Алчевск, 2018

Н.Н. Лепило

Теория игр

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ЛУГАНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНБАССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Н. Н. Лепило

ТЕОРИЯ ИГР

Учебное пособие

Рекомендовано Ученым советом ГОУ ВПО ЛНР «ДонГТУ»

Алчевск
2018

УДК 519.83
ББК 65.214
Л48

Лепило Наталья Николаевна — кандидат технических наук, доцент кафедры экономической кибернетики и информационных технологий ГОУ ВПО ЛНР «ДонГТУ».

Рецензенты:

В. В. Дьячкова — к.э.н., доцент кафедры экономической кибернетики и информационных технологий ГОУ ВПО ЛНР «ДонГТУ»;

И. С. Зайцев — к.э.н., доцент кафедры экономической кибернетики и информационных технологий ГОУ ВПО ЛНР «ДонГТУ»;

Н. В. Коваленко — д.э.н., профессор кафедры менеджмента Южно-Российского института управления — филиала РАНХиГС, г. Ростов-на-Дону, Россия.

Рекомендовано Ученым советом ГОУ ВПО ЛНР «ДонГТУ»
(Протокол № 10 от19.06.2018)

Лепило Н. Н.

Л48 Теория игр : учебное пособие / Н. Н. Лепило. — Алчевск : ГОУ ВПО ЛНР «ДонГТУ», 2018. — 132 с.

Учебное пособие подготовлено в соответствии с действующей программой дисциплины «Теория игр», охватывает такие темы: предмет и основные понятия теории игр, матричные игры двух игроков с нулевой суммой, статистические, кооперативные и позиционные игры, а также обобщение методов использования теории игр. Теоретический материал проиллюстрирован практическими примерами, что способствует лучшему усвоению студентом основных положений предмета. Все темы содержат контрольные вопросы и материалы для самоконтроля, по основным темам приведены задания на лабораторные работы с вариантами индивидуальных заданий.

Для студентов по направлению подготовки «Экономика» всех форм обучения.

УДК 519.83
ББК 65.214

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В условиях рыночных отношений в процессе экономической деятельности часто приходится принимать решения в условиях конкуренции, неопределенности и риска, что приводит к необходимости применения методов теории игр. Теория игр представляет собой раздел прикладной математики, который используется для принятия оптимальных решений в конфликтных ситуациях. Такие ситуации часто возникают в практической деятельности людей, когда имеется несколько заинтересованных сторон, каждая из которых старается получить максимальный выигрыш. При этом исход борьбы лишь частично зависит от действий каждого участника.

Теория игр не охватывает все аспекты возникающих реальных ситуаций, но многим ситуациям можно придать игровую форму и получить возможность ее исследования с помощью теории игр. Сегодня методы теории игр наряду с другими широко применяемыми в экономике математическими методами стали стандартным инструментом экономической науки.

Целью изучения дисциплины «Теория игр» является усвоение методов, необходимых при моделировании процесса выработки оптимального решения в конфликтных ситуациях.

Дисциплина изучается один семестр. По ней предусмотрены лекции и лабораторные занятия в компьютерном классе.

Основными темами дисциплины являются:

- предмет и основные понятия теории игр;
- матричные игры двух игроков с нулевой суммой;
- статистические игры;
- кооперативные игры;
- позиционные игры.

1 ПРЕДМЕТ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

1.1 Предмет и задачи дисциплины «Теория игр»

Современная экономическая наука существенно опирается на математическое моделирование экономических процессов и использует различный математический аппарат. Одной из наук, предоставляющей возможность математического описания постановок различных задач по принятию решений и математическое обоснование подходов к их анализу, является **теория игр**. Она представляет собой теоретические основы математических моделей принятия оптимальных решений в конфликтных рыночных отношениях, носящих характер конкурентной борьбы.

В повседневной жизни конфликтные ситуации встречаются очень часто и еще чаще они возникают в общественных явлениях. К модели игры (конфликта) можно, например, свести противоборство сторонников модернизации и сохранения старины, людей, добивающихся освоения природных ресурсов какого-либо края, и защитников экологии. В реальной обстановке все такие вопросы осложняются необходимостью учитывать наряду с экономическими факторами социальные и даже политические. Очень острой бывает ситуация и при разработке новой техники и внедрении современных технологий.

Использование теории игр помогает лицу, принимающему решение, произвести критический анализ ситуации и в результате более обоснованно и последовательно проводить определенную политику или стратегию поведения при решении сложных, комплексных проблем.

Предметом курса «Теория игр» являются методы моделирования процессов выработки оптимальных решений в конфликтных ситуациях.

Основными задачами дисциплины являются:

– ознакомление с основными принципами принятия оптимальных решений в антагонистических и неантагонистических конфликтах, а также в условиях неопределенности и риска;

– получение навыков составления формальных игровых моделей для задач экономического и управленческого характера;

– ознакомление с основными методами решения матричных, кооперативных и позиционных игр;

– получение практических навыков решения основных видов игр на персональном компьютере и анализа полученных результатов.

Математическая теория игр начиналась с анализа салонных, спортивных, карточных и других игр, которые часто и с успехом выступают в качестве иллюстрации основных положений и понятий этой теории. Первооткрыватель теории игр, выдающийся американский математик XX в. Джон фон Нейман пришел к идеям своей теории, наблюдая за игрой в покер. Отсюда и произошло название «теория игр». После того, как теория игр в 1940 г. была применена Джоном фон Нейманом и О. Моргенштерном к теоретическому исследованию экономики, она получила широкое распространение и повсеместное признание.

К настоящему времени теория игр развилась в самостоятельную область математики и может рассматриваться независимо от ее приложений к реальным игровым ситуациям. По мнению Джона Нэша, теория игр вообще сыграла важную роль в интеллектуальной жизни XX в.

Теория игр представляет собой сложное многоаспектное понятие. Ее можно рассматривать в качестве необходимой составляющей экономико-математического моделирования.

Можно привести следующее определение теории игр. **Теория игр** — это раздел прикладной математики (исследования операций), изучающий принципы выработки оптимальных решений в конфликтных ситуациях. Она помогает выбрать лучшие стратегии с учётом представлений о других участниках, их ресурсах и их возможных поступках.

Теория игр вскрывает законы, знание которых приводит к тому, что результаты, полученные на моделях, называемых «играми», можно применять для выработки правил оптимального поведения для широкого класса конфликтных ситуаций во многих других областях деятельности.

В настоящее время теоретико-игровые модели используются в различных областях экономики и других наук, в частности, для выбора эффективных стратегий в бизнесе и оптимального поведения фирмы, для рационального управления финансами, в теории инвестирования, в оценке эффективности проектов и управлении портфелем проектов, в коммерческой деятельности, в страховании, в маркетинге транспортных услуг и управлении городским транспортом, в области рынка жилья, в теории инноваций, в менеджменте и управлении организационными системами, в анализе и управлении эколого-экономическими системами, в организации исследований, в задачах распознавания, в психологии и медицине, в военном деле, в задачах обеспечения безопасности, в социологии и политике. Исследования теоретических проблем теории игр весьма важны для развития экономики.

1.2 Основные понятия

Важную роль в экономике сыграла теория игр, разработанная Нейманом и О. Моргенштерном. Классическим, основополагающим трудом по теории игр является их монография «Теория игр и экономическое поведение». Большинство понятий и идей, разрабатываемых в настоящее время в теории игр, берут свое начало из этого труда.

В теории игр чаще всего рассматриваются ситуации, когда имеются два участника выполнения операции, каждый из которых преследует различные и противоположные цели. В качестве участников могут выступать целые коллективы. Наиболее характерны такие случаи и в области экономики, особенно при наличии конкуренции. По сути рынок — это открыто признаваемый конфликт в области экономических и производственных интересов. Демократия — это также открытое сопоставление интересов в области политических отношений, в борьбе за власть. Во всех таких случаях предполагается, что операция проводится против разумного противника (конкурента), преследующего свои собственные цели и оказывающего сознательное противодействие достижению цели первой стороной.

Какие именно действия предпримет конкурент, заранее неизвестно, но можно уверенно предполагать, что он не сделает ничего такого, что было бы невыгодно ему самому. Так как цели противоположны, а результат мероприятия каждой из сторон зависит от того, какие действия предпримет конкурент, их называют **конфликтными ситуациями**. В конфликтной ситуации сталкиваются противоположные интересы двух участников. Ограничение возможных противодействий разумного противника только теми, которые способствуют достижению его собственных целей, естественно, сужает область неопределенности и упрощает задачу принятия решений.

Для разрешения практических конфликтных ситуаций важно и необходимо научиться строить модели, имитирующие мыслительную деятельность человека. Формализованная модель конфликтной ситуации позволяет фиксировать процессы имитации рассуждений одного противника другим, а также исследовать явления взаимного управления, которые обычно возникают между конфликтующими сторонами.

Каждая взятая непосредственно из практики конфликтная ситуация очень сложна, и ее анализ затрудняется наличием многочисленных несущественных факторов. Чтобы сделать возможным математический анализ конфликтной ситуации, отвлекаются от всех второстепенных и малозначащих факторов и строят упрощенную, схематическую модель. Такую модель и называют игрой.

Игра — формализованная модель конфликтной ситуации, представляющая собой совокупность правил, описывающих поведение игроков. Примеры конфликтных ситуаций: взаимоотношения покупателя и продавца, конкуренция различных фирм, боевые действия, а также обычные игры.

Цель теории игр — выработка рекомендаций по разумному поведению участников конфликта (определение оптимальных стратегий поведения игроков).

От реального конфликта игра отличается тем, что ведется по определенным правилам:

– правила устанавливают последовательность ходов, объем информации каждой стороны о поведении другой и результат игры в зависимости от сложившейся ситуации;

– правилами устанавливаются также конец игры, когда некоторая последовательность ходов уже сделана, и больше ходов делать не разрешается.

Игроки — заинтересованные стороны в игре. Действия, выбираемые игроками в конфликтной ситуации, называют стратегиями. **Стратегия игрока** — однозначное описание его выбора в каждой возможной ситуации, при которой он должен сделать личный «ход».

В соответствии с имеющейся информацией о противнике в основу выбора стратегии полагается **принцип гарантированного результата**, который конкретизируется в критериях выбора решения. Какое бы решение ни принял противник, некоторый выигрыш должен быть нам гарантирован.

Партия игры — каждый конкретный пример разыгрывания игры некоторым конкретным образом от начала до конца.

Игра состоит из ходов, выполняемых игроками одновременно или последовательно. **Ход игрока** — выбор и осуществление действия, производимого одним игроком в условиях, точно определенных правилами игры.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры. Понятие стратегии — одно из основных в теории игр. Обычно, принимая участие в игре, игрок не следует каким-то жестким, фиксированным правилам: выбор при каждом личном ходе принимается им в ходе игры, в зависимости от сложившейся конкретной ситуации. Однако теоретически дело не изменится, если мы представим себе, что все эти решения приняты игроком заранее («если сложится такая-то ситуация, я поступлю так-то»). В принципе это возможно для любой игры. Если такая система решений будет принята, это будет означать, что игрок выбрал определенную стратегию. Теперь он может и не участвовать в игре лично, а заменить свое участие списком правил, которые за него будет применять незаинтересованное лицо. Стратегия может быть также задана машине-автомату в виде программы (именно так играют в шахматы электронные вычислительные машины).

Целью теории игр является выработка рекомендаций для разумного поведения игроков в конфликтной ситуации, т. е. определение оптимальной стратегии для каждого из них. **Оптимальной стратегией игрока** называется такая стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний проигрыш, независимо от того, какие стратегии применяет противник. При выборе этой стратегии основой рассуждений является предположение, что противник так же разумен, как и мы сами, и делает все для того, чтобы помешать нам добиться своей цели.

В теории игр все рекомендации вырабатываются исходя именно из этих принципов; следовательно, в ней не учитываются просчеты и ошибки игроков, неизбежные в каждой конфликтной ситуации, а также элементы азарта и риска.

Теория игр, как и всякая математическая модель сложного явления, имеет свои ограничения. Важнейшим из них является то, что выигрыш искусственно сводится к одному-единственному числу. В большинстве конфликтных ситуаций при выборе разумной стратегии приходится принимать во внимание не один, а несколько числовых параметров — показателей эффективности.

Стратегия, оптимальная по одному показателю, необязательно будет оптимальной по другим. Сознавая эти ограничения и поэтому не придерживаясь слепо рекомендаций, полученных игровыми методами, можно все же разумно использовать математический аппарат теории игр для выработки, если не в точности оптимальной, то, во всяком случае приемлемой стратегии.

Развитие игры во времени представляется как ряд последовательных ходов. Ходы могут быть сознательные и случайные. **Случайным ходом** называют результат, получаемый не решением игрока, а каким-либо механизмом случайного выбора (конкретные погодные условия, покупательский спрос, задержка с поставкой материалов и т.п.). При моделировании они определяются выбором числа с помощью датчика случайных чисел, бросанием кубика и другими способами. Во всех таких случаях должны быть указаны распределения вероятностей возможных исходов. **Сознательным ходом** называется выбор игроком одного из возможных вариантов действия (стратегии) и принятие решения о его осуществлении, например очередной ход при игре в шахматы или указание сделать заказ на оборудование в деловой игре.

Ходы — элементы игры. Правила игры предусматривают, какова должна быть последовательность ходов, и указывают характер каждого хода.

Личный ход — выбор игроком одного из заданного множества вариантов. **Выбор** — решение, принятое игроком при личном ходе.

Случайный ход — также выбор одного из множества вариантов, но здесь вариант выбирается не игроком, а некоторым механизмом случайного выбора.

Теория игр занимается анализом только тех игр, которые содержат личные ходы; ее задача — дать указания игрокам при выборе их личных ходов, т. е. рекомендовать им определенные стратегии.

Результатом игры будет победа или поражение, которые не всегда имеют количественные выражения, но обычно можно, хотя бы условно, выразить их числами. В шахматной игре, например, победа дает 1 очко, поражение — 0, ничья — 1/2. В азартных играх с денежными ставками выигрыши и проигрыши непосредственно выражаются в количественной мере.

Теория игр имеет свои недостатки:

– предположение о полной («идеальной») разумности противников. В реальном конфликте зачастую оптимальная стратегия состоит в том, чтобы угадать, в чем слабость противника и воспользоваться этой слабостью;

– каждому из игроков должны быть известны все возможные действия (стратегии) противника, неизвестно лишь то, каким именно из них он воспользуется в данной партии. В реальном конфликте перечень всех возможных стратегий противника неизвестен, а наилучшим решением в конфликтной ситуации нередко будет именно выход за пределы известных противнику стратегий.

1.3 Классификация игр

В настоящее время не существует единой четко сложившейся классификации игр. Игры и теоретико-игровые модели классифицируют по нескольким признакам.

В зависимости от количества игроков различают игры одного игрока, двух игроков, *n* игроков. Игры одного игрока (например, пасьянс) не рассматриваются в теории игр. Если в игре участвуют две стороны (два игрока), она называется **парной игрой**. Игры двух игроков являются наиболее распространенными и исследованными как с теоретической, так и с практической точки зрения. Трудности решения игр повышаются с ростом числа игроков.

По количеству возможных стратегий различают игры конечные и бесконечные. Игра называется **конечной**, если в ней существует конечное число возможных вариантов своих и чужих действий, конечное число ходов на каждом этапе игры, а также конечен размер выигрыша. Игры, не являющиеся конечными, называются **бесконечными**. Если хотя бы у одного из игроков имеется бесконечное число стратегий, игра будет бесконечной. В простых (одноходовых) играх, когда в каждой партии игрок может сделать лишь по одному ходу, понятие стратегии и возможного варианта действий совпадают. Обычно с увеличением количества стратегий возрастают трудности решения игр.

По характеру взаимоотношений различают игры бескоалиционные, кооперативные и коалиционные. Бескоалиционными называются игры, в которых игроки не имеют права вступать в соглашения, образовывать коалиции. Коалиционной игрой называется игра, в которой игроки могут вступать в соглашения, образовывать коалиции. В кооперативной игре коалиции заранее определены.

По характеру выигрышей различают игры с нулевой суммой и игры с ненулевой суммой. Игра, в которой алгебраическая сумма выигрышей всех сторон равна нулю, называется **игрой с нулевой суммой** или **антагонистической**. В таких играх интересы сторон прямо противоположны, то есть выигрыш одного игрока равен проигрышу второго. При этом предполагается, что выбор, сделанный каждым из игроков, неизвестен его противнику. Однако оба противника знают все возможные варианты своих и чужих действий, а также размер выигрыша при любом парном их сочетании.

Как указывалось в работах американского математика Джона Нэша, игры с ненулевой суммой — особый класс игр, в которых все участники или выигрывают, или терпят поражение. Дж. Нэш доказал, что классический подход к конкуренции А.Смита, когда каждый сам за себя, не оптимален. Наиболее оптимальны те стратегии, при которых каждый старается сделать лучше для себя, делая лучше для других. Он впервые описал теорию таких игр и теорию равновесия.

Примером игры с ненулевой суммой могут быть торговые взаимоотношения между странами, так как в результате применения своих стратегий все страны могут быть в выигрыше. Любая игра, в которой надо вносить взнос за право участия в ней, является игрой с ненулевой суммой.

Игры могут быть **детерминированные** и **вероятностные**. Если ни в каких аспектах игры (правилах, возможности или очерёдности ходов, определении момента завершения игры или результата) не участвует элемент случайности, такая игра называется **детерминированной**. Для любой детерминированной игры с полной информацией теоретически можно просчитать все возможные ходы игроков и определить последовательность ходов, которая гарантированно приведёт по крайней мере одного из них к выигрышу или ничьей.

Игры, в которых один противник — **природа**, а другой — человек, называют **статистическими играми**, а теорию таких игр называют теорией статистических решений.

Понятие «**природа**» включает совокупность внешних обстоятельств, в которых приходится принимать решение. Природа нейтральна. Она не стремится извлекать для себя максимальной выгоды и не имеет злого умысла по отношению к человеку. Природа — не разумный противник и не использует ошибки, совершаемые человеком.

Цель теории игр — выработать рекомендации для разумного поведения игроков в конфликтной ситуации, то есть указать оптимальную стратегию каждому из них. Если игра состоит только из сознательных ходов, то выбор стратегии игроков A и B однозначно определяет исход игры: выигрыш (положительный или отрицательный) игрока A. Если кроме сознательных ходов игра содержит и случайные, то оценкой выигрыша будет математическое ожидание, то есть средняя величина выигрыша при многократном повторении игры.

По виду функций выигрышей различают игры матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные, типа дуэлей и др.

Матричная игра — это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаются выигрыши первого игрока в виде матрицы. Выигрыш второго игрока равен проигрышу первого. Любая матричная игра имеет решение.

Биматричная игра — это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока задаются отдельными матрицами для соответствующих игроков.

Непрерывной называется такая игра, когда функция выигрышей каждого игрока непрерывна. Если функция выигрышей является выпуклой, игра называется выпуклой. Если функция выигрышей может быть представлена в виде суммы произведений функций от одного аргумента, то игра называется сепарабельной (разделимой).

Игры типа дуэлей характеризуются моментом выбора хода и вероятностями получения выигрышей в зависимости от времени, прошедшего от начала игры до момента выбора.

По количеству ходов различают игры одношаговые и многошаговые. Одношаговые игры заканчиваются после одного хода каждого игрока. Примером одношаговых игр являются матричные игры.

Многошаговые игры подразделяются на позиционные, стохастические, дифференциальные, типа дуэлей и др.

Позиционная игра — это игра, моделирующая процессы последовательного принятия решений в условиях меняющейся во времени и неполной информации. Выигрыши определяются в зависимости от применяемых стратегий.

Стохастические игры — динамические игры, в которых переход из одного состояния в другое происходит с некоторой вероятностью, зависящей от стратегий, выбранных игроками в данном состоянии.

Если в многошаговой игре допускается делать ходы непрерывно и подчинять поведение игроков некоторым условиям, описываемым дифференциальными уравнениями, то такие игры являются дифференциальными.

В зависимости от состояния информации различают игры с полной и с неполной информацией. Если на каждом ходе игры каждому игроку известно, какие выборы были сделаны игроками ранее, то это игра с полной информацией. Если в игре не все известно о предыдущих выборах, то это игра с неполной информацией.

1.4 Контрольные вопросы

1. Предмет и задачи дисциплины.
2. Что такое игра в теории игр?
3. Какова цель теории игр?
4. Чем отличается игра от реального конфликта?
5. Понятия игроки, партия игры, ход игрока.
6. Что такое стратегия игрока?
7. Какой принцип положен в основу выбора стратегии игрока?
8. Какая стратегия игрока называется оптимальной?
9. Понятие сознательных и случайных ходов. Ограничения теории игр.
10. Игровые модели, их назначение и характеристика.
11. Классификация теоретико-игровых моделей.
12. Что такое «природа» в теории игр?
13. Каковы недостатки теории игр?

1.5 Материалы для самоконтроля

1. Что такое теория игр?

а) совокупность теоретических положений, помогающих развивать азартный бизнес

б) это раздел экономической кибернетики

в) это раздел прикладной математики (исследования операций)

2. Что такое игра в теории игр?

а) формализованная модель конфликтной ситуации

б) моделирование какого-либо производственного или экономического процесса

в) выбор варианта действия случайным образом на основе датчика случайных чисел

3. Выберите неверное утверждении о теории игр:

а) результаты, полученные на игровых моделях, можно применять для выработки правил оптимального поведения для широкого класса конфликтных ситуаций б) каждый из участников преследует различные и противоположные цели

в) в качестве участников не могут выступать коллективы

4. Какая игра называется антагонистической?

а) игра, в которой выигрыш одного игрока способствует выигрышу другого

б) игра, в которой неизвестны стратегии противника

в) игра, в которой алгебраическая сумма выигрышей всех сторон равна нулю

5. Какая стратегия игрока называется оптимальной?

а) стратегия, обеспечивающая игроку при многократном повторении игры максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний проигрыш, независимо от того, какие стратегии применяет противник

б) стратегия, обеспечивающая игроку в конкретной партии игры максимально возможный выигрыш

в) стратегия, обеспечивающая игроку в конкретной партии игры минимально возможный проигрыш

6. Что такое «природа» в теории игр?

а) вся совокупность внешних обстоятельств, в которых приходится принимать решение

б) совокупность параметров естественной среды обитания человека, которые необходимо учитывать при принятии решения

в) метеорологические условия, которые необходимо учитывать при принятии решения

2 МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ ДВУХ ИГРОКОВ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

2.1 Решение игры в чистых стратегиях

Возможные варианты (исходы) игры можно свести в прямоугольную таблицу, называемую **платежной матрицей**.

Платежная матрица — это один из методов статистической теории решений, который может оказать помощь лицу, принимающему решение (ЛПР), в объективно обоснованном выборе одного из нескольких вариантов. Платеж представляет собой денежное вознаграждение или «полезность», являющиеся следствием конкретной стратегии в сочетании с конкретными обстоятельствами. Если платежи представить в форме таблицы, получается платёжная матрица.

