} = \pi i(2\cos 2z)'\Big|_{z=\frac{\pi}{3}} = -4\pi i\sin 2z\Big|_{z=\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -4\pi i \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-4\pi i\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}\pi i .$$

Пример 9. Вычислить $\displaystyle\oint\limits_{\Gamma} \frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)}$ в следующих случаях задания контура:

а) $|z-i|=2$, б) $|z+2-i|=3$.

Решение.

а) В круг $|z-i|\le 2$ попадает точка $z=i$. Записываем функцию $\dfrac{1}{(z-i)^2}\dfrac{e^z}{z-2}$ при $n=2$ и $z_0=i$. Вычисляем интеграл:

$$\oint\limits_{\Gamma} \frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)} = 2\pi i\left(\frac{e^z}{z+2}\right)'\Bigg|_{z=i} = 2\pi i\frac{e^z(z+2)-e^z}{(z+2)^2}\Bigg|_{z=i} =$$

$$= 2\pi i\frac{e^z(1+z)}{(z+2)^2}\Bigg|_{z=i} = \frac{2\pi i\cdot e^i(1+i)}{(2+i)^2}.$$

б) В круг $|z+2-i|\le 3$ входят обе точки $z_1=i,\ z_2=-2$. Запишем интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz=\int_{\Gamma_1} f(z)dz+\int_{\Gamma_2} f(z)dz,$$

где каждый из контуров Γ_1 и Γ_2 охватывает только одну из точек. В частности, в качестве контура Γ_1 можно взять окружность из случая „a”, а Γ_2 – окружность, например, $|z+2+i|=2$, т.е. можно воспользоваться полученными результатами.

$$\int_{\Gamma}\frac{e^z dz}{(z-i)^2\cdot(z+2)}=2\pi i\frac{e^{-2}}{(2+i)^2}+2\pi i\frac{1+i}{(2+i)^2}e^i=\frac{2\pi i}{(2+i)^2}(e^{-2}+e^i(1+i))$$

4.6. Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить интегралы от функций комплексной переменной по заданным кривым.

1.1 $\int_L \bar{z}dz$, L— полуокружность $|z|=1$, $\operatorname{Im} z\ge 0$. $[0]$

1.2 $\int_L z\operatorname{Re} z dz$, L — отрезок прямой от точки $z_1=0$ до точки $z_2=i$. $[0]$

1.3 $\int_L z^2|z|dz$, L — полуокружность $|z|=2$, $\operatorname{Im} z\le 0$. $\left[-\frac{16\pi}{3}\right]$

1.4 $\int_L z\operatorname{Im} z dz$, L — отрезок прямой от точки $z_1=0$ до точки $z_2=1+i$. $\left[\frac{2i}{3}\right]$

1.5 $\int_L e^{|z|}dz$, L — полуокружность $|z|=1$, $\operatorname{Re} z\le 0$. $[-2ei]$

1.6 $\int_L \operatorname{Im} z dz$, L — полуокружность $|z|=1$, $\operatorname{Im} z\ge 0$. $\left[-\frac{\pi}{2}\right]$

1.7 $\int_L \bar{z}dz$, L — отрезок прямой от точки $z_1=0$ до точки $z_2=1+i$. $[1]$

1.8 $\int\limits_L |z|\operatorname{Re} z dz$, L — полуокружность $|z|=3,\ \operatorname{Im} z \le 0.$ $\left[-\dfrac{27\pi i}{2}\right]$

1.9 $\int\limits_L z\sin|z|dz$, L — полуокружность $|z|=2,\ \operatorname{Re} z \ge 0.$ $[0]$

1.10 $\int\limits_L z^2 \operatorname{Im} z dz$, L – отрезок прямой от точки $z_1=0$ до точки $z_2=2+2i.$ $[8+8i]$

2. Вычислить интегралы от аналитических функций.

2.1 $\int\limits_0^i z\cos z dz.$ $\left[1-e^{-1}\right]$

2.2 $\int\limits_0^i \left(z^2+\sin z\right)dz.$ $\left[1-\operatorname{ch}1-\dfrac{i}{3}\right]$

2.3 $\int\limits_{1-i}^{1+i} \left(3z^2+2z-1\right)dz.$ $[6i]$

2.4 $\int\limits_0^{2i} 4\cos^2 z dz.$ $[(4+\operatorname{sh}4)i]$

2.5 $\int\limits_i^{2i} 2ze^{z^2} dz.$ $\left[e^{-4}-e^{-1}\right]$

2.6 $\int\limits_0^i ze^z dz.$ $[1-\sin1-\cos1+i(\cos1-\sin1)]$

2.7 $\int\limits_1^i z\sin z dz.$ $\left[\cos1-\sin1-ie^{-1}\right]$

2.8 $\int\limits_0^i (z+i)\sin z dz.$ $[i(1+\operatorname{sh}1-2\operatorname{ch}1)]$

2.9 $\int\limits_1^{1+i} 2z\cos z^2 dz.$ $[-\sin1+i\operatorname{sh}2]$

2.10 $\int\limits_0^i \left(2z^3+2z\right)\sin z^2 dz.$ $[1-\cos1-\sin1+i\cos1]$

3. Вычислить интегралы при помощи формул Коши

3.1 $\oint\limits_{|z-2-i|=2} \dfrac{\sin z}{z^3+16z}dz$, $[0]$

3.2 $\oint\limits_{|z+2i|=1} \dfrac{\sin z}{z^3+16z}dz$, $[0]$

3.3 $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\sin z}{z^3+16z}dz$, $[0]$

3.4 $\oint\limits_{|z+4i|=2} \dfrac{\sin z}{z^3+16z}$, $\left[-\dfrac{\pi\,\mathrm{sh}1}{16}\right]$

3.5 $\oint\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}} \dfrac{e^z}{(1-z)^3}dz$, $[\pi i e]$

3.6 $\oint\limits_{|z+2+i|=2} \dfrac{e^z dz}{(z-i)^2(z+2)}$, $[0]$

3.7 $\oint\limits_{|z+i|=1} \dfrac{e^z dz}{(z-i)^2(z+2)}$, $[0]$

3.8 $\oint\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}} \dfrac{1}{z^2+1}dz$, $[\pi]$

3.9 $\oint\limits_{|z+i|=\frac{1}{2}} \dfrac{1}{z^2+1}dz$, $[-\pi]$

3.10. $\int\limits_{|z-2,5|=1} \dfrac{\sin z}{z(z-3)}dz$. $\left[\dfrac{2}{3}\pi i\sin 3\right]$

5. РЯДЫ ТЕЙЛОРА И ЛОРАНА

5.1. Степенные ряды

Определение 1. Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n-0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots, \quad (5.1)$$

где c_n и z_0 комплексные числа, а z – комплексная переменная.

Если $z_0 = 0$, то получаем ряд вида

$$\sum_{n-0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots . \quad (5.2)$$

Областью сходимости степенного ряда является внутренность круга с центром в точке z_0 и радиусом R с возможным добавлением точек, лежащих на границе этого круга. Радиус круга называется **радиусом сходимости** и определяется по формулам

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \quad (5.3)$$

и

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}, \quad (5.4)$$

если пределы существуют.

Таким образом, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ при $|z-z_0| < R$ **сходится** абсолютно, а при $|z-z_0| > R$ **расходится**. Множество точек сходимости ряда на окружности может быть пустым, может полностью совпадать с ней, может в одних точках окружности сходиться, а в других расходиться.

Если радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ есть число $R > 0$, то открытый круг $|z-z_0| < R$ называют кругом сходимости этого ряда. Если $R = \infty$ кругом сходимости называют всю комплексную плоскость. Если $R = 0$, то ряд сходится только в точке $z = z_0$.

Таким образом, степенной ряд определяет функцию

$$S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

для всех комплексных чисел, удовлетворяющих условию $|z-z_0|<R$, и, может быть, для некоторых или всех чисел, удовлетворяющих условию $|z-z_0|=R$. Функция $S(z)$ является аналитической в круге сходимости.

Пример 1. Найти радиус сходимости и область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{3^n n^3}$.

Решение. По условию имеем $|c_n|=\frac{1}{3^n n^3}$. Для того, чтобы найти радиус сходимости, воспользуемся формулой

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|},$$

получим

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)^3}{3^n n^3}=\lim_{n\to\infty}3\left(1+\frac{1}{n}\right)^3=3.$$

Проверим, будет ли сходиться ряд на окружности $|z-i|=3$. Для чего найдём модуль выражения, стоящего под знаком суммы при $|z-i|=3$, а именно

$$\left|\frac{(z-i)^n}{3^n n^3}\right|=\frac{3^n}{3^n n^3}=\frac{1}{n^3}.$$

Из сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ непосредственно следует абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{3^n n^3}$ во всех точках окружности $|z-i|=3$. Таким образом, исследуемый ряд сходится во всех точках z, удовлетворяющих условию $|z-i|\le 3$.

5.2. Ряды Тейлора

Определение 2. Пусть функция $f(z)$ аналитическая в точке z_0 (т.е. дифференцируемая в этой точке и некоторой ее окрестности). Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,\ \text{где}\ \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_L\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \qquad (5.5)$$

называется рядом Тейлора функции f в точке z_0. Этот ряд абсолютно сходится внутри контура L, а качестве L можно взять любую окружность, которая не выходит за пределы D.

Теорема (теорема единственности ряда Тейлора). Любой сходящийся в круге $|z-z_0|<R$ к функции $f(z)$ степенной ряд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_o)^n \qquad (5.6)$$

является рядом Тейлора для своей суммы.

Доказательство. Пусть имеет место ряд (5.6). Тогда $a_0=f(z_0)$. Выполняя почленное дифференцирование ряда (5.6) и полагая после этого $z=z_0$, получим $a_1=f'(z_0),\ a_2=\dfrac{f''(z_0)}{2!},\ \ldots,\ a_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\ \ldots,$ т.е. ряд (5.6) и есть ряд Тейлора для функции $f(z)$.

Пример 1. Написать ряд Тейлора для функции $f(z)=e^z$ в точке $z=0$.

Решение. Функция $f(z)=e^z$ аналитическая в точке $z=0$ и

$$f^n(0)=e^z\big|_{z=0}=e^0=1.$$

Поэтому ряд Тейлора функции $f(z)=e^z$ в точке $z=0$ будет иметь вид $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}$.

Пример 2. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=0$ функцию $f(z)=\dfrac{z}{z^2-2z-3}$ и найти радиус сходимости.

Решение. Используем разложение

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-...+(-1)^n z^n+... \ (R=1).$$

Разложим функцию $f(z)=\frac{z}{z^2-2z-3}$ на простейшие дроби:

$$\frac{z}{z^2-2z-3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z+1}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{z-3}.$$

Преобразуем правую часть следующим образом:

$$\frac{z}{z^2-2z-3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z+1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=\frac{1}{4}(1-z+z^2-z^3+...)-\frac{1}{4}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}+...\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{4}{3}z+\frac{8}{9}z^2-\frac{28}{27}z^3+...\right)=-\frac{1z}{3}+\frac{2}{3^2}z^2-\frac{7}{3^3}z^3....$$

Ближайшей к точке $z_0=0$ особой точкой данной функции является точка $z=-1$, поэтому радиус сходимости полученного ряда $R=1$.

Пример 3. Разложить по степеням $(z-3)$ функцию $f(z)=\frac{1}{3-2z}$.

Решение. Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$f(z)=\frac{1}{3-2z}=\frac{1}{3-2(z-3+3)}=\frac{1}{-3-2(z-3)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{3}(z-3)}.$$

Используем разложение:

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-...+(-1)^n z^n+... \ (R=1).$$

Заменим в разложении z на $\frac{2}{3}(z-3)$, получим:

$$\frac{1}{3-2z}=-\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{3}(z-3)+\frac{2^2}{3^2}(z-3)^2-\frac{2^3}{3^3}(z-3)^3+...\right)=$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}(z-3)-\frac{2^2}{3^3}(z-3)^2+\frac{2^3}{3^4}(z-3)^3-....$$

Этот ряд сходится при условии

$\left|\frac{2}{3}(z-3)\right|<1$ или $|z-3|<\frac{3}{2}$, т.е. радиус сходимости ряда $R=\frac{3}{2}$.

5.3. Разложение функции в степенной ряд

В предыдущем пункте было сказано, что сумма степенного ряда является аналитической функцией внутри круга сходимости. Вполне естественно поставить вопрос о возможности разложения в степенной ряд аналитической функции. Справедливы следующие утверждения:

1) Если функция $f(z)$ однозначная и аналитическая в круге $|z-z_0|<R$, тогда в каждой точке этого круга она единственным образом представляется сходящимся рядом Тейлора

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n. \tag{5.7}$$

2) Каждый сходящийся степенной ряд является рядом Тейлора своей суммы.

При разложении функции в степенной ряд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

коэффициенты c_n далеко не всегда удобно вычисляются по формулам $c_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Для вычисления коэффициентов ряда Тейлора существует ряд искусственных приемов, которые аналогичны приемам, применяемым в случае функций действительного переменного: умножение на переменную, дифференцирование и интегрирование ряда в области сходимости. За основу при этом берут основные табличные разложения:

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots,\ |z|<\infty,$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\ |z|<\infty,$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\ |z|<\infty,$$

$$\mathrm{sh}z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\ |z|<\infty,$$

$$\mathrm{ch}z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots+\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\ |z|<\infty,$$

$$(1+z)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}z^n=1+mz+\frac{m(m-1)}{2!}z^2+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}z^3+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}z^n+\ldots,\ m\in Z,|z|<1.$$

Частные случаи последней формулы:

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\ldots+(-1)^n z^n+\ldots,\ |z|<1,$$

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots+z^n+\ldots,\ |z|<1.$$

Пример 1. Разложить функцию $\frac{1}{(5z+6)^2}$ в ряд по степеням ($z-7$).

Решение. Так как степень знаменателя равна двум, сначала разложим в ряд функцию $\frac{1}{5z+6}$, затем почленно продифференцируем его:

$$\frac{1}{5z+6}=\frac{1}{41+5(z-7)}=\frac{1}{41}\cdot\frac{1}{1+\frac{5(z-7)}{41}}=\frac{1}{41}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n(z-7)^n}{41^n}.$$

Круг сходимости $\frac{5|z-7|}{41}<1\Rightarrow|z-7|<\frac{41}{5}$.

На границе круга сходимости ряд из модулей расходится, т.к. общий член не стремится к нулю, поэтому в каждой точке окружности $|z-7|=\frac{41}{5}$ ряд расходится. Далее,

$$\frac{1}{(5z+6)^2}=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5z+6}\right)'=-\frac{1}{5\cdot 41}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n(z-7)^n}{41^n}\right)'=\frac{1}{205}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\cdot 5^n(z-7)^{n-1}}{41^n}$$

Все выводы о круге сходимости и поведении ряда на его границе остаются справедливыми.

5.4. Ряды Лорана

Среди рядов, отличных от степенных, наиболее близким к степенному является ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(z-z_0)^n} = c_0 + \frac{c_1}{(z-z_0)} + \frac{c_2}{(z-z_0)^2} + \ldots + \frac{c_n}{(z-z_0)^n} + \ldots \ , \qquad (5.8)$$

где c_n и z_0 комплексные числа, а z комплексное переменное.

Если $z_0 = 0$, то получаем ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots + \frac{c_n}{z^n} + \ldots . \qquad (5.9)$$

Областью сходимости ряда вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(z-z_0)^n}$ является внешность круга с центром в точке z_0 и радиусом r с возможным добавлением точек, лежащих на границе этого круга. Радиус круга определяется по формулам

$$r = \lim_{n\to 0} \sqrt[n]{|\,c_n\,|} \ \ (5.10) \qquad \text{и} \qquad r = \lim_{n\to 0} \frac{|\,c_{n+1}\,|}{|\,c_n\,|}, \qquad (5.11)$$

если пределы существуют.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(z-z_0)^n}$ при $|\,z-z_0\,| > r$ сходится абсолютно, а при $|\,z-z_0\,| < r$ расходится. Множество точек сходимости ряда на окружности $|\,z-z_0\,| = r$ может быть пустым, может полностью совпадать с ней, может в одних точках окружности сходиться, а в других расходиться.

Если радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(z-z_0)^n}$ число $r > 0$, то областью сходимости ряда является внешность круга $|\,z-z_0\,| > r$. Если $r = \infty$, то область сходимости вырождается в бесконечно удаленную точку. Если $r = 0$, то областью сходимости является вся комплексная плоскость из которой выброшена точка $z = z_0$.

Таким образом, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{(z-z_0)^n}$ определяет функцию $S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{(z-z_0)^n}$

для всех комплексных чисел, удовлетворяющих условию $|z-z_0|>r$, и, может быть, для некоторых или всех чисел, удовлетворяющих условию $|z-z_0|=r$. Функция $S(z)$ является аналитической в области сходимости $|z-z_0|>r$.

Объединим теперь два случая (степенной ряд и ряд с отрицательными степенями переменных).

Определение 3. Пусть функция $f(z)$ аналитична в кольце $V_{R,r}:=\{z\,|\,r<|z-z_0|<R\}$. Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,\ c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\ n\in Z, \tag{5.12}$$

где Γ — окружность $|z-z_0|=\rho,\ r<\rho<R$, называется **рядом Лорана функции** $f(z)$ **в кольце** $V_{R,r}:=\{z\,|\,r<|z-z_0|<R\}$**.**

В исследованиях о **разложимости функции в ряд Лорана** основными являются следующие утверждения:

1. Однозначная аналитическая в кольце $V_{R,r}:=\{z\,|\,r<|z-z_0|<R\}$ функция $f(z)$ в каждой точке кольца $V_{R,r}$ единственным образом представляется сходящимся рядом Лорана.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n,\ c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\ n\in Z.$$

Ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-z_0)^n \tag{5.13}$$

называют главной частью ряда Лорана. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \tag{5.14}$$

называют правильной частью ряда Лорана.

2. Если функция $f(z)$ аналитична в круге $|z-z_0|<R$, то ряд Лорана в этом круге совпадает с рядом Тейлора для этой функции.

3. Любой ряд в кольце сходимости является рядом Лорана своей суммы

$$S(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n .$$

На практике, при разложении функции $f(z)$ в кольце $V_{R,r}$ в ряд Лорана, формула $c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\ n\in Z$ для вычисления коэффициентов ряда Лорана применяется редко. Так же, как и для ряда Тейлора, разложение в ряд Лорана единственно, следовательно, для получения Лорановских разложений можно воспользоваться умножением на переменную, дифференцированием и интегрированием ряда в области сходимости. За основу при этом берут основные табличные разложения.

Еще раз подчеркнем, что в ряд Лорана раскладывается функция, аналитическая в кольце, и ширина этого кольца определяется областью аналитичности функции, т.е. разложение теряет смысл там, где функция теряет аналитичность.

Пример 1. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=z^2\cos\dfrac{1}{z}$ в окрестности точки $z_0=0$.

Решение. Используем разложение

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\ |z|<\infty .$$

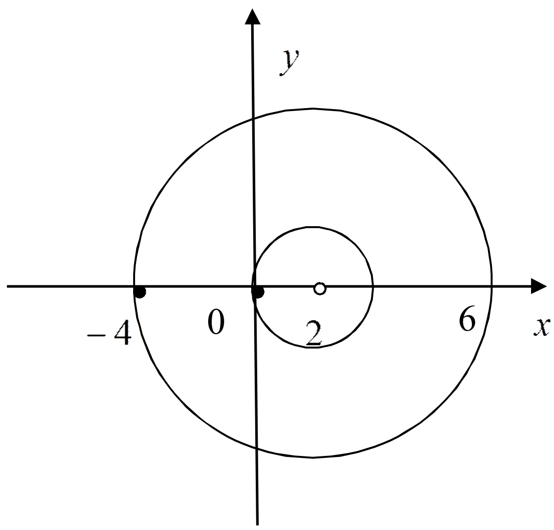
Заменяя z на $\dfrac{1}{z}$, получим

$$z^2\cos\frac{1}{z}=z^2\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\frac{1}{6!z^6}+\ldots\right)=z^2-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!z^2}-\frac{1}{6!z^4}+\ldots$$

Это разложение справедливо для любой точки $z\neq 0$. В данном случае «кольцо» представляет собой всю комплексную плоскость с одной выброшенной точкой $z=0$. Это «кольцо» можно определить с помощью следующего соотношения: $0<|z-0|<+\infty$. Здесь

$r=0,\ R=+\infty,\ z_0=0$. Данная функция является аналитической в указанном «кольце».

Пример 2. Получить все возможные разложения в ряд Лорана по степеням $(z-2)$ функции $f(z)=\dfrac{1}{z(z+4)}$.



Решение. Здесь $z_0=2$, функция теряет аналитичность в точках $z_1=0,\ z_2=-4$. Легко видеть, существует три области аналитичности с центром в z_0 (один круг и два кольца), на границах которых функция теряет аналитичность:

1. $|z-2|<2$;
2. $2<|z-2|<6$;
3. $|z-2|>6$.

В каждой из этих областей разложение будет таким:

1. В первой области (круге) функция аналитична, поэтому ряд Лорана будет совпадать с рядом Тейлора.

Разложение $f(z)$ на простые дроби:

$$\frac{1}{z(z+4)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(z+4)-z}{z(z+4)}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+4}\right),$$

разлагаем в ряд Тейлора каждую из них.

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{2+(z-2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-2}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^n,$$

где $|z-2|<2$.

$$\frac{1}{z+4}=\frac{1}{6+(z-2)}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-2}{6}}=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{6}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6^{n+1}}(z-2)^n,$$

это разложение справедливо, если $|z-2|<6$, т.е. в первой и второй областях. Окончательно в первой области:

$$f(z)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{6^{n+1}}\right)(z-2)^n .$$

Этот ряд содержит только правильную часть.

2. В кольце $2<|z-2|<6$ знаменатель второй геометрической прогрессии (для дроби $\frac{1}{z+4}$) по модулю $\frac{|z-2|}{6}<1$, поэтому разложение остается в силе. Для первой дроби, с учетом того, что $|z-2|>2\Rightarrow\frac{2}{|z-2|}<1$, получим:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{2+(z-2)}=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{2}{z-2}}=\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z-2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{(z-2)^{n+1}}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}}{(z-2)^n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{-n-1}\cdot 2^{-n-1}\cdot(z-2)^n .$$

Это – главная часть ряда Лорана. Разложение имеет вид:

$$f(z)=\frac{1}{4}\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{-n-1}\cdot 2^{-n-1}\cdot(z-2)^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6^{n+1}}(z-2)^n .$$

3. В кольце $|z-2|>6\Leftrightarrow 6<|z-2|<+\infty$ для первой дроби разложение такое же, как и в предыдущем случае:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{2+(z-2)}=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{2}{z-2}}=\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z-2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{(z-2)^{n+1}}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}}{(z-2)^n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{-n-1}\cdot 2^{-n-1}\cdot(z-2)^n .$$

Для второй дроби

$$\frac{1}{z+4}=\frac{1}{6+(z-2)}=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{6}{z-2}}=\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{6}{z-2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 6^n}{(z-2)^{n+1}}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 6^{n-1}}{(z-2)^n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n-1}\cdot 6^{n-1}\cdot(z-2)^n .$$

Ответ можно записать в форме

$$f(z)=\frac{1}{4}\sum_{n=-1}^{-\infty}(-1)^{-n-1}\cdot(2^{-n-1}-6^{-n-1})\cdot(z-2)^n .$$

В этом разложении имеется только главная часть.

5.5 Изолированные особые точки

Определение 4. Пусть функция f не является аналитической в точке $z=a$. Точка $z=a$ называется **изолированной особой точкой функции** f, если существует такая проколотая окрестность этой точки, т.е. кольцо $V_{R,0} := \{z \mid 0 < |z| < R\}$, в котором функция f аналитическая.

Пусть $z=a$ – изолированная особая точка функции f. Рассмотрим разложение в кольце $V_{R,0}$ функции f в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n .$$

В зависимости от разложения различают три типа изолированных особых точек.

Определение 5. Если в разложении в ряд Лорана отсутствует главная часть, т.е. члены с отрицательными степенями

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

то точка $z=a$ называется устранимой особой точкой функции f.

При подходе к устранимой особой точке $z=a$ функция f имеет конечный предел, и если его принять в качестве значения функции в точке $z=a$, то f становится аналитической в точке $z=a$.

Определение 6. Если в разложении в ряд Лорана главная часть содержит конечное число членов

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{-1} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,\ m>0,\ c_m \neq 0,$$

то точка $z=a$ называется полюсом порядка m функции f.

Определение 7. Если в разложении в ряд Лорана главная часть содержит бесконечное число членов

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

то точка $z=a$ называется существенно особой точкой функции f.

Признаки особых точек по значению $\lim\limits_{z\to a} f(z)$.

Теорема 1. Для того, чтобы особая точка $z=a$ была **устранимой особой точкой** функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)=C,\ C\neq\infty$.

Доказательство. Выпишем разложение $f(z)$ в ряд Лорана:

$$f(z)=\ldots+\frac{A_{-n}}{(z-a)^n}+\frac{A_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}}+\ldots+A_0+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+\ldots.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ может быть конечным тогда и только тогда, когда отсутствуют члены с отрицательными степенями, т.е. отсутствует главная часть, т.е. $z=a$ – устранимая особая точка. В этом случае $\lim\limits_{z\to a} f(z)=A_0$.

Теорема 2. Изолированная особая точка $z=a$ функции f является **полюсом** тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$. При этом в некоторой окрестности этой точки $f(z)$ можно представить в виде $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$, где $\varphi(z)$ аналитическая в точке a функция, $\varphi(a)\neq 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(z)$ имеет в точке $z=a$ полюс n-го порядка, т.е.

$$f(z)=\sum_{k=-n}^{\infty}A_k(z-a)^k=\frac{A_{-n}}{(z-a)^n}+\frac{A_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}}+\ldots+A_0+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+\ldots,\quad A_n\neq 0.$$

Преобразуем это выражение:

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^n}\cdot(A_{-n}+A_{-n+1}(z-a)+A_{-n+2}(z-a)^2+\ldots A_0(z-a)^n+A_1(z-a)^{n+1}+$$
$$+A_2(z-a)^{n+2}+\ldots).$$

Обозначим $\varphi(z)$ сумму ряда, стоящего в скобках:

$$\varphi(z)=A_{-n}+A_{-n+1}(z-a)+A_{-n+2}(z-a)^2+\ldots A_0(z-a)^n+A_1(z-a)^{n+1}+A_2(z-a)^{n+2}+\ldots$$

Ряд Лорана функции $f(z)$ сходится в некотором кольце $0<|z-a|<r$. Пусть точка z_1 принадлежит этому кольцу. Ряд для $\varphi(z)$ сходится в этой точке, т.к. он отличается от сходящегося ряда для $f(z)$ только постоянным множителем $\dfrac{1}{(z-a)^n}$; по теореме Абеля ряд для

$\varphi(z)$ сходится в круге $|z-a|<|z_1-a|$ и $\varphi(z)$ аналитична в этом круге как сумма степенного ряда.

Достаточность. Пусть $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$, где $\varphi(z)$ аналитическая в точке a функция, $\varphi(a)\neq 0$. Разложим $\varphi(z)$ в ряд Тейлора:

$$\varphi(z)=B_0+B_1(z-a)+B_2(z-a)^2+\ldots+B_k(z-a)^k+\ldots.$$

Тогда $$f(z)=\frac{B_0}{(z-a)^n}+\frac{B_1}{(z-a)^{n-1}}+\frac{B_2}{(z-a)^{n-2}}+\ldots,$$

т.е. главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ начинается с члена $\dfrac{B_0}{(z-a)^n}$, где $B_0=\varphi(a)\neq 0$, т.е. точка $z=a$ – полюс n-го порядка.

Определение 8. Пусть функция $\varphi(z)$ аналитическая в точке $z=a$. Точка $z=a$ называется **нулем порядка** k **функции** $\varphi(z)$, если

$$\varphi(z_0)=\varphi'(z_0)=\ldots=\varphi^{k-1}(z_0)=0,\ \varphi^{(k)}(z_0)\neq 0.$$

Если в точке z_0 функция $\varphi(z)$ имеет **нуль порядка** k, то в ее разложении в ряд Тейлора будут отсутствовать первые k членов, а именно:

$$\varphi(z)=\frac{\varphi^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k+\frac{\varphi^{(k)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0)^{k+1}+\ldots=$$

$$=c_k(z-z_0)^k+c_{k+1}(z-z_0)^{k+1}+\ldots=\sum_{n=k}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=$$

$$=(z-z_0)^k\sum_{n=k}^{\infty}c_n(z-z_0)^{n-k}=(z-z_0)^k\psi(z),$$

где функция $\psi(z)$ аналитическая в точке z_0 и $\psi(z_0)\neq 0$.

Теорема о связи нулей и полюсов. Функция $f(z)$ имеет в точке $z=a$ полюс n-го порядка тогда и только тогда, когда функция $\dfrac{1}{f(z)}$ аналитична в точке $z=a$ и точка $z=a$ ее нуль n-го порядка.

С ее помощью легко определять порядок полюса.

Мы доказали, что в устранимой особой точке и в полюсе существует (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{z\mapsto a} f(z)$. Поэтому в существенно особой точке этот предел существовать не может.

Теорема Пикара (без доказательства)**.** В любой сколь угодно малой окрестности своей существенно особой точки функция $f(z)$ принимает (причем бесконечно много раз) любое конечное значение (за исключением, возможно, одного).