Строки платёжной матрицы соответствуют различным стратегиям игрока A, а столбцы — стратегиям игрока B. Величина q на пересечении соответствующих строк и столбцов называется **ценой игры**:

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{m1} & q_{m2} & \dots & q_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Для нахождения оптимальной стратегии необходимо последовательно проанализировать все возможные стратегии и рассчитывать на то, что разумный противник на каждую из них будет отвечать такой, при которой выигрыш игрока A минимален. Обычно минимальные числа в каждой строке обозначаются α_i и выписываются в виде добавочного столбца платежной матрицы:

$$\begin{array}{cccccc} & B_1 & B_2 & \dots & B_n & \alpha_i \\ A_1 & q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} & \alpha_1 \\ A_2 & q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & q_{m1} & q_{m2} & \dots & q_{mn} & \alpha_m \\ \beta_j & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n & \end{array}$$

В каждой строке будет свое $\alpha_i = \min q_{ij}$. Предпочтительной для игрока *А* будет та стратегия, при которой α_i обращается в максимум, то есть $\alpha = \max \alpha_i$ или, принимая во внимание предыдущее выражение, $\alpha = \max\ \min q_{ij}$.

Величина α называется максиминным выигрышем или просто **максимином**, а соответствующая ей стратегия — **максиминной стратегией**. Если придерживаться максиминной стратегии, то при любом поведении стороны *В* (противника или конкурента) гарантирован выигрыш, во всяком случае не меньше α. Поэтому α называют также **нижней ценой игры** — это тот гарантированный минимум, который можно обеспечить при наиболее осторожной (перестраховочной) стратегии.

Очевидно, что аналогичные рассуждения можно провести и для стороны *В*. Эта сторона должна рассмотреть все свои стратегии, выделяя для каждой из них максимальные значения выигрыша: $\beta_j = \max q_{ij}$. Эти значения выписываются в дополнительной строке платежной матрицы. Из всех значений β_j находится минимальное:

$$\beta = \min\ \max q_{ij}.$$

Величина β дает минимаксный выигрыш, или просто *минимакс.* Стратегия, соответствующая β, называется минимаксной. Придерживаясь этой стратегии, стороне *В* гарантировано, что в любом случае она проиграет не больше β. Поэтому β называют также **верхней ценой игры**.

Предположение о разумности каждого игрока приводит к тому, что они должны выбирать соответствующие «осторожные» максиминные и минимаксные стратегии. Этот принцип осторожности получил название **принципа минимакса**. Особое место занимают игры, для которых

$$\min\ \max q_{ij} = \max\ \min q_{ij},$$

то есть нижняя цена игры равна верхней: $\alpha = \beta = \nu$. Величина ν называется **чистой ценой игры**. В платежной матрице такой игры существует элемент, который одновременно является минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце.

Если пренебречь дискретностью стратегий, то можно сказать, что точка $\alpha = \beta = v$ является седловой (рис. 2.1).

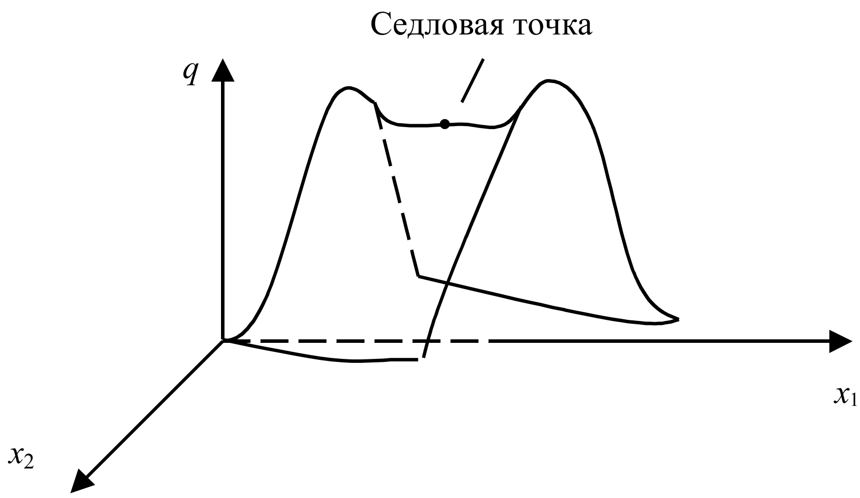

Рисунок 2.1 — Седловая точка в стратегии минимакса

Если наилучшие варианты стратегии для сторон, участвующих в игре, совпадают, то такое сочетание выбора сторон называют **седловой точкой**. Оптимальные стратегии, соответствующие седловой точке, называются **чистыми стратегиями**.

Седловой точке соответствует пара минимаксных стратегий, которые будут оптимальными для обоих игроков, поскольку любое отклонение от этих стратегий приводит к уменьшению выигрыша первого игрока и увеличению проигрыша второго по сравнению с ценой игры v. Таким образом, седловая точка является решением матричной игры, в которой минимаксные стратегии обладают **устойчивостью**.

2.2 Решение игры в смешанных стратегиях

Если платежная матрица не имеет седловой точки, не существует оптимальных чистых стратегий для каждого из игроков, то есть невозможно выбрать какую-либо стратегию в чистом виде путем выбора той или иной строки и столбца. В этом случае игрокам целесообразно выбирать стратегии случайным образом, то есть чередуя случайным образом несколько чистых стратегий. Такие смешанные стратегии определяют наилучший исход игры для каждого игрока. Смешанные стратегии представляют собой математическую модель изменчивой, гибкой тактики, при которой противник или конкурент не знает, с какой обстановкой ему придется встретиться.

Стратегия, состоящая в случайном применении с определенными вероятностями тех или иных чистых стратегий, называется **смешанной стратегией**. Простейшая матричная игра 2×2 определяется матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда вероятности чистых стратегий в смешанной можно определить по формулам:

$$p(A_1) = \frac{a_{22} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})},$$

$$p(A_2) = \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})},$$

$$p(B_1) = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})},$$

$$p(B_2) = \frac{a_{11} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}.$$

Чистую цену игры можно определить с использованием полученных вероятностей игроков *A* и *B* по одной из формул (результаты должны совпасть):

$$\upsilon = a_{11} \cdot p(A_1) + a_{21} \cdot p(A_2),$$

$$\upsilon = a_{11} \cdot p(B_1) + a_{12} \cdot p(B_2).$$

Оптимальной смешанной стратегией является та, которая при любой стратегии противника обеспечивает игроку средний выигрыш, не меньший, чем в случае применения противником его оптимальной смешанной стратегии. Этот средний гарантированный выигрыш называют **ценой игры**.

При применении смешанной стратегии выбор определенного действия игроком должен оставаться неизвестным противнику.

В матрице игры могут быть такие ситуации, когда игрок A может получить лучший для себя выигрыш, изменив одну стратегию на другую. Такие ситуации называют **неустойчивыми**. Неустойчивость какой-либо ситуации проявляется в том, что в случае её возникновения ей грозит распад, который обусловлен возможностями одного из игроков получить лучший для себя исход путем одностороннего изменения своей стратегии.

Если ни у одного из игроков нет оснований отходить от выбранных действий, односторонне изменив свою стратегию, то такие устойчивые ситуации в теории игр называют **ситуациями равновесия** или **равновесными по Нэшу** (по имени американского математика Джона Нэша).

Равновесные ситуации можно рассматривать как **оптимальные совместные решения**, причем оптимальность проявляется в отношении ее устойчивости. В ситуации равновесия каждый из игроков имеет выигрыш не меньше, чем «свой» максимин. Однако компоненты ситуаций равновесия могут не составить снова ситуации равновесия.

Оптимальность в форме равновесия относится именно к ситуациям, а не к их компонентам — стратегиям игроков.

Стратегии, обеспечивающие игроку больший выигрыш по сравнению с другими стратегиями, называют **доминирующими стратегиями**. Они позволяют сводить игру к меньшему числу стратегий.

Порядок платёжной матрицы (количество строк и столбцов) может быть уменьшен за счёт исключения доминируемых и дублирующих стратегий. Рассмотрим в качестве примера платежную матрицу выигрышей, показанную в таблице 2.1.

Стратегия называется доминируемой для игрока A, если все элементы строки матрицы этой стратегии меньше или равны соответствующим элементам строки матрицы другой стратегии. Для нашего примера стратегия A_1 является доминируемой по отношению к стратегии A_2, и ее можно исключить из рассмотрения.

Таблица 2.1 — Платёжная матрица с доминируемыми и дублирующими стратегиями

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	1	2	3	4	4	7
A_2	7	6	5	4	4	8
A_3	1	8	2	3	3	6
A_4	8	1	3	2	2	5

Стратегия называется доминируемой для игрока B, если все элементы столбца матрицы этой стратегии больше или равны соответствующим элементам столбца матрицы другой стратегии. Для нашего примера стратегия B_6 является доминируемой по отношению к стратегиям B_3, B_4 и B_5, и ее можно исключить из рассмотрения.

Стратегии называются дублирующими, если равны соответствующие им элементы строк или столбцов. В рассматриваемом примере стратегия B_5 является дублирующей по отношению к стратегии B_4, и ее можно исключить из дальнейшего рассмотрения.

Данные стратегии не будут выбраны игроками, так как являются заведомо проигрышными, и удаление этих стратегий из платёжной матрицы не повлияет на определение нижней и верхней цены игры, описанной данной матрицей.

Множество недоминируемых стратегий, полученных после уменьшения размерности платёжной матрицы, называется ещё множеством Парето (по имени итальянского экономиста Вильфредо Парето, занимавшегося исследованиями в данной области).

Рассмотрим пример поиска оптимальной смешанной стратегии. У стороны A имеется две стратегии развития фирмы: A_1 и A_2, у стороны B — три: B_1, B_2, B_3. Известны вероятностные выигрыши сторон при использовании ими той или иной стратегии, показанные в таблице 2.2.

Таблица 2.2 — Платёжная матрица для решения игры в смешанных стратегиях

	B_1	B_2	B_3
A_1	0,7	0,1	0
A_2	0,5	0,9	0,6

Найти оптимальную смешанную стратегию, выполнив расчеты в среде Excel.

Заносим на лист Excel исходные данные (платежную матрицу) и проверяем их на наличие седловой точки, как показано на рисунке 2.2.

	A	B	C	D	E
1		B1	B2	B3	min
2	A1	0,7	0,1	0	0
3	A2	0,5	0,9	0,6	0,5
4	max	0,7	0,9	0,6	
5					
6	Нижняя цена игры	α	0,5		
7	Верхняя цена игры	β	0,6		
8	Седловой точки нет				
9					
10	Исключаем стратегию B2 как доминируемую над B3				
11					
12		B1	B3	min	
13	A1	0,7	0	0	
14	A2	0,5	0,6	0,5	
15	max	0,7	0,6		
16					
17	Нижняя цена игры	α	0,5		
18	Верхняя цена игры	β	0,6		
19	Седловой точки нет				
20					
21	Решаем игру в смешанных стратегиях				
22					
23	Знаменатель		0,8		
24	P(A1)		0,125		
25	P(A2)		0,875		
26	P(B1)		0,75		
27	P(B2)		0,25		
28					
29	Чистая цена игры		0,525		
30			0,525		

Рисунок 2.2 — Вид листа Excel для поиска оптимальной смешанной стратегии

Так как седловая точка в заданной платежной матрице отсутствует, игра не имеет решения в чистых стратегиях. Исключаем из рассмотрения стратегию B_2 как доминируемую, так как все элементы этой стратегии больше соответствующих элементов стратегии B_3. Выбирая доминирующие стратегии для игрока B, получим матрицу 2×2 (это оставшиеся стратегии B_1 и B_3). После этого определяем вероятности чистых стратегий в смешанной и чистую цену игры по двум формулам с целью контроля правильности полученных результатов. Формулы для организации вычислений показаны на рисунке 2.3.

	A	B	C	D	E
1		B1	B2	B3	min
2	A1	0,7	0,1	0	=МИН(B2:D2)
3	A2	0,5	0,9	0,6	=МИН(B3:D3)
4	max	=МАКС(B2:B3)	=МАКС(C2:C3)	=МАКС(D2:D3)	
5					
6	Нижняя цена игры	α	=МАКС(E2:E3)		
7	Верхняя цена игры	β	=МИН(B4:D4)		
8	Седловой точки нет				
9					
10	Исключаем стратегию B2 как доминируемую над B3				
11					
12		B1	B3	min	
13	A1	0,7	0	=МИН(A13:C13)	
14	A2	0,5	0,6	=МИН(A14:C14)	
15	max	=МАКС(B13:B14)	=МАКС(C13:C14)		
16					
17	Нижняя цена игры	α	=МАКС(D13:D14)		
18	Верхняя цена игры	β	=МИН(A15:C15)		
19	Седловой точки нет				
20					
21	Решаем игру в смешанных стратегиях				
22					
23	Знаменатель		=B13+C14-(B14+C13)		
24	P(A1)		=(C14-B14)/C23		
25	P(A2)		=(B13-C13)/C23		
26	P(B1)		=(C14-C13)/C23		
27	P(B2)		=(B13-B14)/C23		
28					
29	Чистая цена игры		=B13*C24+B14*C25		
30			=B13*C26+C13*C27		

Рисунок 2.3 — Формулы для организации вычислений на листе Excel

В качестве примера решения игры в смешанных стратегиях рассмотрим еще одну простую задачу, позволяющую легко осмыслить полученные в ходе решения результаты. В городе имеются две конкурирующие фирмы A и B, выпускающие по два вида одной и той же продукции. Платежная матрица игры (выигрыши в д.е.) имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. У данной матрицы нет седловой точки, поэтому решение находится в смешанных стратегиях по вышеприведенным формулам. В результате получены следующие значения вероятностей чистых стратегий в смешанной: $p(A_1) = 0{,}43$; $p(A_2) = 0{,}57$; $p(B_1) = 0{,}29$; $p(B_2) = 0{,}71$. Это означает, что предприятию A следует производить 43 % первого вида продукции и 57 % второго вида, а предприятию B — соответственно 29 % и 71 %. При этом чистая цена игры составит 8,1 д.е.

2.3 Свертывание критериев методом аддитивной оптимизации

При решении матричных игр обычно рассматривают платежную матрицу выигрышей (один критерий). В большинстве практических задач принятия решения альтернативы оцениваются не по одному, а по нескольким критериям. Например, при экономической оценке проекта критериями служат экономическая эффективность, стоимость, реализуемость, при покупке оборудования — стоимость, надежность, производительность и т.д. Задача заключается в том, чтобы из ряда критериев получить один критерий оптимальности.

Самый простой и распространенный способ комбинирования исходных критериев основан на использовании так называемой линейной свертки критериев. Аддитивный критерий оптимальности определяется по обобщенной функции

$$F_i(a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot a_{ij} .$$

Величины λ_j являются весовыми коэффициентами, которые определяют в качественной форме степень предпочтения j-го критерия по сравнению с другими критериями. Другими словами, коэффициенты λ_j определяют важность j-го критерия оптимальности. При этом более важному критерию приписывается больший вес, а общая важность всех критериев равна единице, то есть

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \;\; \lambda_j \geq 0, \;\; j = \overline{1,n} .$$

Обобщенная функция может быть использована для свертывания частных критериев оптимальности, если:

– частные (локальные) критерии количественно соизмеримы по важности, то есть каждому из них можно поставить в соответствие некоторое число λ_j, которое численно характеризует его важность по отношению к другим критериям;

– частные критерии являются однородными (имеют одинаковую размерность; например, критерии «стоимость оборудования» и «производительность оборудования» в условных денежных единицах будут однородными).

В этом случае оказывается справедливым применение аддитивного критерия оптимальности.

Если локальные критерии неоднородны, перед расчетом обобщенной функции необходимо провести нормализацию критериев. Под **нормализацией критериев** понимается такая последовательность процедур, с помощью которой все критерии приводятся к единому, безразмерному масштабу измерения.

К настоящему времени разработано большое количество схем нормализации. Рассмотрим некоторые из них.

Определим максимум и минимум каждого локального критерия, то есть:

$$a_j^+ = \max a_{ij},\ i = \overline{1, m},$$

$$a_j^- = \min a_{ij},\ i = \overline{1, m}.$$

Выделим группу критериев $a_j,\ j = \overline{1, l}$, которые максимизируются при решении задачи, и группу критериев $a_j, j = \overline{l+1, n}$, которые минимизируются при решении задачи.

Тогда в соответствии с принципом максимальной эффективности нормализованные критерии определяются из следующих соотношений:

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_j^+},\ j = \overline{1, l},$$

$$\widehat{a}_{ij} = 1 - \frac{a_{ij}}{a_j^+},\ j = \overline{l+1, n}$$

или

$$\widehat{a}_{ij} = \frac{a_{ij} - a_j^-}{a_j^+ - a_j^-},\ j = \overline{1, l},$$

$$\widehat{a}_{ij} = \frac{a_j^+ - a_{ij}}{a_j^+ - a_j^-},\ j = \overline{l+1, n}.$$

Оптимальным будет тот вариант (стратегия), который обеспечивает максимальное значение функции цели:

$$F_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \widehat{a}_{ij},\ i = \overline{1, m}.$$

В соответствии с принципом минимальной потери нормализованные критерии определяются из соотношений:

$$\widehat{a}_{ij} = 1 - \frac{a_{ij}}{a_j^+},\ j = \overline{1, l},$$

$$\widehat{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_j^+},\ j = \overline{l+1, n}$$

или

$$\widehat{a}_{ij} = \frac{a_j^+ - a_{ij}}{a_j^+ - a_j^-},\ j = \overline{1, l},$$

$$\widehat{a}_{ij} = \frac{a_{ij} - a_j^-}{a_j^+ - a_j^-},\ j = \overline{l+1, n}.$$

При этом оптимальным будет тот вариант (стратегия), который обеспечивает минимальное значение функции цели.

Рассмотрим свертывание критериев на следующем примере. В таблице 2.3 приведены значения частных критериев функционирования оборудования (a_{ij}), выпускаемого тремя заводами-изготовителями, полученные с помощью экспериментальных наблюдений, для одного из вариантов технологий. Значения частных критериев даны в условных единицах.

На основе экспертных оценок были также определены веса частных критериев λ_j, $j = \overline{1,4}$:

$$\lambda_1 = 0{,}4;\ \lambda_2 = 0{,}2;\ \lambda_3 = 0{,}1;\ \lambda_4 = 0{,}3.$$

Таблица 2.3 — Значения частных критериев функционирования оборудования

Варианты оборудования (стратегии решения)	Частные критерии эффективности оборудования			
	производительность, д.е.	стоимость оборудования, д.е.	энергоемкость, у.е.	надежность, у.е.
Оборудование завода 1, x_1	$a_{11} = 5$	$a_{12} = 7$	$a_{13} = 5$	$a_{14} = 6$
Оборудование завода 2, x_2	$a_{21} = 3$	$a_{22} = 4$	$a_{23} = 7$	$a_{24} = 3$
Оборудование завода 3, x_3	$a_{31} = 4$	$a_{32} = 6$	$a_{33} = 2$	$a_{34} = 4$

В этом примере четыре локальных критерия не однородны, то есть имеют различные единицы измерения, что требует провести нормализацию критериев. Определим для рассматриваемого примера оптимальную стратегию выбора оборудования из трех возможных $(m = 3)$ стратегий с учетом четырех локальных критериев $n = 4$.

Алгоритм решения задачи следующий.

1. Определим максимум каждого локального критерия:

$$a_1^+ = 5;\ a_2^+ = 7;\ a_3^+ = 7;\ a_4^+ = 6.$$

2. При решении задачи максимизируются первый (производительность) и четвертый (надежность) критерии, а минимизируются второй (стоимость оборудования) и третий (энергоемкость) критерии.

3. Исходя из принципа максимизации эффективности, нормализуем следующие критерии:

$$\hat{a}_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_1^+},\ \hat{a}_{11} = \frac{a_{11}}{a_1^+} = \frac{5}{5} = 1,$$

$$\hat{a}_{21} = \frac{a_{21}}{a_1^+} = \frac{3}{5} = 0{,}6,\ \hat{a}_{31} = \frac{a_{31}}{a_1^+} = \frac{4}{5} = 0{,}8,$$

$$\hat{a}_{i2} = 1 - \frac{a_{i2}}{a_2^+},\ \hat{a}_{12} = 1 - \frac{a_{12}}{a_2^+} = 1 - \frac{7}{7} = 0,$$

$$\hat{a}_{22} = 1 - \frac{a_{22}}{a_2^+} = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7},\ \hat{a}_{32} = 1 - \frac{a_{32}}{a_2^+} = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7},$$

$$\hat{a}_{i3} = 1 - \frac{a_{i3}}{a_3^+},\ \hat{a}_{13} = 1 - \frac{a_{13}}{a_3^+} = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7},$$

$$\hat{a}_{23} = 1 - \frac{a_{23}}{a_3^+} = 1 - \frac{7}{7} = 0,\ \hat{a}_{33} = 1 - \frac{a_{33}}{a_3^+} = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7},$$

$$\hat{a}_{i4} = \frac{a_{i4}}{a_4^+},\ \hat{a}_{14} = \frac{a_{14}}{a_4^+} = \frac{6}{6} = 1,$$

$$\hat{a}_{24} = \frac{a_{24}}{a_4^+} = \frac{3}{6} = 0{,}5,\ \hat{a}_{34} = \frac{a_{34}}{a_4^+} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

4. Определяем обобщенную функцию цели по каждому варианту:

$$F_1 = \lambda_1 \cdot \hat{a}_{11} + \lambda_2 \cdot \hat{a}_{12} + \lambda_3 \cdot \hat{a}_{13} + \lambda_4 \cdot \hat{a}_{14} = 0{,}4 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot 0 + 0{,}1 \cdot \frac{2}{7} + 0{,}3 \cdot 1 \approx 0{,}729,$$

$$F_2 = \lambda_1 \cdot \hat{a}_{21} + \lambda_2 \cdot \hat{a}_{22} + \lambda_3 \cdot \hat{a}_{23} + \lambda_4 \cdot \hat{a}_{24} = 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot \frac{3}{7} + 0{,}1 \cdot 0 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 \approx$$
$$\approx 0{,}476,$$

$$F_3 = \lambda_1 \cdot \hat{a}_{31} + \lambda_2 \cdot \hat{a}_{32} + \lambda_3 \cdot \hat{a}_{33} + \lambda_4 \cdot \hat{a}_{34} = 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot \frac{1}{7} + 0{,}1 \cdot \frac{5}{7} + 0{,}3 \cdot \frac{2}{3} \approx$$
$$\approx 0{,}603.$$

Впоследствии эти данные будут являться одним столбцом платежной матрицы выигрышей. Для получения полной платежной матрицы аналогичная обработка должна быть произведена для других вариантов технологий.