Пример 1. Используя разложение в ряд Лорана, определить характер особых точек для функции $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$.

Решение. Используя формулу для разложения в ряд Лорана для функции

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots,$$

имеем

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots\right)=\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\frac{z^5}{7!}+\ldots.$$

Главная часть разложения в ряд Лорана содержит один член $\dfrac{1}{z}$, значит, $z=0$ – полюс первого порядка.

Пример 2. Используя разложение в ряд Лорана, определить характер особых точек для функции $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$.

Решение. Используем формулу для разложения в ряд Лорана для функции

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\ |z|<\infty,$$

имеем

$$f(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots\right)\right)=\frac{1}{z^2}\left(\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}-\ldots.$$

Так как в разложении отсутствуют члены с отрицательными степенями z, то можно сделать вывод, что $z_0 = 0$ – устранимая особая точка.

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{(1-\cos z)'}{(z^2)'} = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{2z} = \lim_{z\to 0}\frac{(\sin z)'}{(2z)'} = \lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{2} = \frac{1}{2}.$$

Т.к. $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \frac{1}{2} = \text{const}$, то $z_0 = 0$ – устранимая особая точка функции $f(z)$.

Пример 3. Используя разложение в ряд Лорана, определить характер особых точек для функции $f(z) = \dfrac{e^{\frac{z}{1-z}}}{z^2}$.

Решение. Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 1$.

$$e^{\frac{z}{1-z}} = e^{-\left(\frac{z}{z-1}\right)} = e^{-\left(\frac{z-1+1}{z-1}\right)} = e^{-1}e^{-\frac{1}{z-1}}.$$

Используем формулу для разложения в ряд Лорана для функции

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,\ |z| < \infty$$

Тогда

$$f(z) = e^{-1}\left(1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!(z-1)^2} - \frac{1}{3!(z-1)^3} + \ldots\right)..$$

Поскольку главная часть содержит бесконечное множество членов, то точка $z_0 = 1$ является существенно особой точкой.

Пример 5. Используя теорему о связи нулей и полюсов определить характер особых точек для функции $f(z) = \dfrac{e^z}{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}$.

Решение. Пусть $f(z) = \sin z - z + \dfrac{z^3}{6}$. Точка $z = 0$ – нуль этой функции, так как $f(0) = 0$. Найдем порядок нуля:

$$f'(z) = \cos z - 1 + \frac{z^2}{2};\ f'(0) = 0$$

$$f''(z) = -\sin z + z;\ f''(0) = 0$$

$$f^{(3)}(z) = -\cos z + 1; \; f^{(3)}(0) = 0$$

$$f^{(4)}(z) = \sin z; \; f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(z) = \cos z; \; f^{(5)}(0) = 1 \neq 0$$

Первая отличная от нуля производная функции в точке $z = 0$ – пятая, поэтому эта точка – нуль пятого порядка функции $f(z) = \sin z - z + \dfrac{z^3}{6}$.

Поэтому функция $\dfrac{e^z}{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}$ имеет в этой точке полюс пятого порядка.

5.6. Практическое занятие 5

Пример 1. Найти радиус сходимости и область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{5^n}$.

Решение. По условию имеем $|c_n| = \dfrac{1}{5^n}$. Для того, чтобы найти радиус сходимости, воспользуемся формулой

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|},$$

Получим $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{5^n}} = \dfrac{1}{5}$ и $R = 5$.

Проверим сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{5^n}$ на окружности $|z| = 5$. Для чего найдём модуль выражения, стоящего под знаком суммы при $|z| = 5$, а именно $\left|\dfrac{z^n}{5^n}\right| = \dfrac{5^n}{5^n} = 1$.

Так как при $|z| = 5$ не выполнен необходимый признак сходимости рядов $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z^n}{5^n} \neq 0$, то при $|z| = 5$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{5^n}$ расходится. Таким образом, исследуемый ряд сходится во всех точках z, удовлетворяющих условию $|z|<5$.

Пример 2. Найти радиус сходимости и область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$.

Решение. По условию имеем $|c_n|=\frac{1}{n!}$. Для того, чтобы найти радиус сходимости, воспользуемся формулой

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|},$$

Получим $R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\infty$.

Таким образом, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ сходится во всех точках комплексной плоскости.

Пример 3. Найти первые три члена разложения в ряд Тейлора функции $f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}$ по степеням z, т.е. с центром разложения в точке $z_0=0$.

Решение. Коэффициент Тейлора вычислим, используя формулу (5.4):

$$c_0=f(z_0)=f(0)=e^{\frac{1}{1-z}}\Big|_{z=0}=e,$$

$$c_1=f'(z_0)=f'(0)=\frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{(1-z)^2}\Bigg|_{z=0}=e,$$

$$c_2=\frac{f''(z_0)}{2!}=\frac{f''(0)}{2!}=\frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{2}\left(\frac{1}{(1-z)^4}+\frac{2}{(1-z)^3}\right)\Bigg|_{z=0}=\frac{3e}{2}.$$

Итак, $e^{\frac{1}{1-z}}=e+ez+\frac{3ez^2}{2}+\dots$.

Единственная особая точка функции $f(z)$ есть $z=1$. Значит, радиус сходимости ряда Тейлора в данном случае $R=1$.

Пример 4. . Найти несколько первых членов разложения функции $f(z)=tgz$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z=0$ (по степеням z). Указать область, в которой справедливо это разложение.

Решение. Находим производные функции $f(z)=tgz$ непосредственно или по формулам:

$$f'(z)=\frac{1}{\cos^2 z}=1+f^2(z),$$

$$f''(z)=2f(z)f'(z),$$

$$f'''(z)=2\left[\left(f'(z)\right)^2+f(z)f''(z)\right],$$

$$f^{IV}(z)=2\left[3f'(z)f''(z)+f(z)f'''(z)\right],$$

$$f^{V}(z)=2\left[3\left(f''(z)\right)^2+4f'(z)f'''(z)+f(z)f^{IV}(z)\right],\ldots$$

Вычисляем значения производных в точке $z_0=0$:

$$f'(0)=1,\qquad f''(0)=0,\qquad f'''(0)=2,\qquad f^{IV}(0)=0,\qquad f^{V}(0)=16,\ldots$$

Составляем ряд Тейлора по формуле (5.1)

$$\operatorname{tg} z=z+\frac{2}{3!}z^3+\frac{16}{5!}z^5+\ldots$$

Особыми точками функции $f(z)=tgz$, ближайшими к точке $z_0=0$, являются точки $z=\pm\frac{\pi}{2}$, поэтому $R=\frac{\pi}{2}$ и разложение справедливо в круге $|z|<\frac{\pi}{2}$.

Пример 5. Разложить в ряд Тейлора по степеням z функцию $f(z)=\frac{1}{4-z^2}$ и найти область сходимости полученного разложения.

Решение. Используя стандартное разложение

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots,\quad |z|<1,$$

заменив z на $\frac{z^2}{4}$, получим:

$$\frac{1}{4-z^2}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{z^2}{4}}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{z^2}{4}+\frac{z^4}{16}+\ldots\right)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^2}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{4^{n+1}}.$$

Полученное разложение сходится при $\left|\dfrac{z^2}{4}\right|<1$, т.е. в круге $|z|<2$.

Итак, имеем: $\dfrac{1}{4-z^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n}}{4^{n+1}}$, $|z|<2$.

Пример 6. Разложить по степеням *z* функцию $f(z)=\dfrac{z+1}{(z-1)^2(z+2)}$. Указать область, в которой справедливо это разложение.

Решение. $f(z)$ - правильная рациональная дробь. Разложим её на элементарные дроби:

$$\frac{z+1}{(z-1)^2(z+2)}=\frac{1}{9}\frac{1}{z-1}+\frac{2}{3}\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{9}\frac{1}{z+2}.$$

Каждую элементарную дробь разлагаем в ряд по степеням z:

$$\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-z}=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\ |z|<1;$$

$$\frac{1}{(z-1)^2}=-\left(\frac{1}{z-1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n,\ |z|<1;$$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+z/2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}},\ |z|<2.$$

Складывая полученные ряды, получаем

$$\frac{z+1}{(z-1)^2(z+2)}=-\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n-\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}.$$

Ближайшей к точке $z_0=0$ особой точкой функции $f(z)$ является точка $z=1$, поэтому $R=1$ и полученное равенство справедливо в круге $|z|<1$. Приведём подобные слагаемые:

$$\frac{z+1}{(z-1)^2(z+2)}=-\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(6n+5+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)z^n,\ |z|<1.$$

Пример 7. Функцию $f(z)=\sin z$ разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z=3$ (по степеням *z*-3), используя табличные разложения. Указать область, в которой справедливо полученное разложение.

Решение. Введем новую переменную $t=z-3$ и найдем разложение функции $f(t)=\sin(t+3)$ по степеням *t*. Затем выражаем функцию через функции, имеющие табличные разложения: $\sin(t+3) = \sin 3\cos t + \cos 3\sin t$.

Находим разложение функции $\sin(t+3)$ в ряд Тейлора, используя табличные разложения, сложение (вычитание) рядов, умножение ряда на число. Имеем

$$\sin(t+3) = \sin 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n} + \cos 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n+1},\ |t| < \infty.$$

Заменяя t на $z-3$, получаем

$$\sin z = \sin 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-3)^{2n} + \cos 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-3)^{2n+1},\ |z| < \infty.$$

Поскольку $f(z) = \sin z$ аналитична при всех $z \in C$, разложение справедливо при всех $z \in C$.

Пример 8. Разложить в ряд Лорана с центром в $z_0 = 0$ функцию $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$.

Решение. Используем формулу

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots,\ |z| < \infty.$$

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \frac{1}{z^3 3!} + \ldots \frac{1}{z^n n!} + \ldots.$$

Тогда:

$$f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}} = z^3\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \frac{1}{z^3 3!} + \ldots \frac{1}{z^n n!} + \ldots\right) = z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{z4!} \ldots \frac{1}{z^{n-3} n!}.$$

Пример 9. Разложить в ряды Лорана по степеням z функцию

$$f(z) = \frac{z+2}{z^2 - 2z - 3}.$$

Решение. Дробь правильная. Находим корни уравнения $z^2 - 2z - 3 = 0$. Имеем два простых корня $z_1 = -1$ и $z_2 = 3$.

Точки $z_1 = -1$ и $z_2 = 3$ являются особыми точками функции $f(z)$ (и в них $f(z)$ не аналитична). Кольца аналитичности функции $f(z)$:

$$|z| < 1,\ 1 < |z| < 3, \quad |z| > 3.$$

Разлагаем $f(z)$ на элементарные дроби:

$$\frac{z+2}{(z+1)(z-3)}=-\frac{1}{4}\frac{1}{z+1}+\frac{5}{4}\frac{1}{z-3}.$$

В каждом кольце аналитичности элементарные дроби разлагаем в ряды, используя разложения в ряд Тейлора.

При $|z|<1$ имеем

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{1-(-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,$$

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-z/3}=\sum_{n=0}^{-\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}},\ |z|<3.$$

Следовательно, в круге $|z|<1$ ряд Лорана функции $f(z)$ имеет вид

$$\frac{z+2}{z^2-2z-3}=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n-\frac{5}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}-\frac{5}{3^{n+1}}\right]z^n.$$

Этот ряд является рядом Тейлора, так как в точке $z=0$ функция $f(z)$ аналитична.

При $1<|z|<3$ ряд для $\dfrac{1}{1+z}$ расходится, а ряд для $\dfrac{1}{z-3}$ сходится. Поэтому вместо первого используем

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{z}\frac{1}{1+1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^n},\ |z|>1.$$

Следовательно, в кольце $1<|z|<3$ ряд Лорана функции $f(z)$ имеет вид

$$\frac{z+2}{z^2-2z-3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4\cdot z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5\cdot z^n}{4\cdot 3^{n+1}}.$$

При $|z|>3$ ряд для $\dfrac{1}{1+z}$ сходится, а ряд для $\dfrac{1}{z-3}$ расходится. Поэтому используем

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-3z}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n},\ |z|>3.$$

Следовательно, в области $|z|>3$ ряд Лорана функции $f(z)$ имеет вид

$$\frac{z+2}{z^2-2z-3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4\cdot z^n}-\frac{5}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+5\cdot 3^{n-1}}{4}\frac{1}{z^n}.$$

Пример 10. Разложить в ряд Лорана в окрестности ее особой точки функцию $f(z)=z\sin\dfrac{\pi z}{z-1}$. Найти область, в которой справедливо полученное разложение.

Решение. Функция $f(z)$ имеет единственную особую точку $z=1$, следовательно, ее надо разложить в ряд Лорана по степеням $z-1$. Вводим вспомогательную переменную $t=z-1$. Получаем

$$f(t+1)=(t+1)\sin\frac{\pi(t+1)}{t}.$$

Преобразуем функцию $f(t+1)$ к виду, позволяющему использовать табличные разложения:

$$f(t+1)=(t+1)\sin\left(\pi+\frac{\pi}{t}\right)=-t\sin\frac{\pi}{t}-\sin\frac{\pi}{t}.$$

Используем табличное разложение в ряд Тейлора

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1},\quad |z|<\infty,$$

мы заменяем z на $\dfrac{\pi}{t}$ и находим разложение $\sin\left(\dfrac{\pi}{t}\right)$ в ряд Лорана

$$\sin\frac{1}{t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{\pi^{2n+1}}{t^{2n+1}},\ 0<|\,t\,|<\infty.$$

Подставим теперь полученный ряд

$$f(t+1)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{\pi^{2n+1}}{t^{2n}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{\pi^{2n+1}}{t^{2n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{t^{2n}}+\frac{1}{t^{2n+1}}\right)\pi^{2n+1}$$

Заменяя t на $z-1$, получаем

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{(z-1)^{2n}}+\frac{1}{(z-1)^{2n+1}}\right)\pi^{2n+1}.$$

Находим область, в которой справедливо полученное разложение. Так как $f(z)$ не имеет других особых точек, кроме $z=1$, полученный ряд Лорана сходится к $f(z)$ при всех $z\neq 1$. или $0<|z-1|<\infty$.

Пример 11. Найти нули функции $f(z)=e^z-1-z$ и определить их порядок.

Решение. Находим нули функции $f(z)$, решая уравнение $e^z-1-z=0$. Получаем $z=0$.

Определяем порядок полученного нуля $z=0$. Для этого используем разложение функции $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням z:

$$e^z-1-z=\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots\right)-1-z=\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots.$$

Поскольку в полученном разложении коэффициенты $c_0=c_1=0$, а $c_2=\frac{1}{2}\neq 0$, точка $z=0$ — нуль 2-го порядка функции $f(z)$.

Пример 12. Найти нули функции $f(z)=\left(z^4+2z+1\right)\left(z^2-2z+2\right)$ и определить их порядок.

Решение. Находим нули функции $f(z)$, решая уравнение $f(z)=0$. Разложив многочлены на множители, имеем

$$(z-i)^2(z+i)^2(z-(1+i))(z-(1-i))=0.$$

$$z_1=i,\ z_2=-i,\ z_3=1+i,\ z_4=1-i.$$

Определим порядок каждого нуля. Для этого сначала представим $f(z)$ в виде $f(z)=(z-i)^2\varphi_1(z)$, где $\varphi_1(z)=(z+i)^2\left(z^2-2z+2\right)$ и $\varphi_1(z_1)\neq 0$.

Согласно определению $z_1=i$ — нуль 2-го порядка функции $f(z)$.

Теперь представим $f(z)$ в виде $f(z)=(z+i)^2\varphi_2(z)$, где $\varphi_2(z)=(z-i)^2\left(z^2-2z+2\right)$ и $\varphi_2(z_2)\neq 0$. $z_2=-i$ – тоже нуль 2-го порядка функции $f(z)$.

Аналогично поступим с остальными корнями:

$f(z)=(z-(1-i))\varphi_3(z)$, где $\varphi_3(z)=\left(z^4+2z+i\right)(z-(1-i))$ и $\varphi_3(z_3)\neq 0$ и

$f(z)=(z-(1+i))\varphi_4(z)$, где $\varphi_4(z)=\left(z^4+2z+i\right)(z-(1+i))$ и $\varphi_4(z_4)\neq 0$.

Итак $z_3=1+i$ и $z_4=1-i$ - нули 1-го порядка (простые нули) функции $f(z)$.

Пример 13. Для функции $f(z)=\frac{e^{z+1}}{z^2}$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию.

Решение. Используем формулу для разложения в ряд Лорана для функции

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \ |z| < \infty .$$

Тогда

$$f(z) = \frac{e^{z+1}}{z^2} = \frac{e}{z^2}\left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\right) = e\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!}\ldots\right)$$

Главная часть ряда - $e\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}\right)$ и правильная часть — $e\left(\frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!}\ldots\right)$

Т.к. главная часть конечна, то $z = 0$ является полюсом 2-го порядка.

Пример 14. Найти изолированные особые точки функции $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^3} + \frac{2}{z}$ провести их классификацию.

Решение. Особой точкой функции является точка $z_0 = 0$. Чтобы определить вид особой точки разложим функцию в ряд Лорана по степеням z:

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^3} + \frac{2}{z} = \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots\right)\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z} =$$

$$= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{1!z^2} + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \ldots + \frac{z^{n-3}}{n!} + \ldots$$

$$\ldots - \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z} = \frac{1}{1!z^2} + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \ldots + \frac{z^{n-3}}{n!} + \ldots + \frac{2}{z} =$$

$$= \underbrace{\frac{5}{2z} + \frac{1}{1!z^2}}_{\text{главная часть}} + \underbrace{\frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \ldots + \frac{z^{n-3}}{n!} + \ldots}_{\text{правильная часть}}$$

Главная часть ряда Лорана содержит конечное число слагаемых, значит $z_0 = 0$ — полюс. Порядок высшей отрицательной степени $(n = 2)$ определяет порядок полюса. Следовательно, $z_0 = 0$ - полюс кратности 2.

Пример 15. Найти особые точки функции $f(z)=\dfrac{e^z-1-z}{\sin^2 z}$ и определить их тип.

Решение. Так как функции $\varphi(z)=e^z-1-z$ и $\psi(z)=\sin^2 z$ аналитичны при всех z, особые точки функции $f(z)$ определяются нулями знаменателя $\psi(z)$.

Находим нули $\psi(z)$ (корни уравнения $\sin^2 z=0$.) Получаем $z_k=\pi k$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$. Для каждого корня $z_k=\pi k$:

а) определяем порядок нуля $z_k=\pi k$ функции $\psi(z)=\sin^2 z$. Так как $\psi'(\pi k)=2\sin z\cos z\big|_{z=\pi k}=0$ и $\psi''(\pi k)=2\cos 2z\big|_{z=\pi k}\neq 0$, то $z_k=\pi k$ - нули 2-ого порядка функции $\psi(z)=\sin^2 z$;

б) определяем порядок нуля $z_k=\pi k$ функции $\varphi(z)=e^z-1-z$. Так как $\varphi(\pi k)\neq 0$ при $k\neq 0$, точки $z_k=\pi k$ $(k=\pm1,\pm2,...)$ не являются нулями функции $\varphi(z)$.

Но $\varphi(0)=e^z-1-z\big|_{z=0}=0$, $\varphi'(0)=e^z-1\big|_{z=0}=0$ и $\varphi''(0)=e^z\big|_{z=0}\neq 0$, точка $z=0$ нуль 2-ого порядка функции $\varphi(z)=e^z-1-z$.

Значит в точке $z=0$ порядок нуля числителя и знаменателя равен 2, следовательно, $z=0$ — устранимая особая точка.

В точках $z=\pi k$ $(k=\pm1,\pm2,...)$числитель не равен нулю, а порядок нуля знаменателя равен 2, следовательно, точки $z=\pi k$ $(k=\pm1,\pm2,...)$ - полюсы 2-ого порядка.

Пример 16. Определить тип особой точки $z=0$ функции $f(z)=z^3\cos\dfrac{1}{z}$.

Решение. Находим разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z=0$, используя табличное разложение для $\cos z$ и заменяя в нем z на $\dfrac{1}{z}$:

$$f(z)=z^3\cos\frac{1}{z}=z^3\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}+\frac{1}{6!z^6}+...\right)=z^3-\frac{z}{2!}+\frac{1}{4!z}+\frac{1}{6!z^3}+...$$

Главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ - $\frac{1}{4!z}+\frac{1}{6!z^3}+\ldots$ содержит бесконечное число слагаемых, следовательно, $z=0$ - существенно особая точка функции $f(z)$.

Пример 17. Для функции $f(z)=e^{\frac{z}{z-1}}$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию.

Решение. Воспользуемся известным разложением:

$$f(z)=e^{\frac{z}{z-1}}=e^{1+\frac{1}{z-1}}=e\cdot e^{\frac{1}{z-1}}=e\left(1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\ldots+\frac{1}{n!(z-1)^n}+\ldots\right)=e\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!(z-1)^n}$$

Т.к. главная часть бесконечна, то $z=1$ является существенно особой точкой.

Пример 18. Найти изолированные особые точки функции $f(z)=(z-i)^3\sin\frac{1}{2(z-i)}$, провести их классификацию.

Решение. Особой точкой функции является точка $z_0=i$. Чтобы определить вид особой точки используем разложение функции в ряд Лорана по степеням $z-i$:

$$f(z)=(z-i)^3\sin\frac{1}{2(z-i)}=(z-i)^3\left(\frac{1}{2(z-i)}-\frac{1}{3!(2(z-i))^3}+\frac{1}{5!(2(z-i))^5}-\ldots\right)=$$

$$=\frac{(z-i)^2}{2}-\frac{1}{2^3 3!}+\underbrace{\frac{1}{5!2^5(z-i)^2}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!2^{2n+1}(z-i)^{2n-2}}+\ldots}_{\text{главная часть}}.$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых, значит $z_0=i$ - существенно особая точка.

Пример 19. Для функции $f(z)=\frac{1-\cos 6z}{z^2}$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию.

Решение: Особой точкой функции является точка $z_0=0$. Чтобы определить вид особой точки используем признак поведения функции в особой точке.

$\lim\limits_{z\to 0}\frac{1-\cos 6z}{z^2}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{2\sin^2 3z}{z^2}=18$, значит $z_0=0$ устранимая точка.

5.7. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти области сходимости следующих степенных рядов:

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (z-i)^n$ [сходится в т. $z = i$]

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z+i}{in}\right)^n$ [сходится во всей плоскости $|z| < \infty$]

1.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{3^n n^n}$ [сходится в круге $|z| \le 3$]

1.4. $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{z+i}{1-i}\right)^n$ [сходится внутри круга $|z+i| < \sqrt{2}$]

2. Найти радиусы сходимости следующих степенных рядов:

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$ $\left[R = \frac{1}{4}\right]$

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(in)!}{n!} z^n$ $\left[R = \frac{1}{e}\right]$

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} (3+i^n)^n z^n$ $\left[R = \frac{1}{4}\right]$

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n^2} z^n$

$[R = \infty]$

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^n$ $\left[R = \frac{1}{2}\right]$

3. Выяснить, в каких точках окружности круга сходимости сходятся следующие ряды:

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt[n]{n}}$ [во всех]

3.2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n \ln^2 n}$ [во всех]

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}z^n$ $\left[z\neq\frac{1}{4}\right]$

4. Определить области сходимости следующих рядов:

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n\cdot 2^n}$

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n$

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4 z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n\cdot 2^n}$

4.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+4i)^n}{(z+2)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2i}{6}\right)^n$ [сходится в кольце $5<|z+2i|<6$]

5. Найти несколько первых членов разложения функции $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z=0$. Указать область, в которой справедливо это разложение.

5.1. $f(z)=\ln\cos z.$

$\left[f(z)=-\frac{z^2}{2}+\frac{4z^4}{4!}+\frac{44z^6}{6!}+\ldots,|z|<\frac{\pi}{2}\right]$

5.2. $f(z)=\frac{2}{\left(1+e^{-z}\right)}.$ $\left[f(z)=1+\frac{z}{2}-\frac{z^3}{3!2^2}-\frac{3z^5}{5!2^2}+\ldots,|z|<\pi\right]$

5.3. $f(z)=\frac{1}{(1+\sin z)}.$ $\left[f(z)=1-z+z^2-\frac{5z^3}{3!}+\frac{12z^4}{4!}+\ldots,|z|<\frac{\pi}{2}\right]$

5.4. $f(z)=\ln(1+\cos z).$ $\left[f(z)=\ln 2-\frac{z^2}{4}+\frac{z^4}{3\cdot 2^4}+\frac{11z^6}{90\cdot 2^6}+\ldots,|z|<\pi\right]$

5.5. $f(z)=sh^2 z.$ $\left[f(z)=z^2+\frac{8z^4}{4!}+\frac{32z^6}{6!}+\ldots,|z|<\infty\right]$

5.6. $f(z)=\ln(1+\sin z).$ $\left[f(z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3!}-\frac{2z^4}{4!}+\ldots,|z|<\pi\right]$

5.7. $f(z)=e^{\frac{1}{(1-z)}}.$ $\left[f(z)=e\left(1+z+\frac{3z^2}{2!}+\frac{13z^3}{3!}+\ldots,\right),\ |z|<1\right]$

5.8. $f(z)=\dfrac{1}{\left(1+e^{z}\right)}$. $\left[f(z)=e\left(1+z+\dfrac{3z^2}{2!}+\dfrac{13z^3}{3!}+\ldots\right),\ |z|<1\right]$

5.9. $f(z)=\dfrac{1}{\cos z}$. $\left[f(z)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{z}{2^2}+\dfrac{z^3}{3!2^3}+\dfrac{3z^5}{5!2^3}+\ldots, |z|<\pi\right]$

5.10. $f(z)=ch^2 z$. $\left[f(z)=1+z^2+\dfrac{8z^4}{4!}+\dfrac{32z^6}{6!}+\ldots, |z|<\infty\right]$

6. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)$ по степеням z. Указать область, в которой справедливо это разложение.

6.1. $f(z)=\dfrac{1}{(2+z)}$. $\left[f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n, |z|<2\right]$

6.2. $f(z)=\dfrac{1}{(2z-5)}$. $\left[f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{5^n}z^n, |z|<\dfrac{5}{2}\right]$

6.3. $f(z)=\dfrac{1}{\left(1-z^2/9\right)}$. $\left[f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}3^n z^{2z}, |z|<3\right]$

6.4. $f(z)=\dfrac{(4z+2)}{\left(z^3-1\right)}$. $\left[f(z)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\left(z^{3n}+2z^{3n+1}\right), |z|<1\right]$

6.5. $f(z)=\dfrac{(5-2z)}{\left(z^2-5z+6\right)}$. $\left[f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}+\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)z^n, |z|<1\right]$

6.6. $f(z)=\dfrac{(4z+3)}{\left(z^2-3z+2\right)}$. $\left[f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(7-\dfrac{11}{2^{n+1}}\right)z^n, |z|<1\right]$

6.7. $f(z)=\dfrac{1}{(2+z)^2}$. $\left[f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+1}}z^n, |z|<2\right]$

6.8. $f(z)=\dfrac{1}{(1-z)^2}$. $\left[f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n, |z|<1\right]$

6.9. $f(z)=\dfrac{1}{(1-z)^3}$. $\left[f(z)=\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)z^n, |z|<1\right]$

6.10. $f(z)=\dfrac{\left(3+z-z^2\right)}{\left(2+z-2z^2-z^3\right)}$. $\left[f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n+z^{2n}\right), |z|<1\right]$

7. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)$ в окрестности точки z_0. Указать область, в которой справедливо полученное разложение.

7.1. $f(z)=\cos z,\ z_0=\dfrac{\pi}{4}.$ $\left[f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(\pi/4+n\pi/2)}{n!}\left(z-\dfrac{\pi}{4}\right)^{2n},\ \left|z-\dfrac{\pi}{4}\right|<\infty\right]$

7.2. $f(z)=e^z,\ z_0=1.$ $\left[f(z)=e\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}(z-1)^n,\ |z-1|<\infty\right]$

7.3. $f(z)=\ln z,\ z_0=1.$ $\left[f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n,\ |z-1|<\infty\right]$

7.4. $f(z)=\dfrac{1}{z},\ z_0=-2.$ $\left[f(z)=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}(z+2)^n,\ |z-2|<2\right]$

7.5. $f(z)=\dfrac{1}{(5+2z)},\ z_0=3.$ $\left[f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^n}{11^{n+1}}(z-3)^n,\ |z-3|<\dfrac{5}{2}\right]$

7.6. $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-4z+3)},\ z_0=-2.$

$$\left[f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6\cdot 3^n}-\frac{1}{10\cdot 5^n}\right)(z+2)^n,\ |z+2|<3\right]$$

7.7. $f(z)=\sqrt{z},\ z_0=2.$

$$\left[f(z)=\sqrt{2}\left(1+\frac{z-2}{4}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{4^n n!}(z-2)^n\right),\ |z-2|<2\right]$$

7.8. $f(z)=\sin\left(\dfrac{\pi z}{4}\right),\ z_0=2.$ $\left[f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\pi^{2n}}{4^{2n}(2n)!}(z-2)^{2n},\ |z-2|<\infty\right]$

7.9. $f(z)=1(3-z)^2,\ z_0=1.$ $\left[f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^{n+2}}(z-1)^n,\ |z-1|<3\right]$

7.10. $f(z)=\dfrac{1}{3\sqrt{z}},\ z_0=3.$

$$\left[f(z)=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{\sqrt[3]{3}\cdot 9^n n!}(z-3)^n,\ |z-3|<3\right]$$

8. Разложить в ряды Лорана по степеням z функции $f(z)$.