2.4 Решение матричной игры методом Брауна-Робинсон

Пусть игра задана матрицей a размерности $m \times n$. Каждое разыгрывание игры в чистых стратегиях будет далее называться партией. Метод Брауна-Робинсон — это итеративная процедура построения последовательности пар смешанных стратегий игроков, сходящейся к решению матричной игры. Метод был предложен американским математиком Брауном, а сходимость этого процесса доказала американский математик Джулия Робинсон.

В первой партии оба игрока выбирают произвольную чистую стратегию. Пусть сыграно k партий, причем выбор стратегии в каждой партии запоминается. В (k+1)-ой партии каждый игрок выбирает ту чистую стратегию, которая максимизирует его ожидаемый выигрыш, если противник играет в соответствии с эмпирическим вероятностным распределением, сформировавшимся за k партий. Оценивается интервал для цены игры и, если он достаточно мал, процесс останавливается. Полученные при этом вероятностные распределения определяют смешанные стратегии игроков.

Достоинства метода:

- ориентирован на произвольную игру $m \times n$;
- не требует условия $a_{ij} > 0$;
- легко реализуем программными методами.

Недостатком метода является быстрое уменьшение скорости сходимости с ростом размерности матрицы игры.

Рассмотрим реализацию этого метода на примере игры 3×3.

В ячейки B2:D4 заносим элементы платежной матрицы и проверяем ее на наличие седловой точки. Для этой матрицы в ячейках E2:E4 находим минимальные значения строк, а в ячейках B5:D5 — максимальные значения столбцов.

В ячейках H2 и H3 находим соответственно нижнюю и верхнюю цену игры. Так как седловая точка в заданной платежной матрице отсутствует, игра не имеет решения в чистых стратегиях, и ее можно решать методом Брауна-Робинсон.

В ячейки A7:A26 вводим номера партий игры (числа от 1 до 20). В ячейки D6:I6 заносим обозначения стратегий игроков. В ячейку B7 вводим ссылку на ячейку A2, а в ячейку C7 — ссылку на ячейку B1. Выигрыши первого игрока в первой партии соответствуют стратегии B1, которую выбрал второй игрок. Они равны числам, находящимся в ячейках B2:B4. Поэтому в ячейки D7:F7 заносим ссылки на эти числа (элементы первого столбца матрицы, ячейки B2:B4 соответственно). Выигрыши второго игрока в первой партии задаются аналогично — это ссылки на элементы первой строки матрицы.

Выбор стратегии первого игрока для второй партии (ячейка B8) — это стратегия (A_1, A_2 или A_3), которой соответствует максимальный выигрыш в предыдущей партии игры. Данное условие задается с помощью формулы:

=ЕСЛИ(МАКС(D7:F7)=D7;$A$2;ЕСЛИ(МАКС(D7:F7)=E7;$A$3;$A$4)).

Логическая функция ЕСЛИ служит для описания разветвляющихся процессов. Ее формат следующий:

ЕСЛИ(условие;выражение1;выражение2),

где **условие** — логическое выражение, которое имеет значение **Истина** или **Ложь**;

выражение1 — выражение или строковая константа, которое выбирается при истинности логического выражения;

выражение2 — выражение или строковая константа, которое выбирается, когда логическое выражение имеет значение **Ложь**.

Ссылки на ячейки A2, A3 и A4 являются абсолютными, чтобы в дальнейшем при распространении формулы на другие ячейки столбца ссылки на эти ячейки не изменялись.

Выбор стратегии второго игрока для второй партии осуществляется аналогично, но второй игрок выбирает не максимальный выигрыш, а минимальный проигрыш. Для этого в ячейку C8 вводится формула:

=ЕСЛИ(МИН(G7:I7)=G7;$B$1;ЕСЛИ(МИН(G7:I7)=H7;$C$1;$D$1)).

Сумма выигрыша первого игрока во второй партии зависит от того, какую стратегию выбрал второй игрок на предыдущем первом шаге. Если выбрана стратегия B_1, то в ячейках D8:F8 будет сумма чисел, содержащихся в ячейках D7:F7 (выигрыши первого игрока в предыдущей партии) и B2:B4 (соответствующих стратегии B_1 второго игрока). Если выбрана стратегия B_2, то в ячейках D8:F8 будет сумма чисел, содержащихся в ячейках D7:F7 и C2:C4 (соответствующих стратегии второго игрока B_2). Если выбрана стратегия B_3, то в ячейках D8:F8 будет сумма чисел, содержащихся в ячейках D7:F7 и D2:D4 (соответствующих стратегии второго игрока B_3).

Сумма выигрыша второго игрока во второй партии зависит от того, какую стратегию выбрал первый игрок на предыдущем первом шаге и рассчитывается аналогично.

Формулы, которые необходимо ввести в ячейки для расчета выигрышей игроков, приведены в таблице 2.4.

Таблица 2.4 — Формулы для расчета выигрышей игроков на втором шаге игры

Ячейка	Формула
D8	=ЕСЛИ(C8=$B$1;D7+$B$2;ЕСЛИ(C8=$C$1;D7+$C$2;D7+$D$2))
E8	=ЕСЛИ(C8=$B$1;E7+$B$3;ЕСЛИ(C8=$C$1;E7+$C$3;E7+$D$3))
F8	=ЕСЛИ(C8=$B$1;F7+$B$4;ЕСЛИ(C8=$C$1;F7+$C$4;F7+$D$4))
G8	=ЕСЛИ(B8=$A$2;G7+$B$2;ЕСЛИ(B8=$A$3;G7+$B$3;G7+$B$4))
H8	=ЕСЛИ(B8=$A$2;H7+$C$2;ЕСЛИ(B8=$A$3;H7+$C$3;H7+$C$4))
I8	=ЕСЛИ(B8=$A$2;I7+$D$2;ЕСЛИ(B8=$A$3;I7+$D$3;I7+$D$4)

Формулы, введенные в ячейки B8:I8, распространяем на ячейки соответствующих столбцов.

После этого рассчитываем средние выигрыши для каждой из партий. Для первого игрока в ячейке K7 должно находиться число, которое является максимальным из D7:F7, деленным на номер партии. Для этого в ячейку K7 вводим формулу:

=МАКС(D7:F7)/A7.

Распространим эту формулу по столбцу до ячейки K26.

Аналогично для второго игрока в ячейке L7 должно находиться число, которое является минимальным из G7:I7, деленным на номер партии. Для этого в ячейку L7 вводим формулу:

=МИН(G7:I7)/A7.

Распространим эту формулу по столбцу до ячейки L26.

В ячейке K28 рассчитываем нижнюю цену игры по формуле:

=МАКС(L7:L26).

В ячейке K29 рассчитываем верхнюю цену игры по формуле:

=МИН(K7:K26).

Теперь необходимо найти смешанные стратегии игроков. Для этого следует подсчитать количество значений, выбираемых каждым из игроков для каждой из стратегий за 20 партий. Для получения вероятностей полученные значения делятся на 20.

Для расчета вероятности выбора первым игроком стратегии A_1 в ячейку B32 вводим формулу:

=СЧЁТЕСЛИ($B$7:$B$26;D6)/20.

Функция СЧЕТЕСЛИ подсчитывает количество значений в диапазоне, который задается первым параметром (B7:B26), удовлетворяющих условию, заданному вторым параметром.

Для расчета вероятностей выбора первым игроком стратегий A_2 и A_3 распространяем эту формулу на ячейки C32:D32.

Для расчета вероятности выбора вторым игроком стратегии B_1 в ячейку G32 вводим формулу:

=СЧЁТЕСЛИ($C$7:$C$26;G6)/20.

Для расчета вероятностей выбора вторым игроком стратегий B_2 и B_3 распространяем эту формулу на ячейки H32:I32.

Вид листа Excel, полученного в результате решения игры методом Брауна-Робинсон, показан на рисунке 2.4.

Как видно из приведенных результатов, получены значения нижней цены игры 1,818 и верхней цены игры — 2,000. Следовательно, значение чистой цены игры должно находиться между ними. 20 шагов явно недостаточно для достижения приемлемой точности решения.

Итерационный метод Брауна-Робинсон легко программируется, но, как показала практика, для достижения приемлемой точности часто требует не менее 2000 итераций, поэтому его нерационально реализовывать в Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		B1	B2	B3	min							
2	A1	2	3	0	0		Нижняя цена игры			α	1	
3	A2	2	1	3	1		Верхняя цена игры			β	2	
4	A3	1	5	0	0		Седловой точки нет					
5	max	2	5	3							Средние выигрыши	
6				A1	A2	A3	B1	B2	B3		игрока 1	игрока 2
7	1	A1	B1	2	2	1	2	3	0		2,000	0,000
8	2	A1	B3	2	5	1	4	6	0		2,500	0,000
9	3	A2	B3	2	8	1	6	7	3		2,667	1,000
10	4	A2	B3	2	11	1	8	8	6		2,750	1,500
11	5	A2	B3	2	14	1	10	9	9		2,800	1,800
12	6	A2	B2	5	15	6	12	10	12		2,500	1,667
13	7	A2	B2	8	16	11	14	11	15		2,286	1,571
14	8	A2	B2	11	17	16	16	12	18		2,125	1,500
15	9	A2	B2	14	18	21	18	13	21		2,333	1,444
16	10	A3	B2	17	19	26	19	18	21		2,600	1,800
17	11	A3	B2	20	20	31	20	23	21		2,818	1,818
18	12	A3	B1	22	22	32	21	28	21		2,667	1,750
19	13	A3	B1	24	24	33	22	33	21		2,538	1,615
20	14	A3	B3	24	27	33	23	38	21		2,357	1,500
21	15	A3	B3	24	30	33	24	43	21		2,200	1,400
22	16	A3	B3	24	33	33	25	48	21		2,063	1,313
23	17	A2	B3	24	36	33	27	49	24		2,118	1,412
24	18	A2	B3	24	39	33	29	50	27		2,167	1,500
25	19	A2	B3	24	42	33	31	51	30		2,211	1,579
26	20	A2	B3	24	45	33	33	52	33		2,250	1,650
27												
28							Нижняя цена игры				1,818	
29							Верхняя цена игры				2,000	
30												
31		P(A1)	P(A2)	P(A3)			P(B1)	P(B2)	P(B3)			
32		0,1	0,55	0,35			0,15	0,3	0,55			

Рисунок 2.4 — Вид листа Excel, полученного в результате решения игры методом Брауна-Робинсон

2.5 Решение матричной игры путем сведения к задаче линейного программирования

Пусть задана матричная игра $m \times n$. Будем считать, что в платежной матрице этой игры отсутствует решение в чистых стратегиях и нет доминируемых и дублирующих стратегий. Задача заключается в том, чтобы найти чистую цену игры и вероятности чистых стратегий в смешанной для игроков A и B. Предполагается, что цена игры положительная. Для этого необходимо, чтобы все элементы матрицы были неотрицательными.

Платежная матрица игры имеет вид:

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \ldots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & \ldots & B_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array},$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — возможные стратегии игрока *A*;

$B_1, B_2, \ldots, B_n$ — возможные стратегии игрока *B*;

n — число чистых стратегий игрока B;

m — число чистых стратегий игрока *A*.

Допустим, что игрок B выбирает чистую стратегию B_1. Тогда средний выигрыш игрока A будет равен

$$a_{11} \cdot p_1 + a_{21} \cdot p_2 + \ldots + a_{m1} \cdot p_m,$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_m$ — вероятности чистых стратегий в смешанной для игрока *A*. Этот выигрыш должен быть не меньше цены игры v:

$$a_{11} \cdot p_1 + a_{21} \cdot p_2 + \ldots + a_{m1} \cdot p_m \geq v.$$

Запишем аналогичные выражения для других стратегий игрока A, так как при любой стратегии игрока B выигрыш игрока A должен быть не меньше цены игры v:

$$\begin{array}{l} a_{12} \cdot p_1 + a_{22} \cdot p_2 + \ldots + a_{m2} \cdot p_m \geq v, \\ \ldots \\ a_{1n} \cdot p_1 + a_{2n} \cdot p_2 + \ldots + a_{mn} \cdot p_m \geq v \end{array}.$$

При этом $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$.

Разделим каждый из членов полученных уравнений на чистую цену игры v и введем обозначения:

$$x_1 = p_1 / v,\ x_2 = p_2 / v, \ldots,\quad x_m = p_m / v.$$

Тогда получим следующую систему из n неравенств:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{21} \cdot x_2 + \ldots + a_{m1} \cdot x_m \ge 1, \\ a_{12} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{m2} \cdot x_m \ge 1, \\ \ldots \\ a_{1n} \cdot x_1 + a_{2n} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_m \ge 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

При этом $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1/v$. Желательно, чтобы цена игры v была как можно больше, следовательно, $1/v$ должна быть как можно меньше. Тогда поиск оптимальной смешанной стратегии сводится к определению таких неотрицательных величин $x_1, x_2, ..., x_m$, при которых

$$x_1 + x_2 + ... + x_m \to \min$$

и соблюдаются ограничения, записанные в виде системы неравенств (2.1).

Таким образом, задача сведена к задаче линейного программирования, для решения которой можно использовать инструмент Excel **Поиск решения**. Рассмотрим этот процесс на следующем примере. Решить матричную игру путем сведения к задаче линейного программирования, если платежная матрица имеет вид:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Рекомендуемый порядок решения задачи следующий. Заносим на лист Excel исходные данные и необходимые расчетные формулы. Для этого в ячейки, например, B2:D4, заносим элементы платежной матрицы, а в ячейки B6:B8 вводим начальные значения x_1, x_2 и x_3 (например, нули). Их конечные значения будут получены в результате решения задачи. В ячейку D7 вводим формулу выражения для функции первого ограничения:

=СУММПРОИЗВ(B2:B4;$B$6:$B$8).

Функция СУММПРОИЗВ находит сумму произведений соответствующих элементов массивов. Распространяем эту формулу на ячейки E7:F7, чтобы получить формулы выражений для функций второго и третьего ограничений. В ячейку B11 заносим выражение для целевой функции:

=СУММ(B6:B8).

После этого следует вызвать инструмент Excel **Поиск решения** с помощью команды **Данные** → **Поиск решения**. В окне, появившемся на экране, следует задать параметры поиска решения. Пример задания параметров в окне средства **Поиск решения** показан на рисунке 2.5.

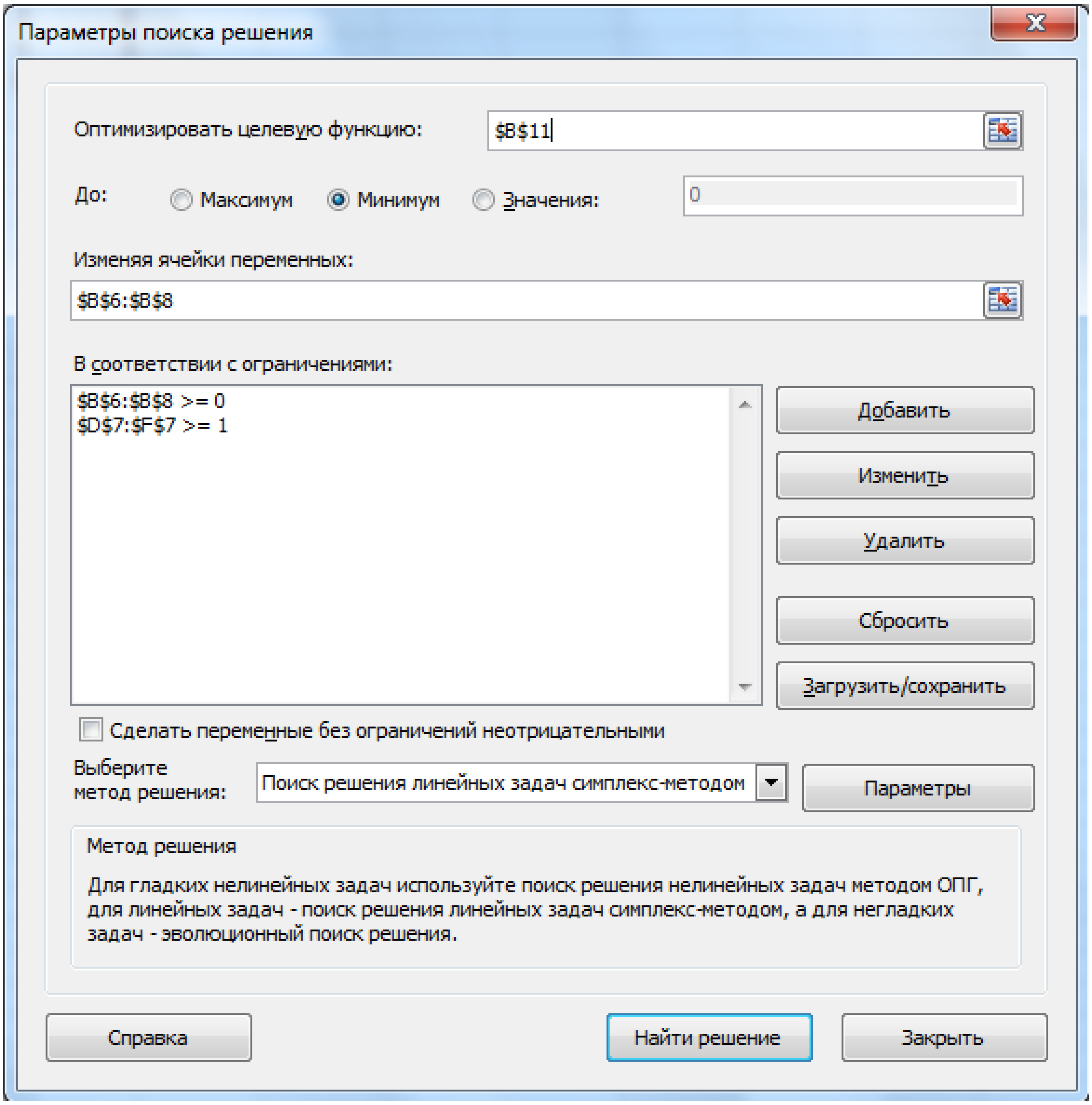

Рисунок 2.5 — Вид окна задания параметров средства **Поиск решения** при решении игры для игрока *A*

Для запуска процесса решения необходимо щелкнуть по кнопке **Найти решение**. На экране появляется диалоговое окно **Результаты поиска решения** с сообщением о результатах поиска решения.

После этого в ячейку F10 вводим формулу для расчета цены игры

=1/B11.

Для определения вероятностей чистых стратегий в смешанной для игрока *A* в ячейку B13 вводим формулу

=B6*$F$10

и распространяем ее на ячейки B14:B15. Вид полученного окна в Excel показан на рисунке 2.6.

	A	B	C	D	E	F
1		B1	B2	B3		
2	A1	2	3	0		
3	A2	2	1	3		
4	A3	1	5	0		
5						
6	x1	0,143		Функции ограничений		
7	x2	0,333		1	1	1
8	x3	0,048				
9						
10	Целевая функция				Цена игры	1,909
11		0,524				
12						
13	P(A1)	0,273				
14	P(A2)	0,636				
15	P(A3)	0,091				

Рисунок 2.6 — Вид окна Excel в результате решения задачи для игрока *A*

Для игрока *B* задача решается аналогичным образом. Поскольку второй игрок выбирает не максимальный выигрыш, а минимальный проигрыш, проигрыш игрока *B* должен быть не больше цены игры v. Кроме того, желательно, чтобы цена игры v была как можно меньше, следовательно, $1/v$ должна быть как можно больше. Таким образом, задача сводится к следующей задаче линейного программирования. Найти такие неотрицательные значения $x_1, x_2, ..., x_n$, при которых

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \to \max$$

и соблюдаются ограничения:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n \le 1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n \le 1, \\ \ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n \le 1. \end{cases}$$

Рассмотрим процесс решения матричной игры в Excel для игрока *B* на том же примере, что и для игрока *A*. Пример заполнения листа Excel при решении игры для игрока *B* показан на рисунке 2.7, а вид окна Excel в результате решения задачи для игрока *B* — на рисунке 2.8.

	A	B	C	D	E
1		B1	B2	B3	Функции ограничений
2	A1	2	3	0	=СУММПРОИЗВ(B2:D2;$B$7:$D$7)
3	A2	2	1	3	=СУММПРОИЗВ(B3:D3;$B$7:$D$7)
4	A3	1	5	0	=СУММПРОИЗВ(B4:D4;$B$7:$D$7)
5					
6		x1	x2	x3	Целевая функция
7		0	0,1428571	0,0952380	=СУММ(B7:D7)
8					
9		Цена игры		=1/E7	
10					
11		P(B1)	P(B2)	P(B3)	
12		=B7*$D$9	=C7*$D$9	=D7*$D$9	

Рисунок 2.7 — Пример заполнения листа Excel
при решении игры для игрока *B*

	A	B	C	D	E
1		B1	B2	B3	Функции ограничений
2	A1	2	3	0	1
3	A2	2	1	3	1
4	A3	1	5	0	1
5					
6		x1	x2	x3	Целевая функция
7		0,286	0,143	0,095	0,524
8					
9		Цена игры		1,909	
10					
11		P(B1)	P(B2)	P(B3)	
12		0,545	0,273	0,182	

Рисунок 2.8 — Вид окна Excel в результате решения задачи
для игрока *B*

Вид окна задания параметров средства **Поиск решения** при решении игры для игрока *B* показан на рисунке 2.9.