8.1. $f(z)=\frac{1}{(z-2)}$. $\left[f(z)=\begin{cases} -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}, 0<|z|<2, \\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}, 2<|z|<\infty \end{cases} \right]$

8.2. $f(z)=\frac{1}{(z^2+z)}$. $\left[f(z)=\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{n-1}, 0<|z|<1, \\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+2}}, 1<|z|<\infty. \end{cases} \right]$

8.3. $f(z)=\frac{2}{(z^2+2z)}$. $\left[f(z)=\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{n-1}}{2^n}, 0<|z|<2 \\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{n+1}}{z^{n+2}}, 2<|z|<\infty \end{cases} \right]$

8.4. $f(z)=\frac{1}{(z^4-z^2)}$. $\left[f(z)=\begin{cases} -\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n-2}, 0<|z|<1 \\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{2n+4}}, 1<|z|<\infty. \end{cases} \right]$

8.5. $f(z)=\frac{1}{(z^3-3z^2)}$. $\left[f(z)=\begin{cases} -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{3^{n+1}}, 0<|z|<3, \\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+3}}, 3<|z|<\infty. \end{cases} \right]$

8.6. $f(z)=\frac{(2z-3)}{(z^2-5z+6)}$. $\left[f(z)=\begin{cases} -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n, |z|<2 \\ -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{z^{n+1}}-\frac{z^n}{3^{n+1}}\right), 2<|z|<3 \\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{z^{n+1}}, 3<|z|<\infty. \end{cases} \right]$

8.7. $f(z)=\dfrac{2}{\left(z^3-4z^2+3z\right)}$. $\left[f(z)=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)z^{n-1}, 0<|z|<1\\ -\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{z^{n+2}}+\dfrac{z^{n-1}}{3^n}\right), 1<|z|<3\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n-1}{z^{n+2}}, 3<|z|<\infty\end{cases}\right]$

8.8. $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^4-3z^3+2z^2\right)}$. $\left[f(z)=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)z^{n-2}, 0<|z|<1\\ -\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{z^{n+2}}+\dfrac{z^{n-2}}{2^{n+1}}\right), 1<|z|<2\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}-1}{z^{n+2}}, 2<|z|<\infty\end{cases}\right]$

8.9. $f(z)=\dfrac{(2z+3)}{\left(z^3+3z^2+2z\right)}$. $\left[f(z)=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{2^{n+1}+1}\right)z^{n}, 0<|z|<1\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{z^{n+2}}+\dfrac{z^{n-1}}{2^{n+1}}\right), 1<|z|<2\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^n+1}{z^{n+2}}, 2<|z|<\infty\end{cases}\right]$

8.10. $f(z)=\dfrac{3}{\left(z^4+5z^2+4\right)}$. $\left[f(z)=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)z^{2n}, 0<|z|<1,\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{z^{2n+2}}+\dfrac{z^{2n}}{4^n}\right), 1<|z|<2,\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1-4^n}{z^{2n+2}}, 2<|z|<\infty,\end{cases}\right]$

9. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности ее особой точки.

9.1. $f(z)=\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$. $\left[f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!\,z^{2n+1}},\ 0<|z|<\infty\right]$

9.2. $f(z)=e^{-\frac{1}{z^2}}$. $\left[f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!\,z^{2n}},\ 0<|z|<\infty\right]$

9.3. $f(z)=z\cos\left(\dfrac{1}{z}\right)$. $\left[f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!\,z^{2n-1}},\ 0<|z|<\infty\right]$

9.4. $f(z)=e^{\frac{z}{(z-1)}}$. $\left[f(z)=e\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!(z-1)^n},\ 0<|z-1|<\infty\right]$

9.5. $f(z)=\cos\left(\dfrac{\pi z}{(z+1)}\right)$. $\left[f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\pi^{2n}}{(2n)!(z+1)^{2n}},\ 0<|z+1|<\infty\right]$

9.6. $f(z)=\sin\left(\dfrac{(z+2)}{(z+1)}\right)$.

$$\left[f(z)=\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(z+1)^{2n}}+\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z+1)^{2n+1}},\ 0<|z+1|<\infty\right]$$

9.7. $f(z)=e^{\frac{z}{(z-i)}}$. $\left[f(z)=e\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{i^n}{n!(z-i)^n},\ 0<|z-i|<\infty\right]$

9.8. $f(z)=z\cos\left(\dfrac{\pi z}{z+2}\right)$.

$$\left[f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n}}{(2n)!(z+2)^{2n-1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}}{(2n)!(z+2)^{2n}},\ 0<|z+2|<\infty\right]$$

9. $f(z)=ze^{\frac{z}{(z+3)}}$. $\left[f(z)=\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 3^n}{n!(z+3)^{n-1}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 3^{n+1}}{n!(z+3)^n}\right],0<|z+3|<\infty\right]$

9.10. $f(z)=\dfrac{1}{(1-z^2)}$.

$$\left[f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^{n-1}}{2^{n+1}},\ 0<|z+1|<2,\quad f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{n-1}}{2^{n+1}},\ 0<|z-1|<2\right]$$

10. Найти нули аналитической функции $f(z)$ и определить их порядок.

10.1. $f(z)=\sin z - z.$ [$z=0$ - нуль 3-го порядка]

10.2. $f(z)=(z^2+1)sh\pi z.$ [$z=\pm i$ — нули 2-го порядка]

10.3. $f(z)=1-\cos z-\dfrac{z^2}{2}.$ [$z=2\pi k$ $k=0,\pm1,...$ - нули 4-го порядка]

10.4. $f(z)=(z+1)^2\sin\pi z.$

[$z=-1$ -нуль 3-го порядка, $z=k$ $(k=\pm1,\pm2,...)$ - нули 1-го порядка]

10.5. $f(z)=(e^{2z}-1-2z)\sin z.$

[$z=0$ — нуль 3-го порядка, $z=\pi k$ $(k=\pm1,\pm2,...)$ - нули 1-го порядка]

10.6. $f(z)=z(1-chz).$

[$z=0$ - нуль 2-го порядка, [$z=2\pi ki$ $(k=\pm1,\pm2,...)$ - нули 2-го порядка]

10.7. $f(z)=(z-shz)^2.$ [$z=0$ - нуль 6-го порядка]

10.8. $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z^3}.$ [$z=\pi k$ $(k=\pm1,\pm2,...)$ - нули 2-го порядка]

10.9. $f(z)=ztgz.$

[$z=0$ - нуль 2-го порядка, $z=\pi k$ $(k=\pm1,\pm2,...)$ - нули 1-го порядка]

10.10. $f(z)=\dfrac{sh^2 z}{z}.$ [$z=\pi ki$ $(k=\pm1,\pm2,...)$— нули 2-го порядка]

11. Определить тип изолированной особой точки $z=0$ функции $f(z)$.

11.1. $f(z)=z\sin\left(\dfrac{2}{z^3}\right).$ [Существенно особая]

11.2. $f(z)=\dfrac{(1-\cos z)}{z^2}.$ [Устранимая]

11.3. $f(z)=z^2\cos\dfrac{1}{z^2}.$ [Существенно особая]

11.4. $f(z)=\dfrac{(e^z-1)}{z^3}.$ [Полюс 2-го пор]

11.5. $f(z)=ze^{\frac{1}{z}}.$ [Существенно особая]

11.6. $f(z)=\dfrac{(\sin z-z)}{z^3}$. [Устранимая]

11.7. $f(z)=\dfrac{\left(\cos-1+\dfrac{z^2}{2}\right)}{z^5}$. [Полюс 1-го порядка]

11.8. $f(z)=\dfrac{\left(e^{2z}-1-2z\right)}{z^4}$. [Полюс 2-го порядка]

11.9. $f(z)=\dfrac{e^{\frac{2}{z^2}}}{z^3}$. [Существенно особая]

11.10. $f(z)=\dfrac{\left(\cos\left(\dfrac{1}{z}\right)-1\right)}{z^2}$. [Существенно особая]

12. Найти особые точки функции $f(z)$ и определить их тип.

12.1. $f(z)=\dfrac{\sin z}{e^z-1-\dfrac{z^2}{2}}$. [$z=0$ - полюс 2-го порядка]

12.2. $f(z)=\dfrac{(1-\cos z)}{\sin^2 z}$. [$z=\pi k$ $(k=0,\pm1,\ldots)$ - устранимые]

12.3. $f(z)=\dfrac{\sin \pi z}{\left(z^4-1\right)}$.

[$z=\pm1$ - устранимые; $z=\pm i$ - полюса 1-го порядка]

12.4. $f(z)=\dfrac{(\cos z-1)}{\left(z^3-\pi z^2\right)}$.

[$z=0$ - устранимая; $z=\pi$ - полюс 1-го порядка]

12.5. $f(z)=\dfrac{\sin \pi z}{\left(z^6+2z^5+z^4\right)}$.

[$z=0$ - полюс 3-го порядка; $z=-1$ - полюс 1-го порядка]

12.6. $f(z)=\dfrac{z}{\left(e^z-1\right)}$.

[$z=0$ - устранимая; $z=\pi ki$ $(k=\pm1,\pm2,\ldots)$– полюса 1-го порядка]

12.7. $f(z)=\dfrac{z\sin z}{\left(z^2+\pi z\right)^2}$.

[$z=0$ - устранимая; $z=-\pi$ - полюс 1-го порядка]

12.8. $f(z)=\dfrac{1}{z^4}+\dfrac{z}{\sin z}$.

[$z=0$ - полюс 4-го порядка; $z=\pi ki$ $(k=\pm1,\pm2,...)$ - полюса 1-го порядка]

12.9. $f(z)=\dfrac{\cos z}{\left(z^3-\dfrac{\pi z^2}{2}\right)}$.

[$z=0$ - полюс 2-го порядка; $z=\dfrac{\pi}{2}$ - устранимая]

12.10. $f(z)=\dfrac{tgz}{(2z-\pi)}$.

[$z=0$ - устранимая; $z=\dfrac{\pi}{2}$ – полюс 2-го порядка;

$z=\dfrac{\pi}{2}=\pi k$ $(k=\pm1,\pm2,...)$– полюса 1-го порядка]

6. ВЫЧЕТЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

6.1. Вычет аналитической функции в особой точке

Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D за исключением точки a. Разложим $f(z)$ в окрестности этой точки в ряд Лорана:

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k(z-a)^k=...+\frac{C_{-n}}{(z-a)^n}+\frac{C_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}}+...\frac{C_{-1}}{z-a}+C_0+C_1(z-a)+C_2(z-a)^2+... \tag{6.1}$$

Определение 1. Коэффициент C_{-1} **называется вычетом функции** $f(z)$ **в точке** a и обозначается $\operatorname*{res}_{a} f(z)$. Если γ – произвольный кусочно-гладкий замкнутый контур, расположенный в области D и содержащий внутри себя точку a, то, согласно общей формуле для коэффициентов ряда Лорана, получаем другое, эквивалентное, определение вычета:

$$\operatorname*{res}_{a} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(t)dt=C_{-1}. \tag{6.2}$$

6.2. Вычет в устранимой особой точке

Вычет в устранимой особой точке равен нулю.

Это следует из определения устранимой особой точки: главная часть ряда Лорана отсутствует, все коэффициенты с отрицательными индексами равны нулю, $C_{-1}=0$.

6.3. Вычеты в полюсах

Теорема 1. Если a – простой полюс функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=\lim_{z\to a}\big[(z-a)f(z)\big]. \tag{6.3}$$

Доказательство. Простой полюс – полюс первого порядка, поэтому разложение в ряд Лорана начинается с минус первой степени:

$$f(z)=\frac{C_{-1}}{z-a}+C_0+C_1(z-a)+C_1(z-a)^2+\dots .$$

Тогда

$$(z-a)f(z)=C_{-1}+C_0(z-a)+C_1(z-a)^2+C_2(z-a)^3+\dots.\text{ и}$$

$$\operatorname*{res}_a f(z)=C_{-1}=\lim_{z\to a}\left[(z-a)f(z)\right].$$

Теорема 2. Пусть $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ – аналитические в окрестности точки a функции. Если a – простой нуль функции $\psi(z)$, и $\varphi(a)\neq 0$, то $\operatorname*{res}_a f(z)=\dfrac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$. (6.4)

Доказательство. Если a – простой нуль функции $\psi(z)$, и $\varphi(a)\neq 0$, то a – простой полюс функции $\operatorname*{res}_a f(z)=\dfrac{\varphi(a)}{\psi(a)}$. Тогда, по предыдущему утверждению,

$$\operatorname*{res}_a f(z)=\lim_{z\to a}\left[(z-a)f(z)\right]=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{\lim\limits_{z\to a}\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}}{z-a}=\frac{\lim\limits_{z\to a}\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)-\psi(a)}}{z-a}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{z\to a}\varphi(z)}{\lim\limits_{z\to a}\dfrac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Теорема 3. Если a – полюс функции $f(z)$ n-го порядка, то $\operatorname*{res}_a f(z)=\dfrac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to a}\left[\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}((z-a)^n f(z))\right]$. (6.5)

Доказательство. Так как точка $z=a$ – полюс n-го порядка функции $f(z)$, то

$$f(z)=\sum_{k=-n}^{\infty}C_k(z-a)^k=\frac{C_{-n}}{(z-a)^n}+\frac{C_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}}+\dots+C_0+C_1(z-a)+C_2(z-a)^2+\dots,$$

$C_{-n}\neq 0$.

Для того, чтобы удалить особенность в точке a, умножим $f(z)$ на $(z-a)^n$:

$$(z-a)^n f(z)=C_{-n}+C_{-n+1}(z-a)+\dots+C_{-1}(z-a)^{n-1}+C_0(z-a)^n+C_1(z-a)^{n+1}+\dots.$$

Теперь, чтобы убрать первые члены этой формулы и добраться до C_{-1}, дифференцируем это произведение $n-1$ раз:

$$\frac{d}{dz}((z-a)^n f(z)) = C_{-n+1} + 2C_{-n+2}(z-a) + \ldots + (n-1)C_{-1}(z-a)^{n-2} + nC_0(z-a)^{n-1} +$$
$$+(n+1)C_1(z-a)^n + \ldots,$$
$$\frac{d^2}{dz^2}((z-a)^n f(z)) = 2C_{-n+2} + 3\cdot 2C_{-n+3}(z-a) + \ldots + (n-1)(n-2)C_{-1}(z-a)^{n-3} +$$
$$+n(n-1)C_0(z-a)^{n-2} + \ldots,$$
$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}((z-a)^n f(z)) = (n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot C_{-1} + n(n-1)\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot C_0(z-a) + \ldots =$$
$$= (n-1)!C_{-1} + n!C_0(z-a) + \ldots,$$
$$\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}((z-a)^n f(z)) = (n-1)!C_{-1},$$

откуда и следует доказываемая формула.

Вычет в существенно особой точке находится из разложения функции в ряд Лорана.

Пример 1. Для функции $f(z) = \dfrac{(1-\cos z)^2}{z^4}$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

Решение. Эта функция имеет единственную особую точку – $z = 0$. Функция $1-\cos z$ при $z \to 0$ – бесконечно малая второго порядка, $(1-\cos z)^2$ – четвертого, поэтому можно предположить, что существует конечный $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$, т.е. $z = 0$ – устранимая особая точка. Доказываем строго:

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{(1-\cos z)^2}{z^4} = \lim_{z\to 0}\frac{\left(\dfrac{z^2}{2}\right)^2}{z^4} = \frac{1}{4} \Rightarrow z = 0$$ – устранимая особая точка.

Можно решить эту задачу по-другому. Так как

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},$$ то

$$(1-\cos z)^2 = \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} z^{2n}}{(2n)!}\right)^2 = z^4\left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} z^{2n-2}}{(2n)!}\right)^2,$$ то

$$f(z)=\left(\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}z^{2n-2}}{(2n)!}+\ldots\right)^2.$$

Понятно, что разложение этой функции по степеням z не будет содержать членов с отрицательными степенями, т.е. $z=0$ – устранимая особая точка.

Пример 2. Для функции $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z-2}}$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

Решение. Особая точка: $z=2$. Разлагаем функцию в ряд по степеням $z-2$.

$$z^2=\big((z-2)+2\big)^2=(z-2)^2+4(z-2)+4.$$

$$e^{\frac{1}{z-2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\cdot(z-2)^n}=1+\frac{1}{z-2}+\frac{1}{2!\cdot(z-2)^2}+\frac{1}{3!\cdot(z-2)^3}+\ldots+\frac{1}{n!\cdot(z-2)^n}+\ldots.$$

$$f(z)=z^2e^{\frac{1}{z-2}}=\big((z-2)^2+4(z-2)+4\big)\cdot\Bigg(\ 1+\frac{1}{z-2}+\frac{1}{2!(z-2)^2}+\frac{1}{3!(z-2)^3}+$$

$$+\frac{1}{4!(z-2)^4}+\ldots+\frac{1}{n!(z-2)^n}+\ldots\ \Bigg)=(z-2)^2+(1+4)(z-2)+\left(\frac{1}{2}+4+4\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{3!}+\frac{4}{2!}+4\right)\cdot\frac{1}{z-2}+\left(\frac{1}{4!}+\frac{4}{3!}+\frac{4}{2!}\right)\cdot\frac{1}{(z-2)^2}+\left(\frac{1}{5!}+\frac{4}{4!}+\frac{4}{3!}\right)\cdot\frac{1}{(z-2)^3}+\ldots.$$

Разложение содержит бесконечное количество слагаемых с отрицательными степенями $z-2$, следовательно, $z-2$ – существенно особая точка.

$$\operatorname*{res}_{2} f(z)=C_{-1}=\frac{1}{3!}+\frac{4}{2!}+4=\frac{37}{7}.$$

Пример 3. Для функции $f(z)=\mathrm{ctg}z$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

Решение. Особые точки – те, в которых $\sin z=0$: $a_k=k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$.

Эти точки являются простыми нулями знаменателя, так как

$$(\sin z)'\Big|_{z=a_k}=\cos z\Big|_{z=a_k}=\pm1\neq 0.$$

Числитель $\cos a_k \neq 0$, поэтому точки a_k – простые полюса. Вычеты находим по формуле $\operatorname*{res}_{a} f(z) = \dfrac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$:

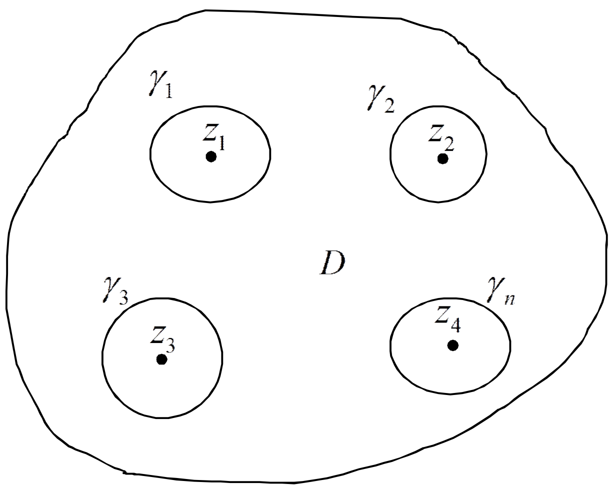
$$\operatorname*{res}_{a_k} \operatorname{ctg} z = \frac{\cos a_k}{(\sin z)'\big|_{z=a_k}} = \frac{\cos a_k}{\cos a_k} = 1.$$

6.4. Основная теорема о вычетах

Теорема 4. Пусть функция $f(z)$ аналитична во всех точках ограниченной замкнутой области $\overline{D}$, границей которой является контур L, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, z_3, ..., z_n$, расположенных внутри L.

Тогда $\oint\limits_L f(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z)$. (6.6)

Доказательство. Окружим каждую особою точку z_k, $k = 1, 2, ..., n$ контуром $\gamma_k = \{z : |z - z_k| = \rho_k\}$ таким, чтобы все контуры лежали в области D и не пересекались. В области, ограниченной контурами L, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_n$, функция аналитична, поэтому по теореме Коши для многосвязной области



$$\oint\limits_L f(z)dz = \oint\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \oint\limits_{\gamma_2} f(z)dz + ... + \oint\limits_{\gamma_n} f(z)dz.$$

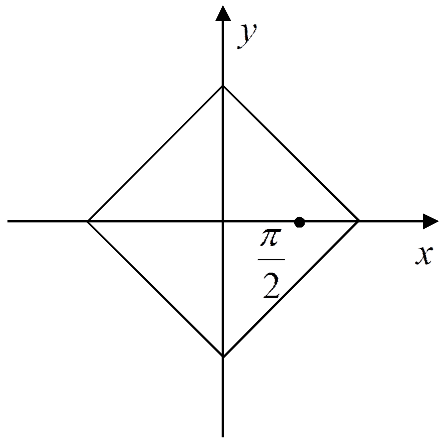
Из определения вычета следует

$$\oint\limits_L f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z_1} f(z) + 2\pi i \operatorname*{res}_{z_2} f(z) + ... + 2\pi i \operatorname*{res}_{z_n} f(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z),$$

что и требовалось доказать.

Пример 1. Вычислить $\oint\limits_L \dfrac{\cos z}{z\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right)}dz$, где L – квадрат $|x|+|y|=2$.

Обе особые точки подынтегральной функции: $z_1=0$ и $z_2=\dfrac{\pi}{2}$ расположены внутри контура L, поэтому



$$\oint\limits_L \frac{\cos z}{z\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right)}dz = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z_1} f(z)+\operatorname*{res}_{z_2} f(z)\right).$$

Точка $z_1=0$ – полюс первого порядка,

$$\operatorname*{res}_{z_1} f(z)=\lim_{z\to 0}(z\cdot f(z))=\lim_{z\to 0}\left(\frac{\cos z}{\pi/2-z}\right)=\frac{2}{\pi}.$$

Точка $z_2=\dfrac{\pi}{2}$ – нуль первого порядка и для числителя, и для знаменателя; докажем, что это – устранимая особая точка подынтегральной функции. Пусть $t=\dfrac{\pi}{2}-z$, тогда $\cos z=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)=\sin t$, и $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{(\pi/2-t)t}=\dfrac{2}{\pi}$, конечный предел существует, поэтому, действительно, это – устранимая особая точка, и $\operatorname*{res}\limits_{z_2} f(z)=0$. По основной теореме о вычетах $\oint\limits_{L_z} \dfrac{\cos z}{z\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right)}dz = 2\pi i\left(\dfrac{2}{\pi}+0\right)=4i\cdot$

Пример 2. Вычислить $\oint\limits_{|z|=3} z^2\cdot e^{\frac{1}{z-2}}dz$.

Точка $z=2$ – существенно особая точка подынтегральной функции, и, используя разложение по степеням $z-2$ из примера 2 п.6.4, имеем

$$\operatorname*{res}_{2} f(z)=C_{-1}=\frac{1}{3!}+\frac{4}{2!}+4=\frac{37}{6}, \text{ поэтому}$$

$$\oint\limits_{|z|=3} z^2\cdot e^{\frac{1}{z-2}}dz=2\pi i\frac{37}{6}=\frac{37}{3}\pi i.$$

Пример 3. Вычислить $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\operatorname{sh} z}{(z^2+1)(z+i)(z-5i)} dz$.

Здесь подынтегральная функция

$$f(z) = \frac{\operatorname{sh} z}{(z^2+1)(z+i)(z-5i)} = \frac{\operatorname{sh} z}{(z-i)(z+i)^2(z-5i)}$$

имеет две особых точки, расположенных в области, находящейся внутри контура: $z_1 = i$ (простой полюс) и $z_2 = -i$ (полюс второго порядка).

$$\operatorname*{res}_i f(z) = \lim_{z\to i}((z-i)f(z)) = \left.\left(\frac{\operatorname{sh} z}{(z+i)^2(z-5i)}\right)\right|_{z=i} =$$

$$= \frac{\operatorname{sh} i}{(2i)^2(-4i)} = \frac{e^i - e^{-i}}{32i} = \frac{1}{16}\sin 1;$$

$$\operatorname*{res}_{-i} f(z) = \lim_{z\to -i}\left((z+i)^2 f(z)\right)' = \left.\left(\frac{\operatorname{sh} z}{(z-i)(z-5i)}\right)'\right|_{z=-i} =$$

$$= \left.\left(\frac{c\operatorname{h} z(z-i)(z-5i) - \operatorname{sh} z(2z-6i)}{(z-i)^2(z-5i)^2}\right)\right|_{z=-i} = \left(\frac{c\operatorname{h}(-i)(-2i)(-6i) - \operatorname{sh}(-i)(-8i)}{(-2i)^2(-6i)^2}\right) =$$

$$= \frac{-12\operatorname{ch} i - 8i\operatorname{sh} i}{144} = \frac{2\sin 1 - 3\cos 1}{36};$$

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{\operatorname{sh} z}{(z^2+1)(z+i)(z-5i)} dz = 2\pi i\left(\frac{\sin 1}{16} + \frac{2\sin 1 - 3\cos 1}{36}\right) = \pi i\left(\frac{17\sin 1}{72} - \frac{\cos 1}{6}\right).$$

6.5. Бесконечно удалённая особая точка

Будем считать точку $z = \infty$ особой точкой любой аналитической функции. Мы определили окрестности этой точки как внешности кругов с центром в начале координат: $U(\infty, \varepsilon) = \{z \in \overline{C} \,\|\, z| > \varepsilon\}$. Точка $z = \infty$ является изолированной особой точкой аналитической функции $w = f(z)$, если в некоторой окрестности этой точки нет других особых точек этой функции. Для определения типа этой особой точки сделаем замену переменной $z_1 = \frac{1}{z}$, при этом точка $z = \infty$ переходит в точку $z_1 = 0$, функция $w=f(z)$ примет вид $w=f\left(\frac{1}{z_1}\right)=\varphi(z_1)$. Типом особой точки $z=\infty$ функции $w=f(z)$ будем называть тип особой точки $z_1=0$ функции $w=f(z_1)$. Если разложение функции $w=f(z)$ по степеням z в окрестности точки $z=\infty$, т.е. при достаточно больших по модулю значениях z , имеет вид $f(z)=\ldots+\frac{C_{-n}}{z^n}+\frac{C_{-n+1}}{z^{n-1}}+\ldots+\frac{C_{-1}}{z}+C_0+C_1z+\ldots+C_nz^n+\ldots$, то, заменив z на $\frac{1}{z_1}$, получим

$$\varphi(z_1)=\ldots+C_{-n}z_1^n+C_{-n+1}z_1^{n-1}+\ldots+C_{-1}z_1+C_0+\frac{C_1}{z_1}+\ldots+\frac{C_n}{z_1^n}+\ldots.$$

Таким образом, при такой замене переменной главная и правильная части ряда Лорана меняются местами, и тип особой точки $z=\infty$ определяется количеством слагаемых в правильной части разложения функции в ряд Лорана по степеням z в окрестности точки $z=0$. Поэтому:

1. Точка $z=\infty$ – устранимая особая точка, если в этом разложении правильная часть отсутствует (за исключением, возможно, члена C_0);

2. Точка $z=\infty$ – полюс *n*-го порядка, если правильная часть заканчивается слагаемым C_nz^n;

3. Точка $z=\infty$ – существенно особая точка, если правильная часть содержит бесконечно много членов.

При этом остаются справедливыми признаки типов особых точек по значению $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$: если $z=\infty$ – устранимая особая точка, то этот предел существует и конечен, если $z=\infty$ – полюс, то этот предел бесконечен, если $z=\infty$ – существенно особая точка, то этот предел не существует (ни конечный, ни бесконечный).

Пример 1. Определить тип бесконечно удаленной особой точки $f(z)=-5+3z^2-z^6$.

Функция уже является многочленом по степеням z, старшая степень – шестая, поэтому $z=\infty$ – полюс шестого порядка.

Этот же результат можно получить по-другому. Заменим z на $z_1 = \dfrac{1}{z}$, тогда $f(z) = -5 + \dfrac{3}{z_1^2} - \dfrac{1}{z_1^6} = \dfrac{-1 + 3z_1^4 + 5z_1^6}{z_1^6} = \varphi(z_1)$.

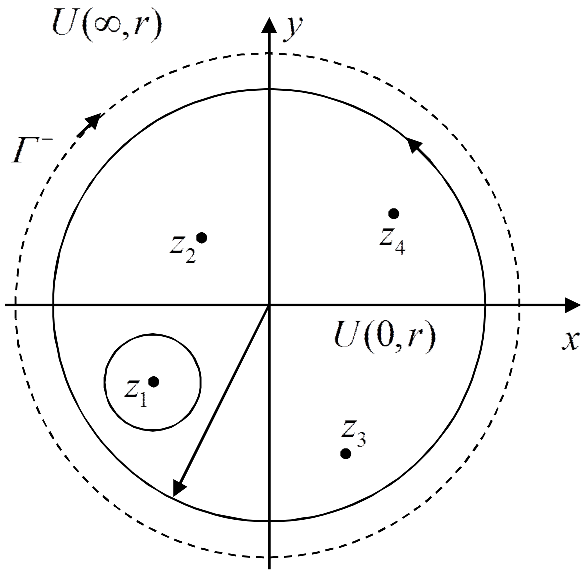
Для функции $\varphi(z_1)$ точка $z_1 = 0$ – полюс шестого порядка, поэтому для $f(z)$ точка $z = \infty$ – полюс шестого порядка.