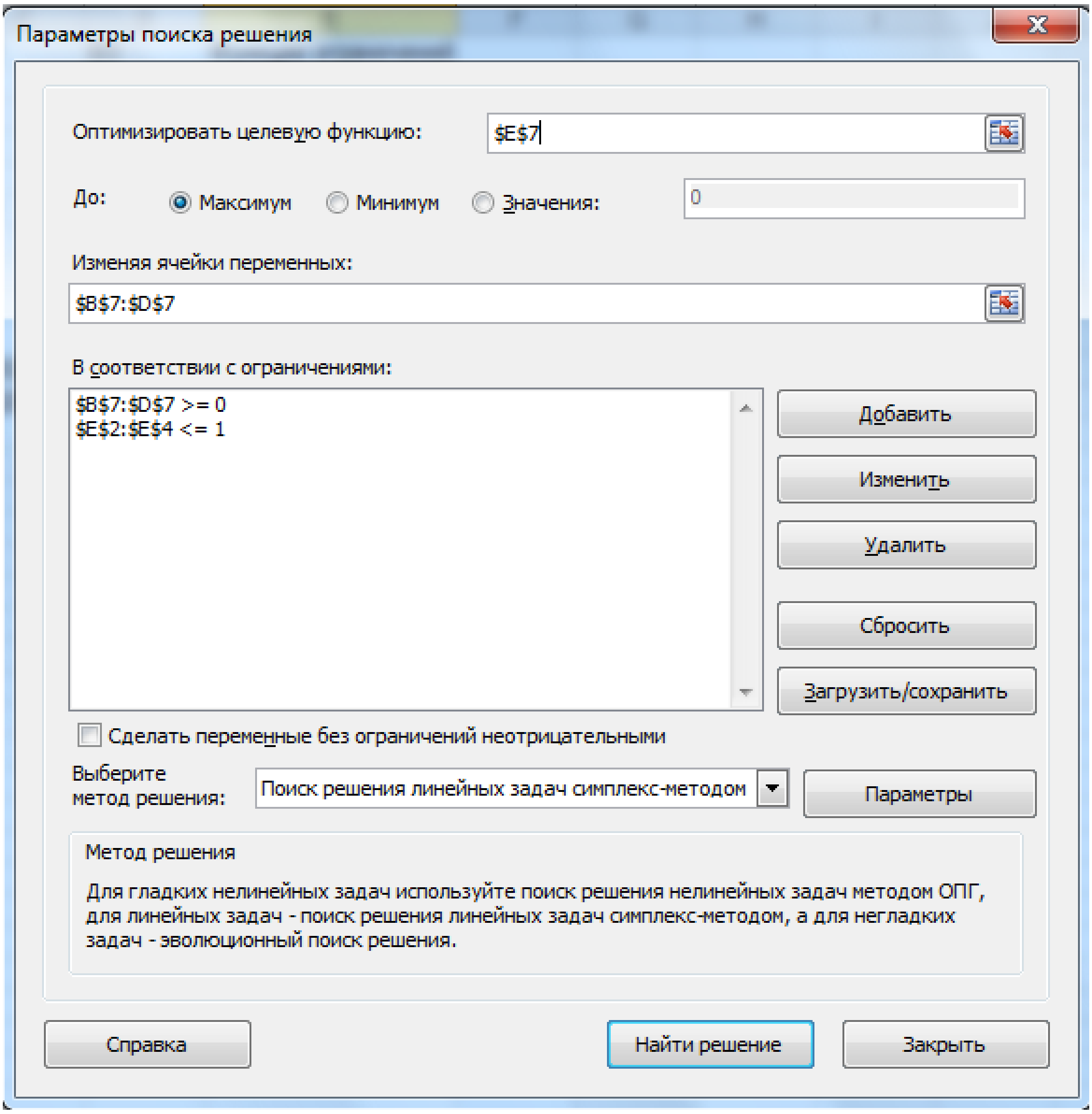

Рисунок 2.9 — Вид окна задания параметров средства
Поиск решения при решении игры для игрока *B*

Если матрица игры содержит отрицательные элементы, то для решения игры вначале следует выполнить афинное преобразование матрицы игры. Его суть заключается в том, что каждый элемент матрицы a_{ij} можно преобразовать по формуле:

$$a'_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} + \mu ,$$

где $\lambda > 0$;

μ — действительное произвольное фиксированное число.

Тогда, соответственно, в результате решения задачи получим значение $\upsilon' = \lambda \cdot \upsilon + \mu$, откуда цена игры $\upsilon = \dfrac{\upsilon' - \mu}{\lambda}$.

Практически при наличии в матрице игры отрицательных элементов необходимо перед началом решения задачи прибавить к каждому коэффициенту матрицы число, соответствующее модулю наименьшего отрицательного коэффициента матрицы, а после решения задачи вычесть это число из полученного по расчету значения цены игры. Такое преобразование матрицы не влияет на значения получаемых в результате расчета вероятностей выбора игроками чистых стратегий в смешанных.

Рассмотрим в качестве примера решение матричной игры, заданной платежной матрицей следующего вида:

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Преобразуем эту матрицу для исключения в ней отрицательных элементов путем прибавления к каждому элементу матрицы числа 2. В результате получим матрицу:

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

В результате решения задачи получены значения вероятностей чистых стратегий в смешанных: для игрока A — $p(A_1) = 0{,}27$, $p(A_2) = 0{,}64$, $p(A_3) = 0{,}09$; для игрока B — $p(B_1) = 0{,}55$, $p(B_2) = 0{,}27$, $p(B_3) = 0{,}18$. Цена игры $\upsilon = 1{,}91 - 2 = -0{,}09$, где 1,91 — значение, полученное в результате расчета.

Для матричной игры существует еще графический метод решения, однако этот метод более трудоемкий в реализации и применим к играм $2 \times n$ и $m \times 2$, в которых хотя бы один игрок имеет только две стратегии.

2.6 Контрольные вопросы

1. Что такое цена игры?
2. Седловая точка и ее характеристика.
3. Максиминная стратегия и ее характеристика.
4. Минимаксная стратегия и ее характеристика.
5. Что такое принцип минимакса?
6. Что такое чистая цена игры?
7. Что такое нижняя и верхняя цена игры?
8. Какие стратегии называются чистыми?
9. Какие стратегии называются смешанными?
10. Что такое цена игры для смешанных стратегий?
11. Что такое равновесие по Нэшу?
12. Что такое платежная матрица?
13. Доминируемые стратегии и их характеристика.
14. Что такое множество Парето?
15. В чем суть аддитивной линейной свертки критериев?
16. В чем суть нормализации критериев?
17. Метод Брауна-Робинсон, его преимущества и недостатки.
18. Решение матричной игры путем сведения к задаче линейного программирования.
19. Особенности решения матричной игры путем сведения к задаче линейного программирования при наличии в матрице отрицательных элементов.
20. Какие игры можно решать графическим методом?

2.7 Материалы для самоконтроля

1. Что такое цена игры?

а) величина на пересечении соответствующих строк и столбцов платежной матрицы б) минимальное значение строки платежной матрицы

в) максимальное значение строки платежной матрицы

г) минимальное значение столбца платежной матрицы

д) максимальное значение столбца платежной матрицы

2. Выберите неверное утверждение о седловой точке:

а) если наилучшие варианты стратегии для сторон, участвующих в игре, совпадают, то такое сочетание выбора сторон называют седловой точкой

б) седловая точка является решением матричной игры

в) в седловой точке минимаксные стратегии обладают устойчивостью

г) стратегии, соответствующие седловой точке, называются смешанными

3. Выберите неверное утверждение о максиминной стратегии:

а) для каждой строки находится минимальное значение выигрыша и берется максимальное из них

б) стороне А гарантировано, что в любом случае она выиграет не меньше максимина

в) максиминный выигрыш называется также верхней ценой игры

4. Выберите неверное утверждение о минимаксной стратегии:

а) стороне В гарантировано, что в любом случае она проиграет не больше минимакса

б) минимаксный выигрыш называется также нижней ценой игры

в) для каждой стратегии выбираются максимальные значения выигрыша и находится наименьшее значение из них

5. Что такое принцип минимакса?

а) принцип, в соответствии с которым игрокам необходимо выбирать «осторожные» максиминные и минимаксные стратегии

б) принцип, в соответствии с которым максимин должен равняться минимаксу

в) принцип, позволяющий обеспечить гарантированный минимальный выигрыш

6. Что такое чистая цена игры?

а) элемент, который одновременно является минимальным в строке и максимальным в столбце б) средний гарантированный выигрыш

в) гарантированный минимум, который можно обеспечить при наиболее осторожной стратегии

7. Что такое нижняя цена игры?

а) минимаксный выигрыш

б) максиминный выигрыш

в) наименьшее значение элемента платежной матрицы

8. Что такое верхняя цена игры?

а) минимаксный выигрыш

б) максиминный выигрыш

в) наибольшее значение элемента платежной матрицы

9. Какие стратегии называются чистыми?

а) пара максиминных стратегий, соответствующих седловой точке

б) оптимальные стратегии, соответствующие седловой точке

в) стратегии, обеспечивающие игроку больший выигрыш в сравнении с другими стратегиями

10. Какие стратегии называются смешанными?

а) стратегии, заключающиеся в случайном использовании с определенными вероятностями определенных чистых стратегий

б) пара максиминных стратегий, соответствующих седловой точке

в) оптимальные стратегии, соответствующие седловой точке

г) стратегии, обеспечивающие игроку больший выигрыш в сравнении с другими стратегиями

11. Что такое цена игры для смешанных стратегий?

а) элемент, который одновременно является минимальным в строке и максимальным в столбце

б) средний гарантированный выигрыш

в) гарантированный минимум, который можно обеспечить при наиболее осторожной стратегии

12. Выберите неверное утверждение о равновесии по Нэшу:

а) это устойчивые ситуации в теории игр

б) это оптимальные совместные решения в теории игр

в) при достижении равновесия ни у одного из игроков нет оснований отходить от выбранных действий, односторонне изменив свою стратегию г) в ситуации равновесия каждый из игроков имеет выигрыш не меньше своего минимакса

13. Что такое платежная матрица?

а) прямоугольная таблица, в которую сведены возможные варианты (исходы) игры

б) прямоугольная таблица, в которую сведены тарифы на перевозку единицы продукции из пункта в пункт

14. Выберите неверное утверждение о доминируемых стратегиях:

а) данные стратегии не будут выбраны игроками, так как являются заведомо проигрышными

б) удаление этих стратегий из платёжной матрицы не повлияет на определение нижней и верхней цены игры

в) это стратегии, обеспечивающие игроку больший выигрыш по сравнению с другими стратегиями

15 Что такое множество Парето?

а) оптимальные совместные решения двух игроков

б) множество недоминируемых стратегий, полученных после уменьшения размерности платёжной матрицы за счет удаления доминируемых стратегий

в) неустойчивые ситуации, обусловленные возможностями одного из игроков в одностороннем порядке изменить свою стратегию

16. В чем суть нормализации критериев?

а) из всех критериев отбираются критерии, которые количественно соизмеримы по важности

б) из всех критериев отбираются критерии, которые имеют одинаковую размерность

в) все критерии приводятся к единому, безразмерному масштабу измерения

17. Каково преимущество метода Брауна-Робинсон?

а) требует малого числа итераций

б) легко реализуем программными методами

в) скорость сходимости слабо уменьшается с ростом размерности матрицы игры

18. Что является недостатком метода Брауна-Робинсон?

а) не позволяет решать игры размерности более 3×3 б) сложно реализуем программными методами

в) скорость сходимости быстро уменьшается с ростом размерности матрицы игры

19. Что не характерно для решения матричной игры путем сведения к задаче линейного программирования?

а) простота реализации в среде Excel

б) возможность получить точное решение

в) быстрое уменьшение скорости сходимости с ростом размерности матрицы игры

20. Какие игры можно решать графическим методом?

а) в которых хотя бы один игрок имеет только две стратегии

б) игры с размерностью платежной матрицы не более 3×3

в) любые матричные игры $m \times n$

2.8 Лабораторные работы

Лабораторная работа 1. Решение матричной игры в чистых и смешанных стратегиях.

Цель работы — научиться находить нижнюю и верхнюю цену игры и решать ее в чистых и смешанных стратегиях, используя Microsoft Excel.

Задание.

У стороны A имеется две стратегии развития фирмы (A_1 и A_2), у стороны B — три (B_1, B_2, B_3). Известны вероятностные выигрыши сторон при использовании ими той или иной стратегии. Таким образом, платежная матрица (например, для стороны A) имеет вид:

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Используя данные индивидуального задания, найти верхнюю и нижнюю цену игры и сделать вывод о наличии седловой точки. Вывести решение игры в чистых стратегиях, если седловая точка имеется, или сообщение о ее отсутствии. Если она имеется, то изменить одну-две вероятности таким образом, чтобы седловой точки не было и оптимальное решение игры лежало в области смешанных стратегий. Исключить доминируемую стратегию (предполагается, что она есть). Найти решение игры в смешанных стратегиях, выполнив расчеты в среде Excel.

Варианты индивидуальных заданий.

Вариант	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
1	0,2	0,5	0,8	0,1	0,9	0,6
2	0	0,3	0,9	0,6	0,1	0,8
3	0,2	0,7	0,5	0,6	0,1	0,8
4	0,2	0,5	0,9	0,7	0	0,1
5	0.1	0,8	0,4	0,3	0,9	0,5
6	0	0,4	0,8	0,1	0,9	0,5
7	0,2	0,8	0	0,1	0,9	0,6
8	0,3	0	0,9	0,8	0,4	0,1
9	0,2	0,9	0,4	0,3	0,8	0,5
10	0,1	0	0,9	0,6	0,2	0,5
11	0,7	0,1	0	0,5	0,9	0,2
12	0,1	0,5	0,8	0,7	0,3	0,4
13	0	0,4	0,7	0,5	0,3	0,1
14	0,3	0,7	0	0,5	0,9	0,2
15	0,1	0	0,8	0,2	0,7	0,4
16	0,1	0,7	0	0,8	0,3	0,5
17	0,4	0,8	0,2	0,1	0,5	0,7
18	0,3	0,7	0,5	0,1	0,9	0,2
19	0,7	0,5	0,1	0,3	0,8	0,2
20	0,9	0,8	0,2	0,4	0,6	0
21	0,8	0,5	0,1	0,2	0,3	0,9
22	0,7	0,1	0,5	0,6	0,9	0
23	0,8	0,2	0,5	0,1	0,9	0,4
24	0,8	0,1	0,6	0,5	0,9	0
25	0,4	0,7	0,6	0,3	0,8	0,2
26	0,5	0,9	0,1	0,6	0,3	0,4
27	0,6	0,7	0,5	0,4	0,8	0,2
28	0,7	0,5	0,4	0,3	0,5	0,6
29	0,8	0,7	0,5	0,4	0,7	0,5
30	0,3	0,5	0,7	0,8	0,6	0,1

Лабораторная работа 2. Решение игры методом Брауна-Робинсон.

Цель работы — научиться решать матричную игру 3×3 методом Брауна-Робинсон, используя Microsoft Excel.

Задание.

1. Ввести на лист Excel данные для платежной матрицы выигрышей игры 3×3 в соответствии с данными индивидуального задания. Известно, что в матрице отсутствуют доминируемые и дублирующие стратегии и решение в чистых стратегиях.

Решить данную игру итерационным методом Брауна-Робинсон для 20 партий игры. Определить для этих условий приближенные значения верхней и нижней цены игры, а также значения вероятностей чистых стратегий в смешанных для игроков A и B.

Варианты индивидуальных заданий.

Вариант 1				Вариант 2				Вариант 3			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	78	52	51	A_1	57	67	56	A_1	55	98	51
A_2	59	99	111	A_2	90	99	78	A_2	59	99	111
A_3	95	87	56	A_3	68	50	116	A_3	63	50	56
Вариант 4				Вариант 5				Вариант 6			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	132	65	72	A_1	20	46	22	A_1	15	36	33
A_2	99	104	111	A_2	37	10	40	A_2	30	20	40
A_3	84	146	79	A_3	36	17	12	A_3	46	15	20
Вариант 7				Вариант 8				Вариант 9			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	16	25	27	A_1	14	27	23	A_1	98	145	93
A_2	24	13	33	A_2	28	11	31	A_2	54	53	125
A_3	35	16	15	A_3	37	14	11	A_3	62	78	112
Вариант 10				Вариант 11				Вариант 12			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	70	95	63	A_1	10	16	13	A_1	25	33	36
A_2	106	68	120	A_2	17	13	72	A_2	32	15	41
A_3	76	118	89	A_3	27	43	19	A_3	39	18	16
Вариант 13				Вариант 14				Вариант 15			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	10	25	40	A_1	30	74	120	A_1	18	45	30
A_2	62	54	70	A_2	42	83	51	A_2	53	14	42
A_3	35	48	12	A_3	75	60	44	A_3	39	26	33
Вариант 16				Вариант 17				Вариант 18			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	167	195	163	A_1	175	167	177	A_1	150	200	160
A_2	206	168	198	A_2	155	243	155	A_2	250	250	180
A_3	176	218	189	A_3	185	176	160	A_3	170	165	190

Вариант 19				Вариант 20				Вариант 21			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	150	235	170	A_1	180	210	250	A_1	176	234	183
A_2	165	165	220	A_2	190	220	150	A_2	170	157	199
A_3	210	190	150	A_3	200	170	160	A_3	195	150	190
Вариант 22				Вариант 23				Вариант 24			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	150	160	170	A_1	170	195	163	A_1	168	234	178
A_2	180	190	160	A_2	248	186	150	A_2	237	157	222
A_3	210	170	205	A_3	176	158	200	A_3	243	150	144
Вариант 25				Вариант 26				Вариант 27			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	13	26	22	A_1	102	130	145	A_1	105	136	140
A_2	27	10	30	A_2	168	194	120	A_2	155	120	132
A_3	36	13	10	A_3	106	183	149	A_3	123	164	112
Вариант 28				Вариант 29				Вариант 30			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	98	117	153	A_1	98	121	116	A_1	106	138	153
A_2	167	140	139	A_2	135	141	149	A_2	99	127	119
A_3	176	180	144	A_3	114	133	129	A_3	108	78	86

Лабораторная работа 3. Решение матричной игры путем сведения к задаче линейного программирования.

Цель работы — научиться решать матричную игру путем сведения к задаче линейного программирования, используя Microsoft Excel.

Задание.

Задать на листе Excel данные для платежной матрицы выигрышей игры 3×3 в соответствии с данными индивидуального задания на лабораторную работу № 2. Известно, что в матрице отсутствуют доминируемые и дублирующие стратегии и решение в чистых стратегиях.

Решить игру путем сведения к задаче линейного программирования с помощью инструмента Microsoft Excel **Поиск решения**. Определить цену игры, а также значения вероятностей чистых стратегий в смешанных для игроков *A* и *B*.

3 СТАТИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

3.1 Понятие о статистических играх

Принятие управленческих решений предполагает наличие ситуаций выбора наиболее выгодного варианта поведения из нескольких имеющихся вариантов в условиях неопределённости. Такие задачи могут быть описаны матричными играми особого типа, в которых игрок взаимодействует не со вторым игроком, а с окружающей средой. Объективно окружающая среда не заинтересована в проигрыше игрока. В процессе принятия решения о выборе варианта поведения игрок имеет информацию о том, что окружающая среда может принять одно из нескольких возможных состояний и сталкивается с неопределённостью относительно того конкретного состояния, которое примет окружающая среда в данный момент времени.

Матричная игра, в которой игрок взаимодействует с окружающей средой, не заинтересованной в его проигрыше, и решает задачу определения наиболее выгодного варианта поведения с учётом неопределённости состояния окружающей среды, называется **статистической игрой** или **«игрой с природой»**. Игрок в этой игре называется **лицом, принимающим решение (ЛПР)**.

В общем виде платёжная матрица статистической игры приведена в таблице 3.1.

Таблица 3.1 — Общий вид платёжной матрицы статистической игры

	$П_1$	$П_2$	…	$П_n$
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

В данной игре строки матрицы (A_i) — стратегии ЛПР, а столбцы матрицы ($П_j$) — состояния окружающей среды.

ЛПР определяет наиболее выгодную стратегию в зависимости от целевой установки, которую он реализует в процессе решения задачи. Результат решения задачи ЛПР определяет по одному из **критериев принятия решения**. Для того чтобы прийти к однозначному и по возможности наиболее выгодному варианту решения, необходимо ввести оценочную (целевую) функцию. При этом каждой стратегии ЛПР A_i приписывается некоторый результат W_i, характеризующий все последствия этого решения. Из массива результатов принятия решений ЛПР выбирает элемент W, который наилучшим образом отражает мотивацию его поведения.

При рассмотрении статистических игр возможны два варианта:

– вероятности состояний среды неизвестны и отсутствует возможность получения о них какой-либо статистической информации, т.е. решение о выборе оптимальной стратегии приходится принимать в условиях неопределенности;

– вероятности состояний среды (природы) известны, и решение о выборе оптимальной стратегии приходится принимать в условиях риска.

3.2 Критерии принятия решений в условиях полной неопределенности

3.2.1 Критерий Лапласа

Этот критерий опирается на «принцип недостаточного основания» Лапласа, согласно которому все состояния «природы» $П_j$, $j = \overline{1,n}$ полагаются равновероятными. В соответствии с этим принципом каждому состоянию $П_j$ ставится вероятность q_j, определяемая по формуле

$$q_j = \frac{1}{n}.$$

При этом в условиях неопределенности выбирается стратегия, дающая наибольший ожидаемый выигрыш

$$\max_i \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Для каждой строки матрицы рассчитывается среднее значение, затем из полученных средних значений выбирается максимальное. По местоположению максимального среднего (какой строке соответствует) выбирается i-й вариант решения. Аналогично можно повторить эту процедуру и для столбцов. Недостаток стратегии — происходит усреднение выигрыша, в поисках компромисса часто теряется выигрыш. Стратегию наиболее целесообразно применять, если элементов строк матрицы много (три и более) и они имеют не слишком большой разброс относительно среднего в строке.

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу. Фирма планирует реализацию своей продукции на рынках, учитывая возможные варианты покупательского спроса Π_j, j=1, 3 (низкий, средний, высокий). У нее имеется три стратегии сбыта товаров A_1, A_2, A_3. Объем товарооборота (ден. ед.), зависящий от стратегии и покупательского спроса, представлен следующей матрицей:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 55 & 20 & 35 \\ 45 & 50 & 20 \\ 30 & 40 & 50 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Найти стратегию сбыта, обеспечивающую наибольший средний товарооборот фирмы.

В этой задаче в качестве игрока «природа» выступает спрос покупателей. Результаты расчета по критерию Лапласа и используемые при этом формулы Excel показаны на рисунке 3.1.

	A	B	C	D	E
1	Расчет по критерию Лапласа				
2					
3		П1	П2	П3	Среднее
4	A1	55,0	20,0	35,0	36,7
5	A2	45,0	50,0	20,0	38,3
6	A3	30,0	40,0	50,0	40,0
7				max	40,0

	A	B	C	D	E
1	Расчет по критерию Лапласа				
2					
3		П1	П2	П3	Среднее
4	A1	55	20	35	=СРЗНАЧ(B4:D4)
5	A2	45	50	20	=СРЗНАЧ(B5:D5)
6	A3	30	40	50	=СРЗНАЧ(B6:D6)
7				max	=МАКС(E4:E6)

Рисунок 3.1 — Расчет по критерию Лапласа

Как видно из приведенных результатов, по критерию Лапласа оптимальной является стратегия A_3.

Если в исходной задаче матрица возможных результатов представлена матрицей рисков $\|r_{ij}\|$, то критерий Лапласа принимает следующий вид:

$$\min_i \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} .$$

3.2.2 Критерий Вальда (ММ-критерий).

Этот критерий опирается на принцип наибольшей осторожности, поскольку он основывается на выборе наилучшей из наихудших стратегий (стратегия «пессимиста»).

Если в исходной матрице по условию задачи результат a_{ij} представляет выигрыш (полезность) лица, принимающего решение, то при выборе оптимальной стратегии используется **максиминный критерий**.