Пример 2. Определить тип бесконечно удаленной особой точки $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$.

Для этой функции получить разложение по степеням z затруднительно, поэтому найдём $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$: $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = e^{\lim\limits_{z\to 1}\frac{1}{z-1}} = e^0 = 1$; предел существует и конечен, поэтому точка $z = \infty$ – устранимая особая точка.

6.6. Вычет функции в бесконечно удалённой особой точке

Для конечной особой точки a $\operatorname*{res}\limits_a f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_\gamma f(t)dt$, где γ – контур, не содержащий других, кроме a, особых точек, проходимый так, что область, им ограниченная и содержащая особую точку, остаётся слева (против часовой стрелки). Определим $\operatorname*{res}\limits_\infty f(z)$ аналогичным образом:



$$\operatorname*{res}\limits_\infty f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma^-} f(t)dt,$$

(6.7) где Γ^- – контур, ограничивающий такую окрестность $U(\infty, r)$ точки $z = \infty$, которая не содержит других особых точек, и проходимый так, что эта окрестность остаётся слева (т.е. по часовой стрелке). Таким образом, все остальные (конечные) особые точки функции должны находиться внутри контура Γ^-.

Изменим направление обхода контура Γ^-: $\oint\limits_{\Gamma^-} f(z)\,dz = -\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$. По основной теореме о вычетах $\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i\sum\limits_{j=1}^{k}\operatorname{res}\limits_{z_j} f(z)$, где суммирование ведётся по всем конечным особым точкам. Поэтому, окончательно, $\operatorname{res} f(z) = -\sum\limits_{j=1}^{k}\operatorname{res}\limits_{zj} f(z)$, т.е. **вычет в бесконечно удалённой особой точке равен сумме вычетов по всем конечным особым точкам, взятой с противоположным знаком**. Как следствие, имеет место **теорема о полной сумме вычетов**: если функция $w = f(x)$ аналитична всюду в плоскости C, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, z_3, ..., z_n$, то сумма вычетов во всех конечных особых точках и вычета в бесконечности равна нулю.

Отметим, что если $z = \infty$ – устранимая особая точка, то вычет в ней может быть отличен от нуля. Так для функции $f(z) = \frac{1}{z}$, очевидно, $\operatorname{res}\limits_{0} f(z) = 1$; $z = 0$ – единственная конечная особая точка этой функции, поэтому $\operatorname{res}\limits_{\infty} f(z) = -\operatorname{res}\limits_{0} f(z) = -1$, несмотря на то, что $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$, т.е. $z = \infty$ – устранимая особая точка.

6.7. Практическое занятие 6

Пример 1. Вычислить вычет функции $\frac{z^2}{z-2}$ относительно точки $z = 2$.

Решение. Точка $z = 2$ является простым полюсом функции $\frac{z^2}{z-2}$. Следовательно, в соответствии $\operatorname{res}\limits_{a} f(z) = \lim\limits_{z\to a}\left[(z-a) f(z)\right]$ имеем:

$$\operatorname{res}\left[\frac{z^2}{z-2}; 2\right] = \lim_{z\to 2}\left[(z-2)\frac{z^2}{z-2}\right] = 4.$$

Пример 2. Вычислить вычет функции $\frac{1}{\sin z}$ относительно точки $z = 0$.

Решение. Точка $z = 0$ является простым полюсом функции $\frac{1}{\sin z}$, так как для функции $\sin z$ эта точка является простым нулем. Следовательно:

$$\operatorname{res}\left[\frac{1}{\sin z}; 0\right] = \lim_{z\to 0}\left[z\frac{1}{\sin z}\right] = 1.$$

Пример 3. Найти вычет функции $f(z) = \frac{e^z}{(z+3)(z-1)^3}$ в ее изолированных особых точках.

Решение.

а). Точка $z = -3$ – полюс первого порядка, поэтому по формуле

$$\operatorname{res}[f(z); z_0] = \lim_{z\to z_0}\left[(z - z_0) f(z)\right] \text{ имеем}$$

$$\operatorname{res}[f(z); -3] = \lim_{z\to -3}\frac{e^z}{(z+3)(z-1)^3}(z+3) = \lim_{z\to -3}\frac{e^z}{(z-1)^3} = -\frac{1}{64}e^{-3}.$$

б). Точка $z = 1$ – полюс первого порядка, поэтому по формуле

$$\operatorname{res}[f(z); z_0] = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}((z - z_0)^n f(z))\right] \text{ имеем}$$

$$\operatorname{res}[f(z); 1] = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\left[\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^z(z-1)^3}{(z-1)^3(z+3)}\right)\right] = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^z(z+2)}{(z+3)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\frac{e^z(z^2+4z+5)}{(z+3)^3} = \frac{5e}{64}.$$

Пример 4. Найти вычет функции $f(z) = e^{\frac{1}{z-2}}$ в ее изолированных особых точках.

Решение. $z = 2$ – единственная особая точка функции $f(z)$. Разложим $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = 2$:

$$f(z) = e^{\frac{1}{z-2}} = 1 + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2!(z-2)^2} + \frac{1}{3!(z-2)^3} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z-2)^n}.$$

Поскольку главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов, $z=2$ – существенно особая точка функции $f(z)$. По формуле имеем:

$$\operatorname{res}[f(z);2]=C_{-1}=1.$$

Пример 5. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки, провести их классификацию, вычислить вычеты относительно найденных точек.

а) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^3}+\dfrac{2}{z}$;

б) $f(z)=\dfrac{1-\cos 6z}{z^2}$;

в) $f(z)=(z-i)^3\sin\dfrac{1}{2(z-i)}$.

Решение.

а). Особой точкой функции является точка $z_0=0$. Чтобы определить вид особой точки, разложим функцию в ряд Лорана по степеням z:

$$f(z)=\frac{e^z-1}{z^3}+\frac{2}{z}=\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots\right)\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^3}+\frac{2}{z}=$$

$$=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{1!z^2}+\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!}+\frac{z}{4!}+\ldots+\frac{z^{n-3}}{n!}+\ldots-\frac{1}{z^3}+\frac{2}{z}=$$

$$=\frac{1}{1!z^2}+\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!}+\frac{z}{4!}+\ldots+\frac{z^{n-3}}{n!}+\ldots+\frac{2}{z}=\underbrace{\frac{5}{2z}+\frac{1}{1!z^2}}_{\text{главная часть}}+\underbrace{\frac{1}{3!}+\frac{z}{4!}+\ldots+\frac{z^{n-3}}{n!}+\ldots}_{\text{правильная часть}}$$

Главная часть ряда Лорана содержит конечное число слагаемых, значит $z_0=0$ – полюс. Порядок высшей отрицательной степени $(n=2)$ определяет порядок полюса. Следовательно, $z_0=0$ – полюс кратности 2. Вычет найдем, используя формулу $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)=C_{-1}$, тогда $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z)=\dfrac{5}{2}$.

б). Особой точкой функции является точка $z_0=0$. Чтобы определить вид особой точки, используем признак поведения функции в особой точке.

$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1-\cos 6z}{z^2}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{2\sin^2 3z}{z^2}=18$, значит $z_0=0$ устранимая точка и, следовательно $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z)=0$.

в). Особой точкой функции является точка $z_0=i$. Чтобы определить вид особой точки используем разложение функции в ряд Лорана по степеням $z-i$:

$$f(z)=(z-i)^3\sin\frac{1}{2(z-i)}=$$

$$=(z-i)^3\left(\frac{1}{2(z-i)}-\frac{1}{3!(2(z-i))^3}+\frac{1}{5!(2(z-i))^5}-\ldots\right.$$

$$\left.+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!(2(z-i))^{2n+1}}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{(z-i)^2}{2}-\frac{1}{2^3 3!}+\underbrace{\frac{1}{5!2^5(z-i)^2}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!2^{2n+1}(z-i)^{2n-2}}+\ldots}_{\text{главная часть}}.$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых, значит $z_0=i$ – существенно особая точка. Тогда $\operatorname*{Res}\limits_{z=i} f(z)=C_{-1}=0$, т.к. коэффициент при $\dfrac{1}{z-i}$ равен нулю.

Пример 6. Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах:

а) $\displaystyle\oint\limits_{|z+1|=2}\frac{\sin z\,dz}{z(z+1)^3}$;

б) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2\pi}\frac{z\cos z\,dz}{z^2-\pi^2}$.

Решение.

а). Подынтегральная функция имеет внутри контура интегрирования две особые точки $z=0$ и $z=-1$. Тогда $\displaystyle\oint\limits_L\frac{\sin z\,dz}{z(z+1)^3}=2\pi i\left(\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z)+\operatorname*{Res}\limits_{z=-1} f(z)\right)$.

Определим вид особых точек и найдем в них вычеты.

$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z(z+1)^3}=1$, следовательно $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z)=0$.

$\lim\limits_{z\to -1}\dfrac{\sin z}{z(z+1)^3}=\infty$, следовательно $z=-1$ – полюс.

Так как $\lim\limits_{z\to -1}\dfrac{\sin z}{z(z+1)^3}(z+1)^3=1$, то $z=-1$ – полюс порядка $n=3$.

$$\operatorname*{Res}\limits_{z=-1} f(z)=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to -1}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z+1)^3\frac{\sin z}{z(z+1)^3}\right]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\left[\frac{\sin z}{z}\right]''=$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\left[\frac{z\cdot\cos z-\sin z}{z^2}\right]'=$$

$$\frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\left[\frac{z^2(\cos z-z\sin z-\cos z)-2z(z\cdot\cos z-\sin z)}{z^4}\right]=$$

$$=-\frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\left[\frac{z^2\cdot\sin z+2z\cos z-2\sin z}{z^3}\right]=\frac{\sin 1-2\cos 1}{2}.$$

Таким образом, $\oint\limits_L\dfrac{\sin z\,dz}{z(z+1)^3}=2\pi i\left(\dfrac{\sin 1-2\cos 1}{2}\right)=\pi i(\sin 1-2\cos 1)$.

б). Подынтегральная функция имеет внутри контура интегрирования две особые точки $z=\pi$ и $z=-\pi$. Тогда $\oint\limits_L\dfrac{z\cos z\,dz}{z^2-\pi^2}=2\pi i\left(\operatorname*{Res}\limits_{z=\pi} f(z)+\operatorname*{Res}\limits_{z=-\pi} f(z)\right)$.

Так как $z=\pi$ и $z=-\pi$ – полюсы первого порядка, то для вычисления вычетов применим формулу $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)=\dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$, где $\varphi(z)=z\cos z$, $\psi(z)=z^2-\pi^2$, $\psi'(z)=2z$.

$$\operatorname*{Res}\limits_{z=\pi} f(z)=\left.\frac{z\cos z}{2z}\right|_{z=\pi}=-\frac{1}{2},\quad \operatorname*{Res}\limits_{z=-\pi} f(z)=\left.\frac{z\cos z}{2z}\right|_{z=-\pi}=-\frac{1}{2}.$$

Таким образом, $\oint\limits_L\dfrac{z\cos z\,dz}{z^2-\pi^2}=2\pi i\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\right)=-2\pi i$.

Пример 7. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=2}\dfrac{e^z dz}{z(z-1)}$ с помощью вычетов.

Решение. В области $|z|<2$ функция $f(z)=\dfrac{e^z}{z(z-1)}$ аналитическая всюду, кроме точек $z=0$, $z=1$. В соответствии с теоремой о вычетах

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{z(z-1)}dz=2\pi i(\mathrm{Res}[f(z);0]+\mathrm{Res}[f(z);1]).$$

Точки $z=0$, $z=1$ – полюсы первого порядка. Поэтому

$$\mathrm{Res}\,[f(z);0]=\lim_{z\to 0}\left[\frac{e^z}{z(z-1)}\cdot z\right]=-1.$$

$$\mathrm{Res}\,[f(z);1]=\lim_{z\to 1}\left[\frac{e^z}{z(z-1)}\cdot (z-1)\right]=e.$$

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{e^z dz}{z(z-1)}=2\pi i(e-1).$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=1}\dfrac{\mathrm{ctg}z}{4z-\pi}dz$ с помощью вычетов.

Решение. Подинтегральную функцию $f(z)=\dfrac{\mathrm{ctg}z}{4z-\pi}$ запишем в виде:

$$f(z)=\frac{\cos z}{(4z-\pi)\sin z}.$$

Найдем особые точки. Знаменатель данной функции $(4z-\pi)\sin z$ обращается в ноль в точках $z_1=\dfrac{\pi}{4}$, $z_2=\pi n$, $(n=\pm 1,\pm 2,...)$. Эти особые точки будут простыми полюсами, так как $z_1=\dfrac{\pi}{4}$, $\mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{4}=1$, а для $z_2=\pi n, \sin\pi n=0$, но для $(\sin z)'\big|_{z=\pi n}=\cos\pi n\neq 0$.

Внутри области $|Z|=1$ будет два полюса первого порядка. Тогда по теореме Коши имеем:

$$\int\limits_L\frac{\mathrm{ctg}z}{4z\text{ - }\pi}dz=2\pi i\left(\mathop{\mathrm{Res}}_{Z_1=\frac{\pi}{4}}f(z)+\mathop{\mathrm{Res}}_{Z_2=0}f(z)\right).$$

$$\mathop{\mathrm{Res}}_{Z_1=\frac{\pi}{4}}f(z)=\frac{\mathrm{ctg}z}{(4z-\pi)'}\bigg|_{Z=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4}.$$

$$\operatorname*{Res}_{Z_2=0} f(z) = \left.\frac{\dfrac{\cos z}{4z-\pi}}{(\sin z)'}\right|_{Z=0} = -\frac{1}{\pi}.$$

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{ctg}z}{4z-\pi}dz = 2\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi}\right).$$

6.8. Задания для самостоятельного решения

1. Найти вычеты функции $f(z)$ в ее изолированных особых точках.