Для определения оптимальной стратегии в каждой строке матрицы результатов находят наименьший элемент $\min\limits_j a_{ij}$, а затем выбирается стратегия (строка i), которой будет соответствовать наибольший элемент из этих наименьших элементов, т. е. действие, определяющее результат, равный

$$W = \max_i \min_j a_{ij} .$$

Если в исходной матрице (по условию задачи) результат a_{ij} представляет потери лица, принимающего решение, то при выборе оптимальной стратегии используется **минимаксный критерий**. Для определения оптимальной стратегии необходимо в каждой строке i матрицы результатов найти наибольший элемент $\max\limits_j a_{ij}$, а затем выбрать стратегию (строка i), которой будет соответствовать наименьший элемент из этих наибольших элементов, т. е. действие, определяющее результат, равный

$$W = \min_i \max_j a_{ij} .$$

Критерий ориентирует лицо, принимающее решение, на осторожную линию поведения, направленную на получение дохода и минимизацию возможных рисков одновременно. Данный критерий обеспечивает максимизацию минимального выигрыша, который может быть получен при реализации каждого из вариантов стратегий.

Результаты расчета по критерию Вальда для задачи, приведенной в 3.2.1, и используемые при этом формулы Excel показаны на рисунке 3.2.

	A	B	C	D	E
11	Расчет по критерию Вальда				
12					
13		П1	П2	П3	min
14	A1	55,0	20,0	35,0	20
15	A2	45,0	50,0	20,0	20
16	A3	30,0	40,0	50,0	30
17				max	30

	A	B	C	D	E
11	Расчет по критерию Вальда				
12					
13		П1	П2	П3	min
14	A1	55	20	35	=МИН(B14:D14)
15	A2	45	50	20	=МИН(B15:D15)
16	A3	30	40	50	=МИН(B16:D16)
17				max	=МАКС(E14:E16)

Рисунок 3.2 — Расчет по критерию Вальда

Как видно из приведенных результатов, по критерию Вальда оптимальной является стратегия A_3.

Критерий Вальда иногда приводит к нелогичным выводам из-за своей чрезмерной «пессимистичности». Применение критерия Вальда оправдано, если ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами:

– о вероятности наступления того или иного состояния природы ничего не известно;

– не допускается никакой риск;

– реализуется лишь малое количество решений.

3.2.3 Критерий Сэвиджа

В критерии Сэвиджа используют матрицу рисков $\|r_{ij}\|$. Элементы данной матрицы можно определить по формулам:

$$r_{ij} = \begin{cases} \max\limits_{i}\{a_{ij}\} - a_{ij}, \text{ } \textit{если } A - \textit{выигрыш} \\ a_{ij} - \min\limits_{i}\{a_{ij}\}, \textit{если } A - \textit{потери} \end{cases} .$$

Это означает, что r_{ij} есть разность между наилучшим значением в столбце j и значениями a_{ij} при том же j. Отметим, что независимо от того, является ли a_{ij} доходом (выигрышем) или потерями (затратами), r_{ij} в обоих случаях определяет величину потерь лица, принимающего решение. Следовательно, можно применять к r_{ij} только минимаксный критерий. Критерий Сэвиджа рекомендует в условиях неопределенности выбирать ту стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации (когда риск максимален).

Применение критерия Сэвиджа позволяет любыми путями избежать большого риска при выборе стратегии, а значит, избежать большего проигрыша (потерь).

Результаты расчета по критерию Сэвиджа для задачи, приведенной в 3.2.1, показаны на рисунке 3.3, а используемые при этом формулы Excel — на рисунке 3.4.

	A	B	C	D	E
21	Расчет по критерию Сэвиджа				
22					
23		П1	П2	П3	
24	A1	55,0	20,0	35,0	
25	A2	45,0	50,0	20,0	
26	A3	30,0	40,0	50,0	
27	max	55	50	50	
28					
29	Матрица рисков				
30		П1	П2	П3	max
31	A1	0,0	30,0	15,0	30,0
32	A2	10,0	0,0	30,0	30,0
33	A3	25,0	10,0	0,0	25,0
34				min	25,0

Рисунок 3.3 — Расчет по критерию Сэвиджа

	A	B	C	D	E
21	Расчет по критерию Сэвиджа				
22					
23		П1	П2	П3	
24	A1	55	20	35	
25	A2	45	50	20	
26	A3	30	40	50	
27	max	=МАКС(B24:B26)	=МАКС(C24:C26)	=МАКС(D24:D26)	
28					
29	Матрица рисков				
30		П1	П2	П3	max
31	A1	=B$27-B24	=C$27-C24	=D$27-D24	=МАКС(B31:D31)
32	A2	=B$27-B25	=C$27-C25	=D$27-D25	=МАКС(B32:D32)
33	A3	=B$27-B26	=C$27-C26	=D$27-D26	=МАКС(B33:D33)
34				min	=МИН(E31:E33)

Рисунок 3.4 — Формулы Excel для расчета по критерию Сэвиджа

Для выбора оптимальной стратегии вначале для каждого столбца матрицы рассчитывается максимальное значение, затем с учетом полученных максимумов формируется матрица рисков. Как видно из рисунка 3.4, для этого в ячейку B31 вводится формула, в которой применена смешанная адресация для ячейки B27 (зафиксирована строка). Эта формула распространяется на диапазон ячеек B31:D33. После этого находим максимальные значения строк полученной матрицы рисков и выбираем из полученного столбца максимумов минимальное значение. По местоположению этого минимального значения (какой строке соответствует) выбирается i-я стратегия. Как видно из приведенных результатов, по критерию Сэвиджа оптимальной является стратегия A_3.

3.2.4 Критерий Гурвица

Основан на следующих двух предположениях: «природа» может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятностью $(1-\alpha)$ и в самом выгодном состоянии с вероятностью α, где α – коэффициент доверия. Если результат a_{ij} прибыль, полезность, доход и т.п., то критерий Гурвица определяется по формуле:

$$W = \max_i \left[\alpha \max_j a_{ij} + (1-\alpha) \min_j a_{ij} \right].$$

Когда a_{ij} представляет затраты (потери), то выбирают действие, дающее

$$W_{\min} = \min_i \left[\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha) \max_j a_{ij} \right].$$

Если $\alpha = 0$, получим пессимистический критерий Вальда.

Если $\alpha = 1$, то приходим к правилу вида $\max_i \max_j a_{ij}$ или к так называемой стратегии «здорового оптимиста», т.е. критерий слишком оптимистичный.

Критерий оптимизма используется, когда игрок оказывается в безвыходном положении, когда любой его шаг равновероятно может оказаться как абсолютным выигрышем, так и полным провалом. Данный критерий предполагает, что развитие ситуации будет благоприятным для лица, принимающего решение. Вследствие этого, оптимальным выбором будет вариант с наибольшим значением показателя эффективности в матрице доходности.

Критерий Гурвица устанавливает баланс между случаями крайнего пессимизма и крайнего оптимизма путем взвешивания обоих способов поведения соответствующими весами $(1-\alpha)$ и α, где $0 \le \alpha \le 1$. Значение α от 0 до 1 может определяться в зависимости от склонности лица, принимающего решение, к пессимизму или к оптимизму. При отсутствии ярко выраженной склонности $\alpha = 0{,}5$ представляется наиболее разумным.

Принимая стратегию Гурвица, ЛПР выбирает для себя, насколько рисковать или страховаться. Для выбора стратегии по критерию Гурвица сначала для каждой строки матрицы определяются максимальный и минимальный элементы, затем они после умножения на соответствующие коэффициенты доверия складываются для каждой строки. Из полученных значений выбирается максимальное (для матрицы доходов) или минимальное (для матрицы затрат) значение, соответствующее i-й строке. По нему определяется i-й вариант решения. Аналогичную процедуру можно повторить и для столбцов. Недостаток стратегии Гурвица — субъективность определения коэффициента значимости.

Результаты расчета по критерию Гурвица для задачи, приведенной в 3.2.1, при принятом значении $\alpha = 0{,}5$ показаны на рисунке 3.5, а используемые при этом формулы Excel — на рисунке 3.6.

	A	B	C	D	E	F	G
38	Расчет по критерию Гурвица						
39	Коэффициент доверия α					0,5	
40							
41		П1	П2	П3	min	max	Выигрыш wi
42	A1	55,0	20,0	35,0	20	55	37,5
43	A2	45,0	50,0	20,0	20	50	35
44	A3	30,0	40,0	50,0	30	50	40
45						max	40

Рисунок 3.5 — Расчет по критерию Гурвица

	A	B	C	D	E	F	G
38	Расчет по критерию Гурвица						
39	Коэффициент доверия α					0,5	
40							
41		П1	П2	П3	min	max	Выигрыш wi
42	A1	55	20	35	=МИН(B42:D42)	=МАКС(B42:D42)	=$F$39*F42+(1-$F$39)*E42
43	A2	45	50	20	=МИН(B43:D43)	=МАКС(B43:D43)	=$F$39*F43+(1-$F$39)*E43
44	A3	30	40	50	=МИН(B44:D44)	=МАКС(B44:D44)	=$F$39*F44+(1-$F$39)*E44
45						max	=МАКС(G42:G44)

Рисунок 3.6 — Формулы Excel для расчета по критерию Гурвица

Аналогичным образом выполнены расчеты при других значениях α. Результаты этих расчетов сведены в таблицу 3.2.

Таблица 3.2 — Результаты расчетов по критерию Гурвица при различных значениях α

Значение α	Товарооборот, д.е.	Стратегия
0,2	34	A_3
0,4	38	A_3
0,6	42	A_3
0,8	48	A_1

Как видно из приведенных результатов, по критерию Гурвица также для большей части диапазона значений α оптимальной является стратегия A_3. Стратегия A_1 оптимальна только в предположении, что «природа» с высокой вероятностью находится в самом выгодном состоянии.

Таким образом, для рассмотренного примера в условиях неопределенности следует выбрать стратегию A_3, так как она является оптимальной по большинству критериев.

3.3 Критерии принятия решений в условиях риска

Применяются, когда известны не только состояния, в которых случайным образом может находиться «природа», но и вероятности этих состояний. Это говорит о том, что лицо, принимающее решение, находится в условиях риска. В этом случае для выбора оптимальной стратегии чаще всего применяют критерий Байеса.

3.3.1 Критерий Байеса

Критерий Байеса — правило, в соответствии с которым стратегия решений выбирается таким образом, чтобы обеспечить максимум среднего выигрыша или минимум среднего риска. Стратегию, основанную на этом правиле, называют байесовской стратегией, а минимальный средний риск — байесовским риском.

Матрицу выигрышей игрока A и вероятности состояний природы $П$ можно представить в виде общей матрицы:

	$П_1$	$П_2$	…	$П_n$
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}
q_j	q_1	q_2	…	q_n

Чистую стратегию A_i можно определить как случайную величину со следующим законом распределения:

A_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{in}
q_j	q_1	q_2	…	q_n

Математическое ожидание данной случайной величины

$$B_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j, \; i = 1,2,...,m.$$

Оно означает средневзвешенное выигрышей i-ой строки матрицы A с весами (q_1, q_2, …, q_n).

Критерий Байеса относительно выигрышей позволяет выбрать максимальный из ожидаемых элементов матрицы доходности при известной вероятности возможных состояний природы:

$$B = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j .$$

Этот критерий называется еще критерием максимального математического ожидания выигрыша.

Показателем эффективности стратегии A_i по критерию Байеса относительно рисков (упущенных выгод) является математическое ожидание рисков, расположенных в i-ой строке матрицы рисков:

$$B_i^r = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j, \; i = 1,2,...,m.$$

Критерий Байеса относительно рисков позволяет выбрать минимальное значение из средних рисков при известной вероятности возможных состояний природы:

$$B^r = \min_i \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j .$$

Критерии Байеса относительно выигрышей и относительно рисков эквивалентны, то есть по обоим критериям оптимальной будет одна и та же стратегия.

Критерий Байеса наилучшим образом соответствует ситуации многократной повторяемости, когда лучший средний результат приведет к лучшему общему итогу. Если рассматриваемая ситуация выбора решения будет часто повторяться при неизменных условиях, то выбор наилучшей стратегии по критерию Байеса представляется наилучшим. В остальных случаях этот критерий разумно использовать лишь как ориентировочный.

Выполним расчет по критерию Байеса для задачи, приведенной в 3.2.1, если известны следующие значения вероятностей покупательского спроса: q_1=0,30; q_2=0,45; q_3=0,25.

Вид листа Excel с результатами расчета показан на рисунке 3.7, а используемые при этом формулы — на рисунке 3.8.

	A	B	C	D	E
1	Расчет по критерию Байеса				
2					
3		П1	П2	П3	В
4	А1	55,0	20,0	35,0	34,3
5	А2	45,0	50,0	20,0	41,0
6	А3	30,0	40,0	50,0	39,5
7	q	0,30	0,45	0,25	
8				max	41,0

Рисунок 3.7 — Вид листа Excel с результатами расчета по критерию Байеса

	A	B	C	D	E
1	Расчет по критерию Байеса				
2					
3		П1	П2	П3	В
4	А1	55	20	35	=СУММПРОИЗВ(B4:D4;$B$7:$D$7)
5	А2	45	50	20	=СУММПРОИЗВ(B5:D5;$B$7:$D$7)
6	А3	30	40	50	=СУММПРОИЗВ(B6:D6;$B$7:$D$7)
7	q	0,3	0,45	=1-B7-C7	
8				max	=МАКС(E4:E6)

Рисунок 3.8 — Формулы Excel для расчета по критерию Байеса

Как видно из приведенных результатов, по критерию Байеса оптимальной является стратегия A_2.

3.3.2 Критерий Ходжа-Лемана

Этот критерий опирается одновременно на ММ-критерий и критерий максимального математического ожидания выигрыша. При определении оптимальной стратегии по этому критерию вводится параметр достоверности информации о распределении вероятностей состояний окружающей среды. Значение этого параметра находится в интервале [0, 1]. Если степень достоверности велика, то доминирует критерий максимального математического ожидания выигрыша, в противном случае — ММ-критерий. Платёжная матрица дополняется столбцом, коэффициенты которого определяются по формуле:

$$W_i = u\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j + (1-u)\min_j a_{ij},$$

где u — параметр достоверности информации о вероятностях состояний окружающей среды.

Оптимальной по данному критерию считается та стратегия, в которой значение W_i максимально:

$$W = \max W_i.$$

Данный критерий применим в следующем случае:

– имеется информация о вероятностях состояний окружающей среды, однако эта информация получена на основе относительно небольшого числа наблюдений и может измениться;

– принятое решение теоретически допускает бесконечно много реализаций;

– при малом числе реализаций допускается некоторый риск.

Выполним расчет по критерию Ходжа-Лемана для той же задачи, что и в 3.3.1, предполагая, что степень достоверности информации о распределении вероятностей состояний окружающей среды u=0,7. Вид листа Excel с результатами расчета показан на рисунке 3.9, а используемые при этом формулы — на рисунке 3.10.

	A	B	C	D	E	F	G
11	Расчет по критерию Ходжа-Лемана						
12				u	0,7		
13		П1	П2	П3	min	B	wi
14	A1	55,0	20,0	35,0	20	34,3	30,0
15	A2	45,0	50,0	20,0	20	41,0	34,7
16	A3	30,0	40,0	50,0	30	39,5	36,7
17						max	36,7

Рисунок 3.9 — Вид листа Excel с результатами расчета по критерию Ходжа-Лемана

	A	B	C	D	E	F	G
11	Расчет по критерию Ходжа-Лемана						
12				u	0,7		
13		П1	П2	П3	min	B	wi
14	A1	55	20	35	=МИН(B14:D14)	=E4	=F14*$E$12+E14*(1-$E$12)
15	A2	45	50	20	=МИН(B15:D15)	=E5	=F15*$E$12+E15*(1-$E$12)
16	A3	30	40	50	=МИН(B16:D16)	=E6	=F16*$E$12+E16*(1-$E$12)
17						max	=МАКС(G14:G16)

Рисунок 3.10 — Формулы Excel для расчета по критерию Ходжа-Лемана

В расчете имеются ссылки на ячейки E4:E6. Значения этих ячеек вычисляются при выполнении расчета по критерию Байеса. Как видно из приведенных результатов, по критерию Ходжа-Лемана оптимальной является стратегия A_3.

3.3.3 Критерий Гермейера

По критерию Гермейера относительно выигрышей формируется матрица Гермейера, состоящая из элементов Гермейера $a_{ij}q_j$. При выборе стратегии игрок A предполагает, что природа будет находиться в самом неблагоприятном для него состоянии, при котором элемент Гермейера будет являться самым минимальным среди всех элементов матрицы Гермейера, соответствующих выбранной стратегии. Для этого в каждой строке матрицы Гермейера находят минимальный элемент: $\min\limits_j\left(a_{ij}q_j\right)$. Этот элемент называется показателем эффективности чистой стратегии A_i по критерию Гермейера относительно выигрышей:

$$G_i = \min_j \left(a_{ij} q_j\right).$$

Ценой игры в чистых стратегиях по критерию Гермейера относительно выигрышей является максимальное значение среди показателей эффективности чистой стратегии A_i по критерию Гермейера относительно выигрышей:

$$G = \max_j G_i .$$

Строка, в которой стоит наибольший из минимальных элементов, и будет оптимальной стратегией. Цену игры в чистых стратегиях относительно выигрышей можно назвать максимином матрицы Гермейера относительно выигрышей:

$$G = \max_i \min_j \left(a_{ij} q_j\right).$$

В каком-то смысле критерий Гермейера обобщает критерий Вальда (ММ-критерий): в случае равномерного распределения они становятся идентичными.

Выполним расчет по критерию Гермейера для той же задачи, что и в 3.3.1. Вид листа Excel с результатами расчета показан на рисунке 3.11, а используемые при этом формулы — на рисунке 3.12.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
21	Расчет по критерию Гермейера									
22						Элементы Гермейера				
23		П1	П2	П3			П1	П2	П3	min
24	A1	55,0	20,0	35,0		A1	16,5	9,0	8,8	8,8
25	A2	45,0	50,0	20,0		A2	13,5	22,5	5,0	5,0
26	A3	30,0	40,0	50,0		A3	9,0	18,0	12,5	9,0
27	q	0,30	0,45	0,25					max	9,0

Рисунок 3.11 — Вид листа Excel с результатами расчета по критерию Гермейера

Как видно из приведенных результатов, по критерию Гермейера оптимальной является стратегия A_3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
21	Расчет по критерию Гермейера									
22								Элементы Гермейера		
23		П1	П2	П3			П1	П2	П3	min
24	A1	55	20	35		A1	=B24*B$27	=C24*C$27	=D24*D$27	=МИН(G24:I24)
25	A2	45	50	20		A2	=B25*B$27	=C25*C$27	=D25*D$27	=МИН(G25:I25)
26	A3	30	40	50		A3	=B26*B$27	=C26*C$27	=D26*D$27	=МИН(G26:I26)
27	q	0,3	0,45	=1-B27-C27					max	=МАКС(J24:J26)

Рисунок 3.12 — Формулы Excel для расчета
по критерию Гермейера

Таким образом, для рассмотренного примера, если фирма постоянно реализует свою продукцию на рынках в похожих условиях, ей следует выбрать стратегию сбыта товаров A_2 по критерию Байеса. В остальных случаях, включая ситуации неуверенности в достоверности значений вероятностей покупательского спроса, целесообразно ориентироваться на стратегию A_3, которая является оптимальной по большинству критериев как в условиях неопределенности, так и в условиях риска.

3.4 Понятие о стоимости информации в игре с «природой»

В игре с «природой» часто возникает возможность получения информации или уточнения данных о реализации ее состояний. Информация называется совершенной, если вероятность ее ошибки равна нулю. Однако такая информация не предоставляется бесплатно — для ее получения необходимо затратить определенные усилия, вложить средства и т.п.

Возникает вопрос о максимальной стоимости такой информации: сколько можно заплатить за получение дополнительной информации, чтобы выигрыш при обладании ею за вычетом платы за информацию был не меньше выигрыша без учета этой информации? При этом необходимо сравнивать случаи оптимального поведения при дополнительной информации и без нее.

Стоимость совершенной информации не может превышать разницу выигрышей, полученную за счет изменения стратегии в результате обладания данной информацией относительно лучшего варианта стратегии при рассмотрении всех возможных вариантов как потенциально реализуемых.

Чем больше различие в ценности альтернативных вариантов, тем ниже стоимость совершенной информации. Она максимальна в случае, когда ценности альтернатив почти одинаковы, т.е. чем сложнее различить сравниваемые альтернативы, тем более остро возникает потребность в дополнительной информации и тем выше ее стоимость.

Стоимость информации не зависит от того, какой сценарий будущего она предскажет. Владение совершенной информацией позволяет получить максимум того, что можно получить в конкретной ситуации.

3.5 Контрольные вопросы

1. Характеристика статистической игры.
2. Какие критерии применяются для выбора оптимальной стратегии в условиях полной неопределенности?
3. Особенности критериев Лапласа, Сэвиджа, Вальда, Гурвица.
4. Что такое риск при принятии решений в условиях неопределенности?
5. Какие критерии применяются для выбора оптимальной стратегии в условиях риска?
6. Особенности критериев Байеса, Ходжа-Лемана, Гермейера.
7. Когда целесообразно использовать критерий Байеса?
8. Какая информация называется совершенной?

3.6 Материалы для самоконтроля

1. Выберите неверное утверждение о статистической игре:

а) игрок в этой игре взаимодействует с окружающей средой, препятствующей его выигрышу

б) эта игра называется еще «игрой с природой»

в) игрок в этой игре называется лицом, принимающим решение

2. Какие критерии применяются для выбора оптимальной стратегии в условиях полной неопределенности?

а) ММ-критерий, Лапласа, Сэвиджа, Байеса б) Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица

в) Лапласа, Байеса, Ходжа-Лемана, Гермейера

3. Какие критерии применяются для выбора оптимальной стратегии в условиях риска?

а) ММ-критерий, Лапласа, Сэвиджа, Байеса

б) Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица

в) Байеса, Ходжа-Лемана, Гермейера

4. Что такое риск при принятии решений в условиях неопределенности?

а) разность между результатом, который можно получить при известном состоянии «природы», и результатом при выбранной стратегии

б) наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации

в) максимальное значение столбца платежной матрицы

г) минимальное значение столбца платежной матрицы

5. Что характерно для критерия Лапласа?

а) в условиях риска выбирается действие, дающее наибольший ожидаемый выигрыш

б) критерий опирается на принцип наибольшей осторожности, поскольку он основывается на выборе наилучшей из наихудших стратегий

в) рекомендует в условиях неопределенности выбирать ту стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации

г) устанавливает баланс между случаями крайнего пессимизма и крайнего оптимизма путем взвешивания обоих способов поведения соответствующими весами

6. Что характерно для критерия Вальда?

а) в условиях риска выбирается действие, дающее наибольший ожидаемый выигрыш

б) критерий опирается на принцип наибольшей осторожности, поскольку он основывается на выборе наилучшей из наихудших стратегий

в) рекомендует в условиях неопределенности выбирать ту стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации г) устанавливает баланс между случаями крайнего пессимизма и крайнего оптимизма путем взвешивания обоих способов поведения соответствующими весами

7. Что характерно для критерия Сэвиджа?