1.1. $f(z) = z\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$. $\left[\ \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 0\ \right]$

1.2. $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^3}$. $\left[\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \dfrac{1}{2}\right]$

1.3. $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z^2}}$. $\left[\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \dfrac{1}{2}\right]$

1.4. $f(z) = \dfrac{z}{\sin z}$. $\left[\ \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 0; \operatorname*{res}_{z=\pi k} f(z) = (-1)^k \pi k\ (k = \pm 1, 2, ...\ \right]$

1.5. $f(z) = \mathrm{tg}^2 z$. $\left[\ \operatorname*{res}_{z=\pi(2k+1)} f(z) = 0\ (k = \pm 1, 2, ...\ \right]$

1.6. $f(z) = \dfrac{\sin(\pi z)}{(z+1)(z-2)^2}$. $\left[\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = 0; \operatorname*{res}_{z=2} f(z) = \dfrac{\pi}{3}\ \right]$

1.7. $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^2(z+1)}$. $\left[\ \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 1; \operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = e^{-1} - 1\ \right]$

1.8. $f(z) = \dfrac{z}{(z-2)^2(z+1)^3}$. $\left[\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = -\dfrac{1}{27}; \operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \dfrac{2}{27}\ \right]$

1.9. $f(z) = \dfrac{e^{\frac{2}{z^2}}}{z}$. $\left[\ \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 1\ \right]$

1.10. $f(z) = \dfrac{\sin z}{\left(z^3 - \dfrac{\pi z^2}{4}\right)}$. $\left[\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = -\dfrac{4}{\pi}; \operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{4}} f(z) = \sqrt{2}\right]$

2. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

2.1. $\oint\limits_{|z|=1} z^3 e^{\frac{1}{z}} dz$. $\left[\dfrac{\pi i}{12}\right]$

2.2. $\oint\limits_{|z-1|=1} \sin\left(1+\dfrac{1}{z}\right) dz$. $[2\pi i \cos 1]$

2.3. $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{dz}{z^2+1}$. $[0]$

2.4. $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \dfrac{\ln(1+z)}{z^3} dz$. $[-\pi i]$

2.5. $\oint\limits_{\left|z=\frac{\pi}{2}\right|} \operatorname{ctg} 2z dz$. $[3\pi i]$

2.6. $\oint\limits_{|z-3i|=3} \dfrac{z^5+8z}{z^4-16} dz$. $[-3\pi i]$

2.7. $\oint\limits_{|z+i|=1} \dfrac{e^z}{z \sin z} dz$. $[2\pi i]$

2.8. $\oint\limits_{|z-2|=3} \dfrac{\cos^2 z+1}{z^2-\pi^2} dz$. $[2i]$

2.9. $\oint\limits_{|z-2|=3} \dfrac{\cos^2 z+1}{(z-\pi)^2} dz$. $[0]$

2.10. $\oint\limits_{|z|=\frac{5}{2}} \dfrac{dz}{z^2(z-2)(z+3)^2}$. $\left[\dfrac{26\pi i}{675}\right]$

7. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

1. Вычислить, результат представить в алгебраической форме:

1). $(1+i)^{12}$ 2). $\left(\dfrac{1-2i}{1+2i}\right)^3$ 3). $\left(-0{,}5+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

4). $(\sqrt{3}-i)^{15}$ 5). $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}\right)^{100}$ 6). $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)^8$

7). $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{12}}\right)^{12}$ 8). $\sqrt{2-2i\sqrt{3}}$ 9). $(1+i)^{10}$ 10). $(1-i)^6$

Найти корни уравнения:

11). $z^6+1=0$ 12). $z^3-1=0$ 13). $z^3+8=0$

14). $z^4+1=0$ 15). $z^3+1=0$ 16). $z^3-8=0$

17). $z^3+27=0$ 18). $z^3-27=0$ 19). $z^4+16=0$

20). $z^4-16=0$

Найти модуль и аргумент комплексного числа:

21). $z=-1-\sqrt{3}i$ 22). $z=\dfrac{2\sqrt{2}}{1+i}$ 23). $z=\dfrac{2}{1-3i}$

24). $z=-1-i$ 25). $z=\sqrt{3}-i$ 26). $z=\dfrac{1-i}{1+i}$

27). $z=1+\sqrt{3}i$ 28). $z=\dfrac{3\sqrt{3}}{1+i}$

2. Установить множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих данным условиям:

1). $|z|-\operatorname{Im} z<1$ 2). $|z-2|+|z+2|=6$ 3). $|z-3-4i|>5$

4). $|z-2|+|z+2|=3$ 5). $0<\operatorname{Re}(2iz)<1$ 6). $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=1$

7). $\operatorname{Im}(z^2)=2$ 8). $2<|z-1+2i|<4$ 9). $|z-1|+|z-3|<3$

10). $-\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{2}$ 11). $|z-1-i|\geq 1, |z-1-i|\leq 3$

12). $\frac{\pi}{6}<\arg(z+2i)<\frac{\pi}{2}$ 13). $1<z\bar{z}<2; \operatorname{Re} z\leq 3$ 14). $|z-2|>1, 0\leq \operatorname{Re} z\leq 3$

15). $\operatorname{Re}(z^2)<4$ 16). $|z-i|+|z+i|<4$ 17). $|z-5|-|z+5|<6$

18). $1<|z-i|<2$ 19). $0<|z+i|<2$ 20). $\operatorname{Re}\left(\bar{z}^{\,2}\right)=1$

21). $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}$ 22). $z\bar{z}\leq 4$ 23). $|z+1|<1, |z-1|\leq 1$

24). $|z+i|<2, 0\leq \operatorname{Re} z\leq 1$ 25). $|z-i|\leq 4, 0<\operatorname{Im} z<4$

26). $|z+i|>1; |z|<2$ 27). $\operatorname{Re}(z^2)=a^2$ 28). $|z-i|=|z+2|$

3. Найти действительную и мнимую часть функции $\omega=f(z)$ комплексного переменного и выяснить, является ли она аналитической.

1). $\omega=z\operatorname{Im} z^2$ 2). $\omega=4z|\bar{z}|$ 3). $\omega=\frac{\bar{z}}{z}$

4). $\omega=z\operatorname{Re} z$ 5). $\omega=z^3+4z$ 6). $\omega=\operatorname{Re} z+2z$

7). $\omega=2z^2+3z+4$ 8). $\omega=\cos z$ 9). $\omega=z\operatorname{Re} z^2$

10). $\omega=\bar{z}^{2}$ 11). $\omega=z\operatorname{Im} z$ 12). $\omega=3z+4\bar{z}$

13). $\omega=z|z|$ 14). $\omega=3z^2+5z-1$ 15). $\omega=2iz+z^2$

16). $\omega=z\operatorname{Im} z^2$ 17). $\omega=\frac{1}{z}$ 18). $\omega=\cos 2z$

19). $\omega=z^3-4iz+1$ 20). $\omega=z^2\operatorname{Re}(z+1)$ 21). $\omega=e^{\bar{z}}$

22). $\omega=shz$ 23). $\omega=e^{4z}$ 24). $\omega=2z+|z|$

25). $\omega=z^2\operatorname{Im}(z-3)$ 26). $\omega=z\operatorname{Im}(z^2+1)$ 27). $\omega=chz$

28). $\omega=z\bar{z}+2i$ 29). $\omega=3\bar{z}+5z$ 30). $\omega=sh4z+2$

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z) = u + iv$ по известной ее действительной или мнимой части:

1). $v = 2x^2 - 2y^2 + x$	2). $u = x^3 - 3xy^2$
3). $u = 2e^x \sin y$	4). $v = x + y$
5). $v = 2xy + 3x$	6). $v = 2e^x \cos y$
7). $u = x^2 - y^2 + xy$	8). $u = x^2 - y^2 + 3x + y$
9). $u = x^2 - y^2 + 2x$	10). $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$
11). $v = 2xy + 3x$	12). $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - 2y$
13). $u = y - 2xy$	14). $v = x^2 - x - y^2$
15). $v = \sin x e^{-y}$	16). $u = 1 - e^x \sin y$
17). $v = y + e^{-y} \sin x$	18). $u = e^{-y} \cos x$
19). $v = 3x^2 y - y^3$	20). $v = 1 - \dfrac{y}{x^2 + y^2}$
21). $v = e^{-y} \sin x$	22). $u = x^2 - y^2 - 2x + 1$
23). $v = e^x \cos y$	24). $u = x^3 - 3y + 1$
25). $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + x$	26). $v = -\dfrac{y}{(x+1)^2 + y^2}$
27). $v = 3xy + y$	28). $u = e^{-y} \cos x + x$
29). $v = x^2 - y^2 + 2x + 1$	30). $u = x^2 - y^2$

5. Вычислить интеграл:

1). $\int (1+i-2\bar{z})dz$ по линии $y = x$, соединяющей т. $z_1 = 0,\ z_2 = 1+i$.

2). $\int (1+i-2\bar{z})dz$ по параболе $y = x^2$, соединяющей т. $z_1 = 0,\ z_2 = 1+i$.

3). $\int (1+i-2\bar{z})dz$ по ломаной z_1, z_2, z_3, где т. $z_1 = 0,\ z_2 = 1+i,\ z_3 = 1$.

4). $\int |z|dz$ по отрезку прямой, соединяющей т. $z_1 = 0,\ z_2 = 1+i$.

5). $\int\limits_C (3z^2+2z)dz$, где C – отрезок от т. $z_1 = -1+i$ до $z_2 = 1-i$.

6). $\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z\, dz}{z^2+9}$

7). $\int\limits_C \frac{e^z\, dz}{z(z-2i)}$, где C – круг радиусом 2

8). $\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^2+1}$

9). $\int\limits_{|z-i|\le\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^2+1}$

10). $\int\limits_{|z+i|\le\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^2+1}$

11). $\int\limits_{|z|\le 2} \frac{dz}{z^2+1}$

12). $\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(1-z)^3}$

13). $\int\limits_{|z|=} \frac{ze^z\, dz}{(z-i)^3}$

14). $\int\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{chzdz}{(z+2)^2(z+1)}$

15). $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z dz}{(z+i)^3}$

16). $\int\limits_{|z-2|=3} \frac{\cos^2 z-1}{z^2-\pi^2}dz$

17). $\int\limits_{|z|=1} \frac{2+\sin z}{z(z+3i)}dz$

18). $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z+2}{z(z-1)}$

19). $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{e^z(z+3)dz}{z(z+1)}$

20). $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z dz}{(z^2-1)^2}$

21). $\int\limits_{|z-2|=2} \frac{dz}{(z-2)^2(z+3)}$

22). $\int\limits_{|z|=3} \frac{e^{iz} dz}{(z-i)^4}$

23). $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z dz}{z^2+1}$

24). $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^{2z} dz}{(z+i)^2}$

25). $\int\limits_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{(z+2)dz}{(z-1)^2(z-2)}$

26). $\int\limits_{|z|=2} \frac{zdz}{z^2-4z+3}$

27). $\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^3+4z^2}$

28). $\int\limits_{|z|=4} \frac{dz}{z-z^3}$

29). $\int\limits_{|z|=3} \frac{e^z dz}{z^2+5z}$

30). $\int\limits_{|z|=2} \frac{3zdz}{z^2+4z+3}$

6. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

1). $\int\limits_{|z|<2} \frac{dz}{z^2+1}$ 2). $\int\limits_{|z-1|<3} ze^{\frac{1}{z-1}}dz$ 3). $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z(z-1)}$

4). $\oint\limits_{|z|=3} e^{\frac{1}{1-z}}dz$ 5). $\int\limits_{|z|=1} \frac{z^3 dz}{4z^2+1}$ 6). $\int\limits_{|z|=3} \frac{z}{(z-1)^2(z+2)}\,dz$

7). $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2-1}dz$ 8). $\int\limits_{|z|=3} z\sin\frac{1}{z^2}dz$ 9). $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z^2}{z^2-1}dz$

10). $\int\limits_{|z|=1} \frac{chz}{z^3}dz$. 11). $\int\limits_{|z|=4} \frac{zdz}{z^2-5z+6}$. 12). $\int\limits_{|z-i|=2} \frac{e^2 dz}{z^2(z^2+9)}$.

13). $\int\limits_{|z|=2} \frac{\cos z^2-1}{z^3}dz$. 14). $\int\limits_{|z|=2} \sin\frac{2}{z-2}$. 15). $\int\limits_{|z|=3} z\sin\frac{1}{z-2}dz$.

16). $\int\limits_{|z-i|=2\pi} \frac{dz}{1-e^z}$. 17). $\int\limits_{|z|=3} \frac{dz}{z^5-z^3}$. 18). $\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos zdz}{z^2(z-2)}$.

19). $\int\limits_{|z|=2} \cos\frac{\pi}{z+1}dz$. 20). $\int\limits_{|z|=1} \frac{e^{z^2}-1}{z^3}dz$. 21). $\int\limits_{|z|=2} \mathrm{tg}z dz$.

22). $\int\limits_{|z1|=4} \frac{z}{e^z+3}$. 23). $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^{\pi z}dz}{z-i}$. 24). $\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z^4-z^3}$.

25). $\int\limits_{|z|=1} z\cos\frac{1}{z^2}dz$. 26). $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin 2zdz}{(1+z)^4}$. 27). $\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z(z^2-1)}$.

28). $\int\limits_{|z|=2} z^5 e^{\frac{1}{z}}dz$. 29). $\int\limits_{|z|=2} \frac{zdz}{(z-1)^2(z+3)}$. 30). $\int\limits_{|z|=1} z^3 e^{\frac{2}{z^2}}dz$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алешков Ю. З. Теория функций комплексного переменного и ее приложения : уч. пособ. / Ю. З. Алешков, П. П. Смышляев. — Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1986. — 248 с.

2. Зимина О.В., Высшая математика. / О. В. Зимина, А. И. Кириллов, Т. А. Сальникова — 2-е изд., испр. — М. : Физико-математическая литература, 2001. — 368 с.

3. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. / А. И. Маркушевич. — М. : Наука, 1978.

4. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного. / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1973.

5. Сидоров Ю. В. Лекции по теории функций комплексного переменного. / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. — М. : Наука, 1976.

6. Краснов М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. / М. Л. Краснов, А. И. Киселёв, Г. И. Макаренко. — М. : Наука, 1981.

7. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. / И. И. Привалов. — М. : Наука, 1977.

8. Лунц Г. Л. Функции комплексного переменного с элементами операционного исчисления. / Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсголъц. — М. : Физматгиз, 1958. — 298 с.

9. Маркушевич А. И. Введение в теорию аналитических функций. / А. И. Маркушевич, Л. А. Маркушевич Л,А. — М. : Просвещение, 1977. 320 с.

10. Смирнов В. И. Курс высшей математики : в 5 т. ; Т. 3. 4.2. / В. И. Смирнов. — М. : Гостехиздат. 1974. — 688 с.

11. Фукс Б.А. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. / Б. А. Фукс, Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1964. — 255 с.

12. Цыркин М. Я. Краткий курс теории функций комплексного переменного : уч. пособ. / М. Я. Цыркин. — М. : Просвещение, 1964. — 255 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ
У ПРИКЛАДАХ ТА ЗАДАЧАХ

Навчальний посібник

(російською мовою)

В авторській редакції

Комп'ютерне верстання Н.Б. Трофімова
Художній дизайн обкладинки А. О. Дудка

Формат $60 \times 84^{1}/_{16.}$ Ум. друк. арк. 7,96.
Зам. № 626. Наклад 50 пр.

Видавець та виготовлювач:
Донбаський державний технічний університет
пр. Леніна, 16, м. Алчевськ, Луганська обл., 94204.
Видавництво «ЛАДО», ауд. 113-а, II корпус, т/факс: (06442) 2-58-59
Web-site: www.testlado.com.ua, E-mail: info.lado@mail.ru
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №2010 від 12.11.2004