а) в условиях риска выбирается действие, дающее наибольший ожидаемый выигрыш

б) критерий опирается на принцип наибольшей осторожности, поскольку он основывается на выборе наилучшей из наихудших стратегий

в) рекомендует в условиях неопределенности выбирать ту стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации

г) устанавливает баланс между случаями крайнего пессимизма и крайнего оптимизма путем взвешивания обоих способов поведения соответствующими весами

8. Что характерно для критерия Гурвица?

а) в условиях риска выбирается действие, дающее наибольший ожидаемый выигрыш

б) критерий опирается на принцип наибольшей осторожности, поскольку он основывается на выборе наилучшей из наихудших стратегий

в) рекомендует в условиях неопределенности выбирать ту стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации

г) устанавливает баланс между случаями крайнего пессимизма и крайнего оптимизма путем взвешивания обоих способов поведения соответствующими весами

9. Что характерно для критерия Байеса?

а) в условиях риска выбирается действие, дающее наибольший ожидаемый выигрыш

б) критерий опирается на принцип наибольшей осторожности, поскольку он основывается на выборе наилучшей из наихудших стратегий

в) опирается одновременно на ММ-критерий и критерий максимального математического ожидания выигрыша

г) рекомендует в условиях риска выбирать ту стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации д) стратегия решений направлена на обеспечение максимума среднего выигрыша или минимума среднего риска

10. Что характерно для критерия Ходжа-Лемана?

а) в условиях риска выбирается действие, дающее наибольший ожидаемый выигрыш

б) критерий опирается на принцип наибольшей осторожности, поскольку он основывается на выборе наилучшей из наихудших стратегий

в) опирается одновременно на ММ-критерий и критерий максимального математического ожидания выигрыша

г) рекомендует в условиях риска выбирать ту стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации

11. Что характерно для критерия Гермейера?

а) в условиях риска выбирается действие, дающее наибольший ожидаемый выигрыш

б) при выборе стратегии игрок предполагает, что природа будет находиться в самом неблагоприятном для него состоянии

в) опирается одновременно на ММ-критерий и критерий максимального математического ожидания выигрыша

г) рекомендует в условиях риска выбирать ту стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации

12. Когда целесообразно использовать критерий Байеса?

а) при многократной повторяемости ситуации

б) при отсутствии уверенности в достоверности вероятностей состояний среды

в) если требуется обеспечить минимально возможную величину риска

13. Какая информация называется совершенной?

а) если она предоставляется бесплатно

б) если вероятность ее ошибки равна нулю

в) если она позволяет предсказать наиболее благоприятный сценарий будущего

3.7 Лабораторные работы

Лабораторная работа 1. Решение статистической игры в условиях полной неопределенности и при наличии вероятностей о состояниях природы.

Цель работы — научиться решать статистические игры с помощью Microsoft Excel, принимая решение в условиях полной неопределенности и в условиях риска.

Задание.

1. Фирма планирует реализацию своей продукции на рынках, учитывая возможные варианты покупательского спроса $П_j$, j=1,…,4 (низкий, средний, высокий, очень высокий). На предприятии имеется три стратегии сбыта товаров A_1, A_2, A_3. Объем товарооборота (ден. ед.), зависящий от стратегии и покупательского спроса, представлен следующей матрицей (n — номер варианта):

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	30+n	10	20	25+n/2
A_2	50	70-n	10+n/2	27
A_3	35-n/2	35	65+n/2	60-n/2

В этой задаче в качестве игрока «природа» выступает спрос покупателей. Найти стратегию сбыта, максимизирующую средний товарооборот фирмы, для следующих условий:

– вероятности спроса покупателей неизвестны. Обосновать свой выбор, используя критерии Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица;

– ориентировочные вероятности спроса покупателей известны. Вероятности $p(B_1)$, $p(B_2)$ и $p(B_3)$ заданы в таблице вариантов индивидуальных заданий. Обосновать свой выбор, используя критерии Байеса, Ходжа-Лемана, Гермейера.

Варианты индивидуальных заданий.

Вариант	Вероятность $p(B_1)$	Вероятность $p(B_2)$	Вероятность $p(B_3)$
1	0,51	0,12	0,22
2	0,32	0,25	0,14
3	0,40	0,13	0,30
4	0,45	0,20	0,12
5	0,36	0,30	0,21
6	0,25	0,35	0,18
7	0,33	0,19	0,29
8	0,48	0,14	0,19
9	0,16	0,22	0,34
10	0,40	0,15	0,23
11	0,50	0,10	0,11
12	0,43	0,21	0,13
13	0,48	0,33	0,08
14	0,15	0,40	0,17
15	0,58	0,11	0,16
16	0,22	0,24	0,37
17	0,21	0,32	0,20
18	0,27	0,29	0,15
19	0,30	0,44	0,10
20	0,20	0,23	0,33
21	0,23	0,24	0,40
22	0,41	0,09	0,21
23	0,17	0,51	0,22
24	0,28	0,19	0,36
25	0,44	0,17	0,25
26	0,12	0,25	0,35
27	0,19	0,18	0,42
28	0,29	0,16	0,24
29	0,11	0,39	0,31
30	0,52	0,13	0,16

4 КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ

4.1 Понятие о кооперативных играх

В экономике отдельные субъекты часто объединяются в коллективы, кооперации, союзы для достижения своих целей, поскольку коллективные действия часто оказываются более эффективными, чем действия отдельных участников. При этом возможны три вида взаимодействия:

– обмен информацией;

– договор о совместных действиях;

– объединение ресурсов и последующий выбор совместных действий на основе объединенных ресурсов.

Математические модели конфликтов, участники которых могут действовать коллективно, изучает теория кооперативных (коалиционных) игр. Кооперативной называется игра, в которой группы игроков (коалиции) могут объединять свои усилия. Этим она отличается от игр, в которых коалиции неприемлемы и каждый обязан играть за себя.

Коалиция представляет собой добровольное объединение участников игры для осуществления совместных действий. Общее решение всех участников коалиции определяет стратегию коалиции.

С математической точки зрения коалиция — это некоторое подмножество участников игры. Обозначим через N множество всех игроков, $N=\{1, 2, ..., n\}$, а через K — любое его подмножество. Пусть игроки из K договариваются между собой о совместных действиях и, таким образом, образуют одну коалицию. Число таких коалиций, состоящих из r игроков, равно числу сочетаний из n элементов по r, то есть C_n^r, а число возможных коалиций равно

$$\sum_{r=1}^{n} C_n^r = 2^n - 1.$$

Для исследования этих игр необходимо учитывать все возможные коалиции. Образовав коалицию, множество игроков K действует как один игрок против остальных игроков, и выигрыш этой коалиции зависит от применяемых стратегий каждым из n игроков. Как видно из приведенной формулы, число возможных коалиций возрастает с ростом числа игроков, поэтому трудности исследований возрастают с ростом n.

В соответствии с определением кооперативной игры, множество игроков n в совокупности обладает некоторым количеством определенного блага, которое необходимо разделить между участниками. Принципы этого деления и называются решениями кооперативной игры.

Решение может быть определено как для конкретной игры, так и для класса игр. Естественно, что наибольшей важностью обладают как раз те принципы, которые применимы в широком спектре случаев (то есть для обширного класса игр).

Решение может быть как однозначным (в этом случае для каждой игры решением является единственное распределение выигрышей), так и многозначным (когда для каждой игры могут быть определены несколько распределений).

Исход кооперативной игры при заданных стратегических возможностях игроков определяется:

– разбиением множества игроков на коалиции;

– множествами возможных стратегий каждой из коалиций;

– стратегиями, выбранными коалициями из своих наборов стратегий.

Игровые возможности каждой отдельной коалиции K могут быть определены с помощью ее характеристической функции $\upsilon(K)$, равной гарантированному математическому ожиданию выигрыша данной коалиции при применении ею смешанной стратегии, составленной из стратегий этой коалиции. Она характеризует величину выгоды, которую коалиция достигнет путем объединения участников. Характеристическая функция может иметь и отрицательные значения, если она характеризует величину затрат.

При анализе кооперативных игр подразумевается, что характеристические функции возможных коалиций и отдельных игроков заданы. Построение этих функций — задача той предметной области, для которой создается игровая модель.

Характеристическая функция υ называется простой, если она принимает только два значения: 0 и 1. В случае простой характеристической функции коалиции K, для которых $\upsilon(K)=1$, называются выигрывающими, а коалиции K, для которых $\upsilon(K) = 0$, — проигрывающими. Простые характеристические функции возникают, например, в условиях голосования, когда коалиция является выигрывающей, если она набирает более половины голосов.

Если в простой характеристической функции υ выигрывающими являются те и только те коалиции, которые содержат фиксированную непустую коалицию R, то характеристическая функция υ, обозначаемая в этом случае через υ_R, называется простейшей.

Игра называется существенной, если характеристическая функция максимальной коалиции больше суммарного выигрыша отдельных участников:

$$\upsilon(N) > \sum_{i \in N} \upsilon(i).$$

Иначе игра называется несущественной. Для несущественных игр коалиции создавать бессмысленно.

В теории кооперативных игр основной единицей анализа является коалиция, а целью — определение наиболее выгодных для игроков коалиций и деление выигрыша между участниками коалиции, которое называется дележом. Поскольку коалиции создаются с целью извлечения дополнительной выгоды из сотрудничества, выигрыш коалиции всегда должен быть больше суммарного выигрыша ее отдельных участников.

4.2 Принцип оптимальности в форме *C*-ядра

Понятие ядра является ключевым принципом оптимальности для теории кооперативных игр. Оно связано с понятием равновесия. Ядро представляет собой исход совместных действий игроков, который нельзя улучшить никакой коалицией участников экономического процесса.

Экономическое содержание понятия ядра связано с рыночной деятельностью большого числа экономических субъектов, каждый из которых обладает предпочтениями и располагает некоторым количеством наличных ресурсов. Предполагается, что экономическая система обеспечивает свободу заключения контрактов или свободу образования коалиций, которые улучшают благосостояние участников экономического процесса. Распределение благ между субъектами, которое является оптимальным при заданных ограничениях, входит в ядро дележей.

С-ядро — принцип оптимальности в теории кооперативных игр, который представляет собой множество эффективных распределений выигрыша, устойчивых к отклонениям любой коалиции игроков. Это множество недоминируемых «вполне устойчивых» дележей кооперативной игры.

Дележом в условиях характеристической функции υ называется вектор $x = (x_1, ..., x_n)$, удовлетворяющий условиям индивидуальной и коллективной рациональности.

Условие индивидуальной рациональности заключается в том, что любой игрок должен получить выигрыш в коалиции не меньше, чем он получил бы, не участвуя в ней:

$$x_i \geq \upsilon(i) \text{ для } i \in N,$$

где x_i — выигрыш i-го игрока.

Условие коллективной рациональности заключается в том, что сумма выигрышей игроков должна соответствовать значению характеристической функции:

$$\sum_{i \in N} x_i = \upsilon(N),$$

так как если сумма выигрышей всех игроков меньше, чем $\upsilon(N)$, то игрокам незачем вступать в коалицию. Кроме того, сумма выигрышей не может превышать то значение $\upsilon(N)$, которое есть у игроков.

Классической кооперативной игрой называется система $\{N, \upsilon\}$, состоящая из множества игроков, характеристической функции над этим множеством и множеством дележей, удовлетворяющих вышеприведенным соотношениям в условиях характеристической функции.

Делёж x доминирует y, если существует такая коалиция K, для которой делёж x доминирует y. Наличие доминирования $x > y$ означает, что в множестве игроков N найдётся коалиция, для которой x предпочтительнее y. Невозможно доминирование по коалиции, состоящей из одного игрока или из всех игроков.

Чтобы делёж x принадлежал C-ядру кооперативной игры с характеристической функцией υ, необходимо и достаточно, чтобы для любой коалиции K выполнялось неравенство $\upsilon(K) \le \sum_{i \in K} x_i$.

C-ядро игры может быть очень большим, совпадая с множеством всех дележей, и может оказаться пустым, если требования всех коалиций одновременно не могут быть удовлетворены. Это возникает, например, когда есть слишком сильные коалиции.

Условием существования непустого C-ядра для кооперативных игр 3-х лиц является соблюдение неравенства:

$$\upsilon(1,2) + \upsilon(1,3) + \upsilon(2,3) \le 2\upsilon(1,2,3).$$

Рассмотрим принцип оптимальности в форме C-ядра на классическом примере игры, получившей название «Оркестр». Три музыканта (1, 2, 3) могут вместе получить за совместный концерт 10 д.е. Совместное выступление музыкантов 1 и 2 оценивается в 8 д.е., 1 и 3 — 5 д.е., 2 и 3 — 6,5 д.е. За сольный концерт музыкант 1 может получить 2 д.е., музыкант 2 — 3 д.е., а музыкант 3 один не выступает. Определить центр C-ядра, если оно не пустое.

Обозначим доходы каждого из музыкантов x_1, x_2, x_3. Проверим условие существования непустого C-ядра:

$$8+5+6{,}5=19{,}5\le 2\cdot 10.$$

Неравенство соблюдается, поэтому C-ядро не пустое.

C-ядро данной игры задается системой, содержащей 4 уравнения и 3 неизвестных:

$$x_1+x_2+x_3 = 10, \tag{4.1}$$

$$x_1+x_2 \ge 8, \tag{4.2}$$

$$x_1+x_3 \ge 5, \tag{4.3}$$

$$x_2+x_3 \ge 6{,}5. \tag{4.4}$$

Кроме того, должны соблюдаться и ограничения, вытекающие из условия индивидуальной рациональности:

$$x_1 \ge 2;\ x_2 \ge 3;\ x_3 \ge 0.$$

Для определения координат вершин *C*-ядра используем системы трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными, содержащие уравнение (4.1) и два уравнения из числа оставшихся трех уравнений.

Рассмотрим решение этих систем на примере системы

$$x_1+x_2+x_3=10, \tag{4.5}$$

$$x_1+x_2\geq 8, \tag{4.6}$$

$$x_1+x_3\geq 5, \tag{4.7}$$

Вычитая из уравнения (4.5) уравнение (4.6), получим $x_3=2$. Вычитая из уравнения (4.5) уравнение (4.7), получим $x_2=5$. После подстановки в уравнение (4.6) значения x_2 получим $x_1=3$.

Аналогично, решая систему уравнений (4.1), (4.2), (4.4), найдем координаты следующей вершины: $x_1=3{,}5$; $x_2=4{,}5$; $x_3=2$.

Решая систему уравнений (4.1), (4.3), (4.4), получим координаты третьей вершины: $x_1=3{,}5$; $x_2=5$; $x_3=1{,}5$.

Найденные координаты трех точек соответствуют вершинам треугольника, определяющего *C*-ядро дележей игроков. В качестве компромиссного решения обычно выбирают центр *C*-ядра. Он находится как среднее арифметическое крайних точек:

$$x_1=\frac{1}{3}(3+3{,}5+3{,}5)=3{,}33,$$

$$x_2=\frac{1}{3}(5+4{,}5+5)=4{,}83,$$

$$x_3=\frac{1}{3}(2+2+1{,}5)=1{,}83.$$

Наличие пустого *C*-ядра не означает невозможности кооперации всех игроков. Правило, ставящее в соответствие каждой кооперативной игре единственное распределение $x = (x_1, ..., x_n)$ прибыли (или затрат) $\upsilon(N)$, удовлетворяющее некоторому принципу оптимальности, называется оператором значения, а само распределение x — значением игры. На практике при решении экономических задач наиболее популярными значениями являются *N*-ядро и цена Шепли.

4.3 Принцип оптимальности в форме *N*-ядра

Принцип *N*-ядра (nucleolus) основан на минимизации степени неудовлетворенности выигрышем подмножеств участников игры (коалиций). Предполагается, что чем меньше неудовлетворенность дележом игроков, входящих в коалицию, тем этот дележ ближе к оптимальному.

Понятие *N*-ядра игры базируется на понятии эксцесса коалиции. Эксцесс коалиции *K* определяется как вектор

$$e(K, x) = \upsilon(K) - x(K)$$

и интерпретируется как мера неудовлетворенности коалиции распределением выигрышей, которое предписывается вектором *x*.

N-ядро представляет собой распределение выигрыша, при котором степень неудовлетворенности всех коалиций, измеряемая величиной их эксцесса, будет наименьшей. Доказано, что *N*-ядро любой кооперативной игры всегда существует и состоит из одной точки, и если *C*-ядро игры не пусто, то *N*-ядро принадлежит ему, занимая центральное место внутри *C*-ядра.

Преимущество такого подхода заключается в том, что он позволяет выйти на единственный оптимальный дележ, который должен удовлетворить всех участников коалиции, причем его можно найти путем сведения к следующей задаче оптимизации:

$$\max_K e(K, x) \to \min \tag{4.8}$$

с ограничениями

$$x_i \geq \upsilon(i) \text{ для } i \in N, \tag{4.9}$$

$$\sum_{i \in N} x_i = \upsilon(N). \tag{4.10}$$

Рассмотрим принцип определения *N*-ядра в среде Excel на примере игры «Оркестр», которая описана в предыдущем подразделе. Обозначим доходы каждого из музыкантов x_1, x_2, x_3. Заносим на лист Excel исходные данные о значениях характеристических функций для всех возможных коалиций и индивидуальных игроков, как показано на рисунке 4.1.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Значения характеристических функций			Коэффициенты				
2								
3	Коалиция	$\upsilon(K)$		при x1	при x2	при x3	Сумма x	Эксцесс
4	ABC	10		1	1	1	0,000	10,000
5	AB	8		1	1		0,000	8,000
6	AC	5		1		1	0,000	5,000
7	BC	6,5			1	1	0,000	6,500
8								max
9	A	B	C					8,000
10	2	3	0					
11								
12	x1	x2	x3					
13								

Рисунок 4.1 — Пример заполнения листа Excel для определения N-ядра

В ячейки D4:F7 заносим значения коэффициентов при x_1, x_2, x_3 в выражениях для ограничений (4.1)-(4.4). В ячейку G4 вводим формулу для расчета значения первого ограничения

=СУММПРОИЗВ($A$13:$C$13;D4:F4)

и распространяем ее на ячейки G5:G7 для расчета значений остальных ограничений.

Для расчета эксцессов коалиций в ячейку H4 вводим формулу =B4-G4 и распространяем ее на ячейки H5:H7. В ячейку H9 вводим формулу для определения максимального значения эксцесса из всех возможных коалиций, кроме коалиции ABC:

=МАКС(H5:H7).

После этого следует вызвать инструмент Excel **Поиск решения**. Для этого необходимо дать команду **Данные** → **Поиск решения**. В окне, появившемся на экране, следует задать параметры поиска решения. Пример задания параметров в окне средства **Поиск решения** показан на рисунке 4.2.

Для задания ограничений используется кнопка **Добавить**. Для коалиции ABC должно соблюдаться ограничение (4.10), для определяемых значений x_1, x_2, x_3 — ограничения (4.9).

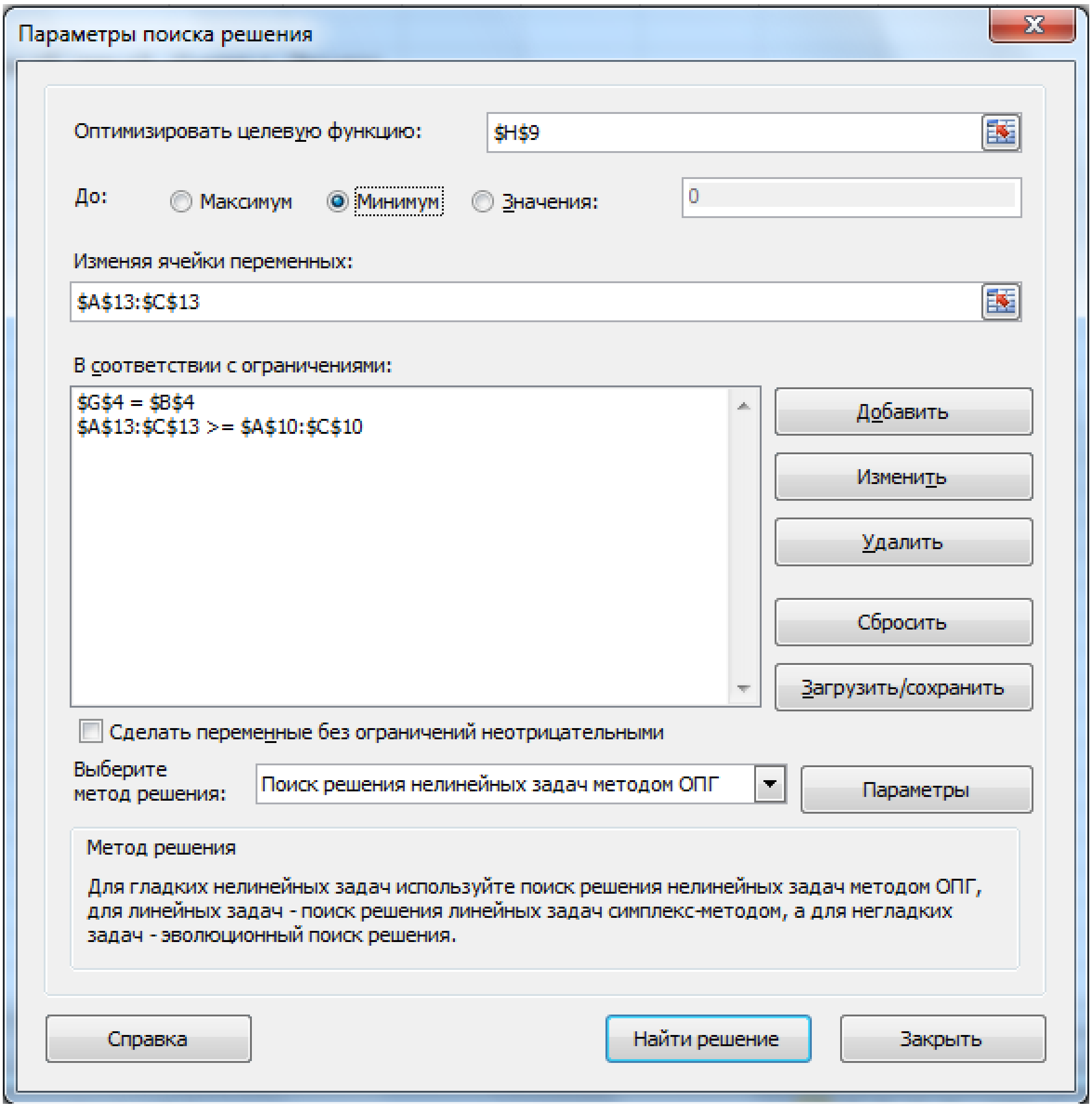

Рисунок 4.2 — Вид окна Excel для задания параметров поиска решения

Поскольку в процессе решения задачи была использована функция определения максимального значения, задача определения N-ядра является нелинейной, и для ее решения следует выбирать метод обобщенного приведенного градиента (ОПГ), предназначенный для решения нелинейных задач. Для получения решения необходимо щелкнуть по кнопке **Найти решение**. Вид окна Excel в результате решения задачи по определению N-ядра для игры «Оркестр» показан на рисунке 4.3.

Как видно из этого рисунка, полученные результаты совпадают со значениями центра C-ядра.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Значения характеристических функций			Коэффициенты				
2								
3	Коалиция	$\upsilon(K)$		при x1	при x2	при x3	Сумма x	Эксцесс
4	ABC	10		1	1	1	10,000	0,000
5	AB	8		1	1		8,167	-0,167
6	AC	5		1		1	5,167	-0,167
7	BC	6,5			1	1	6,667	-0,167
8								max
9	A	B	C					-0,167
10	2	3	0					
11								
12	x1	x2	x3					
13	3,333	4,833	1,833					

Рисунок 4.3 — Вид окна Excel в результате решения задачи по определению *N*-ядра для игры «Оркестр»

Приведем еще один пример. Три предпринимателя (A, B и C) принимают решение о создании совместного предприятия. Каждый из них зарабатывает 9, 14 и 25 ден. ед. соответственно. Объединившись в коалиции, они смогут получить: A и B — 30; A и C — 43; B и C — 54; A, B и C — 61 ден. ед. Определить *N*-ядро этой кооперативной игры, которую назовем «Создание СП».

Обозначим доходы каждого из предпринимателей x_1, x_2, x_3. Проверим условие существования непустого *C*-ядра:

$$30+43+54=127>2\cdot 61,$$

что свидетельствует о наличии пустого *C*-ядра.

Для определения *N*-ядра в среде Excel выполняем те же действия, что и для игры «Оркестр». В результате получено решение, изображенное на рисунке 4.4.

N-ядро стремится максимизировать суммарный доход каждой коалиции, т.е. гарантирует внешнюю устойчивость, игнорируя устойчивость внутреннюю. При его определении рассматриваются эксцессы коалиций без учета их размеров, поэтому единицы прибыли (затрат) для одного игрока и коалиции из оставшихся (n-1) игроков будут равноценны. Участники игры могут посчитать, что это несправедливо.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Значения характеристических функций			Коэффициенты				
2								
3	Коалиция	υ(K)		при x1	при x2	при x3	Сумма x	Эксцесс
4	ABC	61		1	1	1	61,000	0,000
5	AB	30		1	1		28,923	1,077
6	AC	43		1		1	41,077	1,923
7	BC	54			1	1	52,000	2,000
8								max
9	A	B	C					2,000
10	9	14	25					
11								
12	x1	x2	x3					
13	9,000	19,923	32,077					
14								

Рисунок 4.4 — Вид окна Excel в результате решения задачи по определению N-ядра игры «Создание СП»

4.4 Принцип оптимальности в форме вектора Шепли

Американским экономистом Ллойдом Шепли предложен такой принцип оптимальности распределения выигрыша, при котором выигрыш каждого игрока равен его среднему вкладу в благосостояние тотальной коалиции при определенном механизме ее формирования. Этот подход основан на принципе «справедливого дележа», исходя из вклада каждого игрока в выигрыш коалиции.

Вкладом i-того игрока называется величина

$$\upsilon(K_i)-\upsilon(K \setminus i),$$

где $\upsilon(K_i)$ — характеристическая функция кооперативной игры с участием игрока i;

$\upsilon(K \setminus i)$ — характеристическая функция кооперативной игры без игрока i.

В математике операция «\» обозначает разность двух множеств. Ее результатом является третье множество, содержащее все элементы первого множества за исключением тех, которые входят во второе множество. То есть вклад игрока — это приращение выигрыша коалиции при его участии по сравнению с выигрышем коалиции без этого игрока.

Вектор Шепли, или значение (цена) Шепли (Shapley value) представляет собой распределение, в котором выигрыш каждого игрока Φ_i равен его среднему вкладу в соответствующие коалиции K. В форме, практически реализуемой для расчетов, значение Шепли для каждого игрока имеет вид

$$\Phi(\upsilon)_i = \sum_{i \in K} \frac{(k-1)!\,(n-k)!}{n!} \left[\upsilon(K) - \upsilon(K \setminus i)\right], \tag{4.11}$$

где n — количество игроков;

k — количество участников коалиции K.

Вектор Шепли удовлетворяет следующим свойствам (аксиомы Шепли):

– линейность (аксиома агрегации) — $\Phi(\upsilon)$ представляет собой линейный оператор, т.е. при участии игроков в двух играх их выигрыши в отдельных играх должны складываться. Это означает, что для любых двух игр с характеристическими функциями $\upsilon 1$ и $\upsilon 2$

$$\Phi(\upsilon 1 + \upsilon 2) = \Phi(\upsilon 1) + \Phi(\upsilon 2),$$

а для любой игры с характеристической функцией υ и любого a

$$\Phi(a\upsilon) = a\Phi(\upsilon);$$

– симметричность (аксиома симметрии) — игроки, одинаково входящие в игру, должны получать одинаковые выигрыши, т.е. получаемый игроком выигрыш не зависит от его номера. Это означает, что если игра $\upsilon 2$ получена из игры $\upsilon 1$ перестановкой игроков, то ее вектор Шепли $\Phi(\upsilon 2)$ есть вектор $\Phi(\upsilon 1)$ с соответствующим образом переставленными элементами;

– аксиома болвана — при распределении общего выигрыша не должно ничего выделяться «бесполезному игроку», не вносящему вклада ни в какую коалицию. В теории кооперативных игр такой игрок называется болваном, т.е. для такого игрока i для любой коалиции K, содержащей i,

$$\upsilon(K_i) - \upsilon(K \setminus i) = 0$$

и $\Phi(\upsilon)_i = 0$. Кроме того, не должно ничего выделяться на долю «посторонних» игроков, не принадлежащих этой коалиции, но и ничего не должно сниматься с них;

– аксиома эффективности — вектор Шепли позволяет полностью распределить имеющийся в распоряжении тотальной коалиции выигрыш, т.е. сумма компонент вектора $\Phi(\upsilon)$ равна $\upsilon(N)$.

Доказано, что для любой кооперативной игры существует единственное распределение выигрыша, удовлетворяющее перечисленным аксиомам, и это распределение — вектор Шепли. Это утверждение называется теоремой Шепли. Если вектор Шепли принадлежит *С*-ядру, то этот дележ одновременно справедлив и устойчив, но вектор Шепли может и не принадлежать непустому *С*-ядру.

Рассмотрим расчет компонентов вектора Шепли для всех возможных коалиций на примере игры «Создание СП», рассмотренной в предыдущем подразделе. Вид листа Excel, на котором реализуется расчет, показан на рисунке 4.5.

В ячейки A1:B9 заносим данные о характеристических функциях всех возможных коалиций и значение 0 — для пустой коалиции, которой даем имя «-» (символ минус).

Выполняем сортировку полученной таблицы по полю Коалиция. Для этого надо выделить ячейки A1:B9, дать команду **Данные → Сортировка**. На экране появится диалоговое окно **Сортировка диапазона**, в котором необходимо задать параметры сортировки. В списке **Сортировать по** необходимо выбрать поле Коалиция, по которому будет выполняться сортировка, и установить переключатель **по возрастанию**. После этого полученной таблице присваиваем имя. Для этого надо выделить ячейки A2:B9, вызвать контекстное меню, выбрать **Присвоить имя**, в появившемся окне ввести имя таблицы (например, Табл_ф).

Для расчета коэффициентов, стоящих в формуле (4.11) перед значениями характеристических функций, в ячейки D2:E6 заносим значения количества игроков *n* и участников коалиции *k*.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Коалиция	$\upsilon(K)$		n	k	nk	Коэф
2	-	0		2	1	21	0,500
3	A	9		2	2	22	0,500
4	AB	30		3	1	31	0,333
5	ABC	61		3	2	32	0,167
6	AC	43		3	3	33	0,333
7	B	14					
8	BC	54					
9	C	25					
10							
11	Игроки	Коалиция	Коалиция без игрока		nk	Компоненты $\Phi(u)$	Ф(u)
12			**n=**	**3**			
13	A	ABC	BC		33	2,333	11
14	A	AB	B		32	2,667	
15	A	AC	C		32	3,000	
16	A	A	-		31	3,000	
17	B	ABC	AC		33	6,000	19
18	B	AB	A		32	3,500	
19	B	BC	C		32	4,833	
20	B	B	-		31	4,667	
21	C	ABC	AB		33	10,333	31
22	C	AC	A		32	5,667	
23	C	BC	B		32	6,667	
24	C	C	-		31	8,333	
25			**n=**	**2**			
26	A	AB	B		22	8,000	12,5
27	A	A	-		21	4,500	
28	B	AB	A		22	10,500	17,5
29	B	B	-		21	7,000	
30	A	AC	C		22	9,000	13,5
31	A	A	-		21	4,500	
32	C	AC	A		22	17,000	29,5
33	C	C	-		21	12,500	
34	B	BC	C		22	14,500	21,5
35	B	B	-		21	7,000	
36	C	BC	B		22	20,000	32,5
37	C	C	-		21	12,500	

Рисунок 4.5 — Вид листа Excel для расчета компонентов вектора Шепли

С целью объединения значений n и k, что удобно для последующего использования коэффициентов, в ячейку F2 вводится формула =D2&E2, в которой символ «&» используется для объединения содержимого ячеек D2 и E2 (результат выдается в текстовом формате). Распространяем эту формулу на ячейки F3:F6. В ячейку G2 вводим формулу

=ФАКТР(E2-1)*ФАКТР(D2-E2)/ФАКТР(D2),

в которой ФАКТР — функция для вычисления факториала. Распространяем эту формулу на ячейки G3:G6.

Для выполнения сортировки полученной таблицы необходимо выделить ячейки D1:G6, дать команду **Данные → Сортировка**, в списке **Сортировать по** выбрать поле nk, по которому будет выполняться сортировка, и установить переключатель **по возрастанию**. Затем выделяем ячейки F2:G6 и присваиваем таблице имя Табл_коэф.

После этого в ячейках A11:G11 формируем шапку таблицы, вводим данные об игроках и их возможных коалициях (столбцы А и В), а также возможные значения n (ячейки D12 и D25). Для расчета коэффициентов вектора Шепли в ячейки Excel C13, E13, F13, G13 вводим формулы, приведенные в таблице 4.1, и распространяем их на ячейки соответствующих столбцов.

Таблица 4.1 — Формулы для расчета коэффициентов вектора Шепли в Excel

Ячейка	Формула
C13	=ЕСЛИ(ДЛСТР(B13)=1;"-";ПОДСТАВИТЬ(B13;A13;;1))
E13	=$D$12&ДЛСТР(B13)
F13	=ВПР(E13;Табл_коэф;2)*(ВПР(B13;Табл_ф;2)-ВПР(C13;Табл_ф;2))
G13	=СУММ(F13:F16)
E26	=$D$25&ДЛСТР(B26)

Поясним назначение функций, используемых в формулах.

Текстовая функция ДЛСТР определяет длину текстовой строки.

Текстовая функция ПОДСТАВИТЬ имеет следующий формат:

ПОДСТАВИТЬ(текст;стар_текст;нов_текст;номер_вхождения),

где **текст** — текст либо ссылка на ячейку, содержащую текст, в котором подставляются знаки;

стар_текст — заменяемый текст;

нов_текст — текст, на который заменяется **стар_текст**;

номер_вхождения — определяет, какое вхождение **стар_текст** нужно заменить на **нов_текст**.

Функция **ВПР** ищет значение в крайнем левом столбце таблицы (например, Табл_коэф), и возвращает значение ячейки, находящейся в указанном столбце той же строки.

Формула, введенная в столбец С, выводит в ячейку наименование коалиции без игрока, для которого вычисляется участие, или символ «минус», если игроков не осталось.

Для удобства сравнения вычисленных доходов предпринимателей при вхождении их в различные коалиции представим результаты вычислений в виде таблицы 4.2.

Таблица 4.2 — Доходы предпринимателей при индивидуальной работе и вхождении в различные коалиции

Коалиции	Предприниматели		
	А	В	С
АВС	11	19	31
АВ	12,5	17,5	
АС	13,5		29,5
ВС		21,5	32,5
-	9	14	25

Как видно из приведенных результатов, при вхождении в любую из коалиций доходы всех предпринимателей повышаются по сравнению с их индивидуальной работой. Наиболее выгодными коалициями являются: для предпринимателя А — АС; для предпринимателей В и С — ВС.

4.5 НМ-решения

Существует еще принцип оптимальности, предполагающий нахождение множества не доминирующих друг над другом дележей, которые в совокупности доминируют над всеми остальными дележами — решения по Нейману-Моргенштерну (или НМ-решения). Понятие «НМ-решения» было введено Дж. фон Нейманом и О. Моргенштерном. Они предложили рассматривать в качестве решений кооперативной игры не отдельный дележ или множество дележей (как в принципе *С*-ядра), а множество подмножеств множества дележей, обладающих определенными свойствами.

В основу НМ-решений положены понятия внутренней и внешней устойчивости. Внутренняя устойчивость гарантирует равноправность дележей одного НМ-решения — в НМ-решении нельзя найти такую пару дележей, чтобы один из них доминировал другой. Внешняя устойчивость заключается в том, что для любого произвольного дележа, не принадлежащего данному НМ-решению, найдется доминирующий его дележ в этом НМ-решении.

НМ-решение оперирует дележом как выигрышем максимальной коалиции. Для распределения выигрыша между игроками они должны сначала определить, из какого НМ-решения будут выбирать дележ, а затем выбирать дележ из множества дележей, принадлежащих этому НМ-решению. Если *С*-ядро не пусто и существует НМ-решение, то оно содержит в себе *С*-ядро.

В настоящее время принцип имеет лишь теоретическое обоснование и не применяется на практике, так как не разработаны критерии, позволяющие судить о наличии у конкретных кооперативных игр НМ-решений. Обычно игра имеет множество НМ-решений, что ограничивает практическое применение этого понятия.

4.6 Игры, соответствующие задаче о назначениях

Теория игр занимается изучением конфликтов, то есть ситуаций, в которых группе людей необходимо выработать какое-либо решение, касающееся их всех. Примером такой игры является известная задача о назначениях. Ее суть заключается в следующем. Имеется n различных работ, каждую из которых может выполнить любой из n привлеченных исполнителей. Стоимость выполнения i-й работы j-м исполнителем известна и равна c_{ij} (в условных денежных единицах). Необходимо распределить исполнителей по работам (назначить одного исполнителя на каждую работу) так, чтобы минимизировать суммарные затраты, связанные с выполнением всего комплекса работ.

Такие игры могут решаться несколькими способами. В качестве примера рассмотрим способ, основанный на сведении задачи к задаче линейного программирования.

Введем переменные x_{ij}, принимающие значение 1 в случае, когда i-ю работу выполняет j-й исполнитель, и значение 0 во всех остальных случаях, $i,j = 1,\ldots,n$. Тогда ограничение

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = 1,\ldots,n$$

гарантирует выполнение каждой работы лишь одним исполнителем, ограничение

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = 1,\ldots,n$$

гарантирует, что каждый из исполнителей будет выполнять лишь одну работу. Стоимость выполнения всего комплекса работ равна $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$.

Таким образом, задачу о назначениях можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min; \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = 1,\ldots,n; \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = 1,\ldots,n; \\ x_{ij} \in \{0,1\}, i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,n. \end{cases}$$

При этом условие $x_{ij} \in \{0,\ 1\}$, $i,j = 1,\ldots,n$ означает, что переменные x_{ij} должны быть целыми и могут иметь только два значения: 0 и 1, т.е. быть бинарными. При этом в любом допустимом решении лишь n переменных могут принимать значения 1. Задачу о назначениях можно рассматривать и решать как задачу линейного программирования.

На практике встречаются задачи о назначениях, в постановках которых параметр c_{ij} для $i,j = 1,\ldots,n$ понимается как эффективность выполнения i-й работы j-м исполнителем. В этих случаях нужно так распределить работы между исполнителями, чтобы суммарная эффективность их выполнения была бы максимальной, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \max,$$

где максимум ищется при указанных выше ограничениях.

Рассмотрим решение задачи о назначениях на следующем примере. У автотранспортной компании имеется n автомобилей разных марок. Они имеют разные характеристики: грузоподъёмность q_i (т) и удельные эксплуатационные затраты c_i (д.е./км). Компания получила заказы от m клиентов на перевозку грузов. В каждом заказе указан объём перевозимого груза Q_j (т) и расстояние перевозки L_j (км). Требуется оптимальным образом назначить автомобили на рейсы для выполнения заказов клиентов, полагая тарифы на перевозки одинаковыми.

Поскольку тарифы одинаковые, в качестве целевой функции можно выбрать эксплуатационные затраты, которые необходимо минимизировать путём оптимального распределения автомобилей по клиентам.

Так как в общем случае $m \neq n$, задачу необходимо сбалансировать путём введения фиктивных заказов или фиктивных автомобилей. При $n>m$ заказов меньше, чем автомобилей, что означает избыток провозных возможностей. В этом случае дополнительно вводятся n-m фиктивных клиентов с нулевыми объёмами заказов (т.е. Q_j=0 и L_j=0). Так как для фиктивных клиентов заказы отсутствуют, для их выполнения будут назначаться самые неэффективные по затратам автомобили. Практически выполнение заказа фиктивного клиента означает резервирование автомобиля (он остаётся в парке).

При $n<m$ заказов больше, чем автомобилей, т.е. наблюдается недостаток провозных возможностей. В этом случае дополнительно вводится m-n фиктивных автомобилей с бесконечно большими удельными затратами (т.е. $c_j \to \infty$). Практически это означает отказ от самых невыгодных в смысле затрат заказов.

В результате получим сбалансированную задачу, описываемую квадратной матрицей эксплуатационных затрат размерностью $k \times k$, где k=max$\{m,n\}$. Алгоритм решения данной задачи сводится к следующему.

Количество рейсов i-го автомобиля у j-го клиента вычисляется по формуле

$$z_{ij} = \frac{Q_j}{q_i} \text{ для всех } i=1,2,\ldots,k; j=1,2,\ldots,k.$$

Количество рейсов — величина целочисленная, принимающая значение, большее или равное 1, поэтому полученный результат следует округлить в большую сторону.

Пробег i-го автомобиля у j-го клиента вычисляется по формуле

$$R_{ij} = z_{ij} \cdot L_j .$$

Эксплуатационные затраты вычисляются по формуле

$$S_{ij} = R_{ij} \cdot c_i = z_{ij} \cdot L_j \cdot c_i , \qquad (4.12)$$

где c_i — удельные эксплуатационные затраты, связанные с назначением i-го автомобиля для обслуживания j-го клиента.

Дополнительная целочисленная переменная логического (булевого) типа принимает значения

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{при назначении} \\ 0 & \textit{иначе} \end{cases} .$$

Целевая функция имеет вид

$$F = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} S_{ij} \cdot x_{ij} \to \min$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{k} x_{ij} = 1; \quad \sum_{j=1}^{k} x_{ij} = 1, \quad x_{ij} \geq 0 \text{ целое для всех } i, j = 1, 2, \ldots, k.$$

Найдем решение задачи в Excel, используя следующие исходные данные. Автотранспортная компания располагает 7 автомобилями разных марок: 3 автомобиля марки A; 2 автомобиля марки B; 1 автомобиль марки C; 1 автомобиль марки D.

Характеристики автомобилей представлены в таблице 4.3.

Таблица 4.3 — Характеристики автомобилей

Характеристики		Марка автомобиля			
		A	B	C	D
Грузоподъёмность, т	q_i	10	8	6	3,6
Удельные затраты, д.е./км	c_i	0,75	0,5	0,33	0,25

Компанией получены заказы от 6 клиентов. Характеристики заказов представлены в таблице 4.4.

Таблица 4.4 — Характеристики заказов

Характеристики		Клиенты					
		1	2	3	4	5	6
Объём груза, т	Q_j	150	100	250	79	60	17
Расстояние, км	L_j	60	40	80	140	50	120

Рекомендуемый порядок решения задачи следующий. Заносим на лист Excel исходные данные и необходимые расчетные формулы. Вид листа Excel для решения задачи о назначениях, содержащий исходные данные и результаты выполненных впоследствии расчетов, показан на рисунке 4.6.

В ячейки D3:J4 вводим данные о характеристиках автомобилей, приведенные в таблице 4.3, в ячейки B9:C14 — данные о характеристиках заказов, приведенные в таблице 4.4.

Так как заказов меньше имеющихся у компании автомобилей, необходимо ввести фиктивного клиента с нулевым объёмом перевозок.

Для расчета эксплуатационных затрат по формуле (4.12) в ячейку D9 вводим формулу

=ОКРУГЛВВЕРХ($B9/D$4;0)*$C9*D$3

и распространяем ее на область ячеек D9:J15. Поскольку количество рейсов — величина целочисленная, для ее округления до 0 знаков после запятой в большую сторону используется функция Excel ОКРУГЛВВЕРХ.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1			Характеристики автомобилей							
2										
3			**c**	0,75	0,75	0,75	0,5	0,5	0,33	0,25
4			**q**	10	10	10	8	8	6	3,6
5										
6			Матрица эксплуатационных затрат S							
7										
8	№ заказа	**Q**	**L**	1	2	3	4	5	6	7
9	1	150	60	675	675	675	570	570	495	630
10	2	100	40	300	300	300	260	260	224,4	280
11	3	250	80	1500	1500	1500	1280	1280	1108,8	1400
12	4	79	140	840	840	840	700	700	646,8	770
13	5	60	50	225	225	225	200	200	165	212,5
14	6	17	120	180	180	180	180	180	118,8	150
15	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16										
17		Матрица назначений x								
18										
19	№ заказа	1	2	3	4	5	6	7	Сумма	
20	1	0	0	0	0	1	0	0	1	
21	2	0	1	0	0	0	0	0	1	
22	3	0	0	0	0	0	1	0	1	
23	4	0	0	0	1	0	0	0	1	
24	5	1	0	0	0	0	0	0	1	
25	6	0	0	0	0	0	0	1	1	
26	7	0	0	1	0	0	0	0	1	
27	Сумма	1	1	1	1	1	1	1		
28										
29		Матрица затрат								
30										
31	№ заказа	1	2	3	4	5	6	7	Сумма	
32	1	0	0	0	0	570	0	0	570	
33	2	0	300	0	0	0	0	0	300	
34	3	0	0	0	0	0	1108,8	0	1108,8	
35	4	0	0	0	700	0	0	0	700	
36	5	225	0	0	0	0	0	0	225	
37	6	0	0	0	0	0	0	150	150	
38	7	0	0	0	0	0	0	0	0	
39	Сумма	225	300	0	700	570	1108,8	150		
40						Суммарные затраты			3053,8	

Рисунок 4.6 — Вид листа Excel для решения задачи о назначениях

Область ячеек B20:H26 резервируем под переменные логического типа x_{ij}, характеризующие назначение i-го автомобиля на обслуживание j-го заказа. Первоначально эти ячейки остаются пустыми. В ячейку I20 вводим формулу

=СУММ(B20:H20)

и распространяем ее на область ячеек I21:I26. В ячейку B27 вводим формулу

=СУММ(B20:B26)

и распространяем ее на область ячеек C27:H27.

Для формирования матрицы затрат, отражающей затраты на обслуживание i-м автомобилем j-го заказа, в ячейку B32 вводим формулу =D9*B20 и распространяем ее на область ячеек B32:H38. В ячейку I32 вводим формулу

=СУММ(B32:H32)

и распространяем ее на область ячеек I33:I38. В ячейку B39 вводим формулу

=СУММ(B32:B38)

и распространяем ее на область ячеек C39:H39.

Для расчета суммарных затрат на перевозки в ячейку I40 вводим формулу:

=СУММ(I32:I38).

После этого следует вызвать инструмент Excel **Поиск решения**. В окне, появившемся на экране, следует задать параметры поиска решения, как показано на рисунке 4.7. Поскольку данная задача линейна, для ее решения следует выбирать «Поиск решения линейных задач симплекс-методом».

Для получения решения необходимо щелкнуть по кнопке **Найти решение**.

После решения в ячейках B20:H26 (матрица назначений x) отразится результат оптимального закрепления автомобилей за заказчиками, в ячейках B32:H38 — соответствующие этому закреплению затраты на перевозки i-тым автомобилем j-му клиенту, а в ячейке I40 — минимально возможные суммарные затраты на перевозки. Как видно из рисунка 4.6, оптимальный план назначения автомобилей для выполнения заказов следующий: автомобили 1, 2, 4, 5, 6, 7 назначены на выполнение соответствующих заказов 1-6, автомобиль 3, назначенный на выполнение фиктивного заказа 7, будет простаивать в парке.

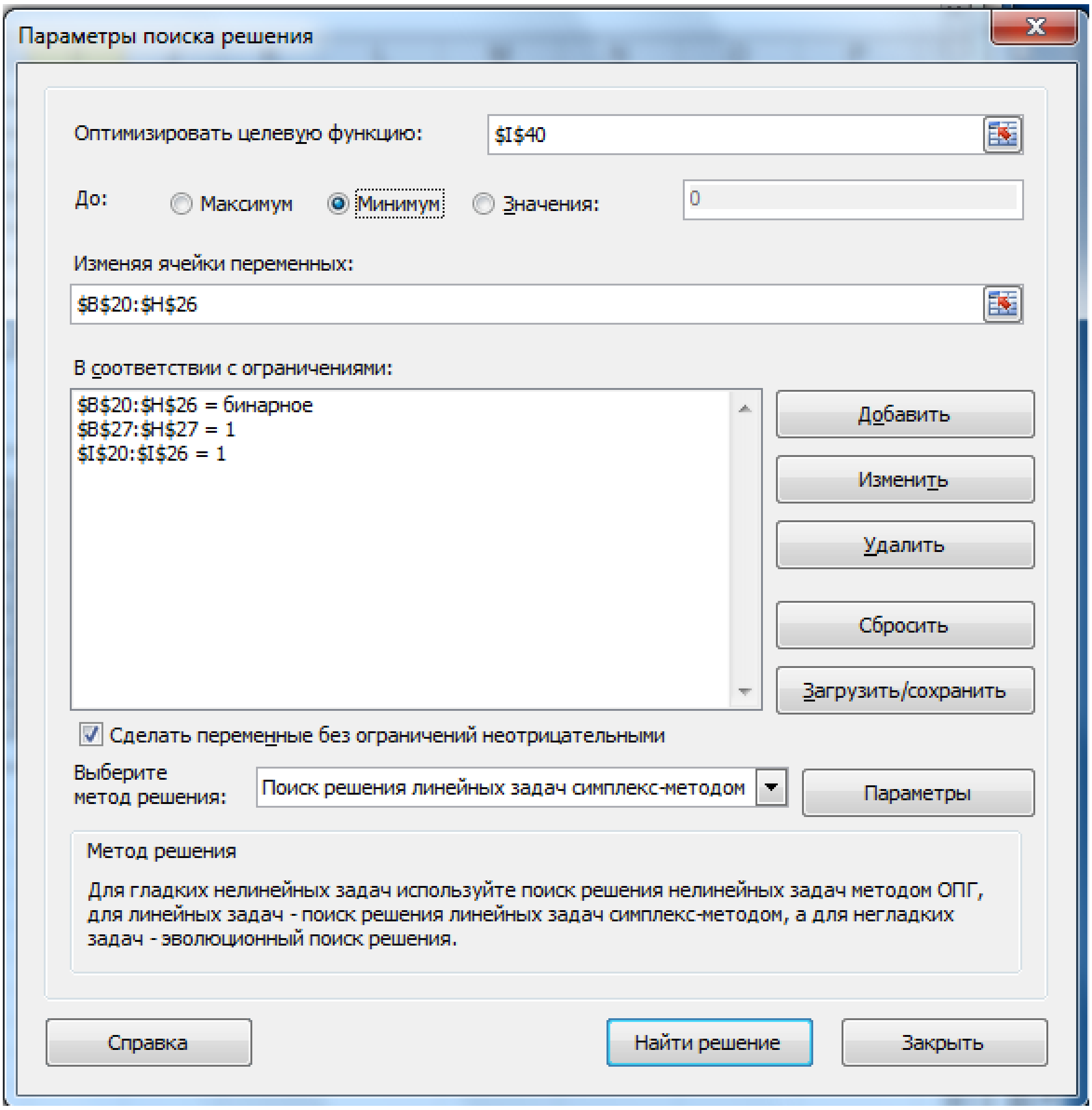

Рисунок 4.7 — Вид окна Excel для задания параметров поиска решения при решении задачи о назначениях

Полученные при таком распределении суммарные затраты будут минимальны и составят 3053,8 д.е.

4.7 Контрольные вопросы

1. Какая игра называется кооперативной?
2. Понятие характеристической функции.
3. Какая игра называется существенной?
4. Понятие ядра в теории кооперативных игр.

5. Принцип оптимальности в форме C-ядра.

6. Условия принадлежности дележа C-ядру, индивидуальной и коллективной рациональности.

7. Принцип оптимальности в форме N-ядра.

8. Каким методом целесообразно находить N-ядро кооперативной игры?

9. Принцип оптимальности в форме вектора Шепли.

10. Аксиомы Шепли.

11. Теорема Шепли.

12. НМ-решения.

13. Суть задачи о назначениях и ее решение в Excel с помощью инструмента Поиск решения.

4.8 Материалы для самоконтроля

1. Какая игра называется кооперативной?

а) игра, в которой группы игроков могут объединять свои усилия

б) игра, в которой принимают участие конкурирующие предприятия кооперативной формы собственности

в) игра, в которой оценивается воздействие принятого решения на конкурентов

2. Выберите неверное утверждение о характеристической функции

а) равна гарантированному математическому ожиданию выигрыша данной коалиции при применении ею смешанной стратегии, составленной из стратегий этой коалиции

б) характеризует величину выгоды, которую коалиция достигнет путем объединения участников

в) не может принимать отрицательные значения

3. Какая игра называется существенной?

а) если выигрыш одного из участников коалиции больше суммарного выигрыша остальных участников

б) если характеристическая функция максимальной коалиции больше суммарного выигрыша отдельных участников в) если характеристическая функция одного из участников коалиции существенно больше характеристических функций остальных участников

4. Что представляет собой ядро в теории кооперативных игр?

а) исход совместных действий игроков, который нельзя улучшить никакой коалицией участников экономического процесса

б) множество доминируемых неустойчивых дележей кооперативной игры

в) сумму характеристических функций отдельных игроков

5. Что такое *C*-ядро в теории кооперативных игр?

а) множество эффективных распределений выигрыша, устойчивых к отклонениям любой коалиции игроков

б) множество доминируемых неустойчивых дележей кооперативной игры

в) множество распределений выигрыша, полученное исходя из минимизации степени неудовлетворенности коалиций выигрышем

г) множество распределений выигрыша, полученное исходя из вклада каждого игрока в выигрыш коалиции

6. Каково условие индивидуальной рациональности в теории кооперативных игр?

а) любой игрок должен получить выигрыш в коалиции не меньше, чем он получил бы, не участвуя в ней

б) любой игрок может осуществлять в коалиции ряд действий независимо от других участников этой коалиции

в) сумма выигрышей игроков должна быть больше значения характеристической функции всех участников коалиции

7. Каково условие коллективной рациональности в теории кооперативных игр?

а) любой игрок должен получить выигрыш в коалиции не меньше, чем он получил бы, не участвуя в ней

б) сумма выигрышей игроков должна соответствовать значению характеристической функции всех участников коалиции

в) сумма выигрышей игроков должна быть больше значения характеристической функции всех участников коалиции

8. На чем основан принцип оптимальности в форме *N*-ядра?

а) на минимизации степени неудовлетворенности коалиций выигрышем

б) на максимизации суммарного дохода коалиции наибольшей численности

в) на определении вклада каждого игрока в выигрыш коалиции

9. Каким методом целесообразно находить *N*-ядро кооперативной игры?

а) методом Брауна-Робинсон

б) путем сведения игры к задаче линейного программирования

в) методом обратной индукции

10. Что такое цена Шепли?

а) распределение, в котором выигрыш каждого игрока равен его среднему вкладу в соответствующие коалиции

б) распределение, основанное на минимизации степени неудовлетворенности коалиций выигрышем

в) наибольшее из значений характеристических функций всех возможных коалиций

г) наименьшее из значений характеристических функций всех возможных коалиций

д) среднее из значений характеристических функций всех возможных коалиций

11. В чем суть линейности вектора Шепли?

а) при участии игроков в двух играх их выигрыши в отдельных играх должны складываться

б) получаемый игроком выигрыш не зависит от его номера

в) сумма компонент вектора Шепли должна равняться значению характеристической функции всех участников коалиции

12. В чем суть аксиомы симметрии вектора Шепли?

а) при участии игроков в двух играх их выигрыши в отдельных играх должны складываться

б) получаемый игроком выигрыш не зависит от его номера

в) сумма компонент вектора Шепли должна равняться значению характеристической функции всех участников коалиции

13. В чем суть аксиомы болвана вектора Шепли?

а) получаемый игроком выигрыш не зависит от его номера б) при распределении общего выигрыша не должно ничего выделяться игроку, не вносящему вклада ни в какую коалицию

в) сумма компонент вектора Шепли должна равняться значению характеристической функции всех участников коалиции

14. В чем суть аксиомы эффективности вектора Шепли?

а) получаемый игроком выигрыш не зависит от его номера

б) при участии игроков в двух играх их выигрыши в отдельных играх должны складываться

в) сумма компонент вектора Шепли должна равняться значению характеристической функции всех участников коалиции

15. Какова формулировка теоремы Шепли?

а) для любой кооперативной игры существует единственное распределение выигрыша, удовлетворяющее аксиомам Шепли

б) для любой кооперативной игры существует множество распределений выигрыша, удовлетворяющих аксиомам Шепли

в) сумма компонент вектора Шепли должна равняться значению характеристической функции всех участников коалиции

16. Выберите неверное утверждение об НМ-решениях

а) в основу НМ-решений положены понятия внутренней и внешней устойчивости

б) НМ-решения всегда находятся внутри C-ядра

в) НМ-решение оперирует дележом как выигрышем максимальной коалиции

17. В чем суть задачи о назначениях?

а) распределить исполнителей по работам, чтобы каждый исполнитель мог выполнять параллельно не менее двух работ

б) распределить исполнителей по работам, чтобы минимизировать неудовлетворенность каждого исполнителя

в) распределить исполнителей по работам, чтобы минимизировать суммарные затраты, связанные с выполнением всего комплекса работ

4.9 Лабораторные работы

Лабораторная работа 1. Определение N-ядра и цены Шепли для кооперативной игры.

Цель работы — научиться определять в среде Excel *N*-ядро и цену Шепли для кооперативной игры.

Задание.

Разработка проекта поручается трем специалистам (назовем их A, B, C), которые могут работать либо в одиночку над отдельными частями этого проекта, либо объединяться в коалиции. Результативность работы каждого из исполнителей и возможных коалиций характеризуется значениями характеристических функций, которые приведены в таблице вариантов индивидуальных заданий.

Для своего варианта индивидуального задания:

– проверить наличие непустого *C*-ядра;

– определить *N*-ядро;

– определить значение Шепли для всех возможных коалиций;

– сделать выводы о целесообразности объединения участников проекта в коалиции.

Лабораторная работа 2. Решение задачи о назначениях.

Цель работы — научиться решать кооперативные игры с помощью Microsoft Excel на примере решения задачи о назначениях.

Задание.

Автотранспортная компания располагает 10 автомобилями разных марок: 3 автомобиля марки A; 3 автомобиля марки B; 2 автомобиля марки C; 1 автомобиль марки D; 1 автомобиль марки E. Автомобили разных марок имеют разную грузоподъёмность q_i (т) и разные удельные эксплуатационные затраты c_i (д.е./км). Характеристики автомобилей представлены в таблице 4.5.

Таблица 4.5 – Характеристики автомобилей

Характеристики		Марка автомобиля				
		A	B	C	D	E
Грузоподъёмность, т	q_i	20	16	8	5	2,5
Удельные затраты, д.е./км	c_i	0,8	0,55	0,35	0,25	0,13

Варианты индивидуальных заданий для лабораторной работы 1

Вариант	Значения характеристических функций, д.е.						
	ABC	AB	AC	BC	A	B	C
1	63	29	44	52	10	15	20
2	70	30	45	55	13	14	21
3	76	35	46	58	15	13	20
4	73	37	48	60	18	15	30
5	77	38	49	61	19	17	28
6	80	41	50	63	20	18	28
7	82	42	52	65	22	19	27
8	85	44	54	67	24	18	29
9	88	45	56	70	25	18	30
10	90	46	59	73	26	17	31
11	91	47	59	77	27	16	31
12	94	49	60	78	28	17	30
13	97	50	62	75	30	18	31
14	100	53	65	77	33	19	30
15	105	54	76	72	35	18	29
16	108	55	78	75	33	20	33
17	110	56	77	86	39	16	30
18	112	59	79	78	35	22	34
19	115	60	83	80	34	24	37
20	118	61	85	81	31	27	40
21	120	62	87	73	37	22	36
22	125	63	81	75	40	21	33
23	130	65	94	76	43	19	40
24	135	66	83	88	45	20	35
25	140	68	85	96	41	25	39
26	144	70	86	95	47	20	36
27	150	71	87	94	48	22	37
28	152	72	88	95	46	24	41
29	155	73	90	96	43	27	45
30	160	75	94	100	40	31	49

Компанией получены заказы от 9 клиентов на перевозку грузов. В каждом заказе указан объём перевозимого груза Q_j (т) и расстояние перевозки L_j (км). Данные о характеристиках заказов приведены в таблице вариантов индивидуальных заданий.

Требуется оптимальным образом назначить автомобили на рейсы для выполнения заказов клиентов, полагая тарифы на перевозки одинаковыми.

Варианты индивидуальных заданий для лабораторной работы 2 (данные о характеристиках заказов).

Варианты	Характе-ристики	Клиенты								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
1, 16	Q_j, т	55	45	75	125	10	15	35	25	65
	L_j, км	25	75	125	50	40	70	60	20	10
2, 17	Q_j, т	90	45	20	120	10	50	80	55	10
	L_j, км	12	24	36	55	17	20	30	15	40
3, 18	Q_j, т	50	300	30	25	100	75	50	10	40
	L_j, км	40	32	45	65	20	15	100	44	18
4, 19	Q_j, т	10	50	40	90	10	25	40	5	70
	L_j, км	50	60	70	18	20	10	12	25	28
5, 20	Q_j, т	45	55	175	25	100	35	15	65	25
	L_j, км	40	32	45	65	20	15	100	44	18
6, 21	Q_j, т	90	45	20	120	10	50	80	55	10
	L_j, км	12	24	36	55	17	20	30	15	40
7, 22	Q_j, т	5	35	30	25	100	75	50	10	40
	L_j, км	25	75	125	50	40	70	60	20	10
8, 23	Q_j, т	100	35	45	95	15	125	35	5	50
	L_j, км	50	60	70	18	20	10	12	25	28
9, 24	Q_j, т	65	25	35	15	10	125	35	25	65
	L_j, км	14	22	35	10	44	19	27	40	50
10, 25	Q_j, т	90	45	20	120	10	50	80	55	10
	L_j, км	62	23	74	14	54	20	30	15	25
11, 26	Q_j, т	55	150	20	25	80	75	50	15	45
	L_j, км	42	36	24	120	30	18	45	23	13
12, 27	Q_j, т	10	50	40	90	10	25	40	5	70
	L_j, км	120	19	45	23	48	16	75	55	60
13, 28	Q_j, т	70	30	20	90	20	60	80	40	20
	L_j, км	42	27	77	19	64	27	32	25	31
14, 29	Q_j, т	55	150	30	35	70	65	40	15	55
	L_j, км	32	46	34	100	40	38	55	13	33
15, 30	Q_j, т	20	40	60	80	30	15	45	15	60
	L_j, км	110	29	35	13	38	36	55	50	33

5 ПОЗИЦИОННЫЕ ИГРЫ

5.1 Понятие о позиционных играх

Игры, в которых задается последовательность принятия решений игроками, называются **позиционными играми**. Число игроков и шагов в них может равняться 2, 3 и т.д. Как уже упоминалось ранее, позиционная игра — это игра, моделирующая процессы последовательного принятия решений в условиях меняющейся во времени и неполной информации.

Позиционная игра характеризуется тем, что:

– в ней может участвовать конечное число игроков (два и более);

– каждый из игроков может последовательно делать конечное число ходов;

– некоторые ходы могут быть случайными, а сведения о них могут меняться от хода к ходу.

Вследствие перечисленных особенностей структуры позиционной игры ее более наглядно представляет не матрица выигрышей, а **дерево решений** (или **граф решений**), приводящее игроков из исходной позиции в конечные.

Дерево решений — это графическое представление процесса принятия решения. Можно считать, что это модель, позволяющая прогнозировать направление развития ситуации, и ее вероятностный исход.

Вершины дерева игры называются **позициями**. Позиции, непосредственно следующие за некоторой позицией, называются **альтернативами**. Позиции, не имеющие альтернатив, называются **окончательными**, а ведущие в них пути — **партиями**. Часть дерева решений, описывающая игру из некоторой позиции после нескольких начальных шагов партнеров, называется **подыгрой**, и ее решение может представлять самостоятельную задачу.

Основные свойства дерева игры:

– дерево содержит одну начальную вершину («корень»), в которую не входит ни одна ветвь;

– дерево имеет не менее одной вершины, из которой не выходит ни одна ветвь;

– из корня дерева имеется единственный путь к каждой из остальных вершин дерева, который называется ветвью дерева;

– каждая ветвь дерева отображает партию игры;

– число партий равно числу конечных вершин у дерева.

Располагают «деревья» слева направо. Корневая вершина «дерева» отвечает исходным условиям задачи (проблемы), остальные вершины — отдельным стадиям ее решения. Соединяющие вершины ребра (ветви дерева) отражают переходы от одних стадий решения к другим и обозначают возможные альтернативные решения, которые могут быть приняты, а также возможные исходы, возникающие в результате этих решений. Каждому переходу может быть приписана определенная стоимость или, например, время, затрачиваемое на выполнение соответствующих операций.

Каждый из путей, ведущих от корневой вершины к другим вершинам, является одним из возможных путей поиска решения. Придерживаясь некоторого пути, приходят к требуемому конечному результату. Соответствующие конечные вершины называют целевыми.

Все расходы, вызванные решением, проставляются на соответствующие ветви. Когда все решения и их исходы указаны на дереве, просчитывается каждый из вариантов, и в окончании ветвей дерева проставляется денежный доход. На схеме «дерева» решений используют два вида «ветвей»:

– пунктирные линии, соединяющие квадраты возможных решений;

– сплошные линии, соединяющие кружки (вершины) возможных исходов.

Квадратными «узлами» обозначают места, где принимается решение, кружочками — вершины со случайными исходами. Так как лицо, принимающее решение, не может влиять на появление исходов, ему остается лишь вычислить вероятность их появления.

Некоторые простые позиционные игры могут быть сведены к матричным играм. Тогда, по аналогии с матричной игрой, чистая стратегия игрока — это заранее определенная последовательность ходов этого игрока, выбранная им в зависимости от информации о ходах другого игрока или от состояний «природы». В том случае, если в игре нет случайных ходов, выбор игроками A и B чистых стратегий однозначно определяет исход игры — приводит к окончательной позиции, где игрок A получает свой выигрыш.

5.2 Нормализация позиционной игры

Процесс сведения антагонистической позиционной игры к матричной игре называется нормализацией позиционной игры, а полученная матричная игра — игрой в нормальной форме.

Рассмотрим этот процесс на примере классической игры «Вступление на рынок». На рынке одного из товаров доминирует Фирма 1, которая занимает монопольное положение и имеет доход 12 млн. д.е. Фирма 2 решает вопрос, стоит ли ей вкладывать инвестиции в производство аналогичного товара. В случае вступления на рынок Фирмы 2 Фирма 1 может либо сохранить объем своего производства, либо снизить его, уступив часть рынка Фирме 2. При сохранении Фирмой 1 прежнего объема производства вследствие роста предложения товара на рынке упадет цена на выпускаемый фирмами товар. В результате этого прибыль Фирмы 1 упадет до 5 млн. д.е., а Фирма 2 понесет убытки в размере 2 млн. д.е. С другой стороны, Фирма 1 может снизить объем своего производства, уступая часть рынка Фирме 2 и деля с ней получаемую прибыль. В этом случае каждая из фирм получит по 6 млн. д.е. прибыли.

Если Фирма 2 принимает решение воздержаться от вступления на рынок, прибыль Фирмы 1 при прежнем объеме производства не изменяется. Фирма 2 также не будет иметь ни прибыли, ни убытков (ее прибыль равна 0 млн. д.е.). Если же Фирма 1 все-таки снизит объем своего производства, ее прибыль упадет до 8 млн. д.е.

Дерево решений этой игры, состоящее из четырех партий, показано на рисунке 5.1. В отличие от ранее рассмотренных игр, Фирма 2 первой принимает решение, а Фирма 1 делает ответный ход, уже зная о решении Фирмы 2.

В этой игре две равновесные партии:

– Фирма 2 принимает решение вступить на рынок, а Фирма 1 принимает решение сократить объем производства;

– Фирма 2 принимает решение воздержаться от вступления на рынок, а Фирма 1 принимает решение сохранить объем производства.

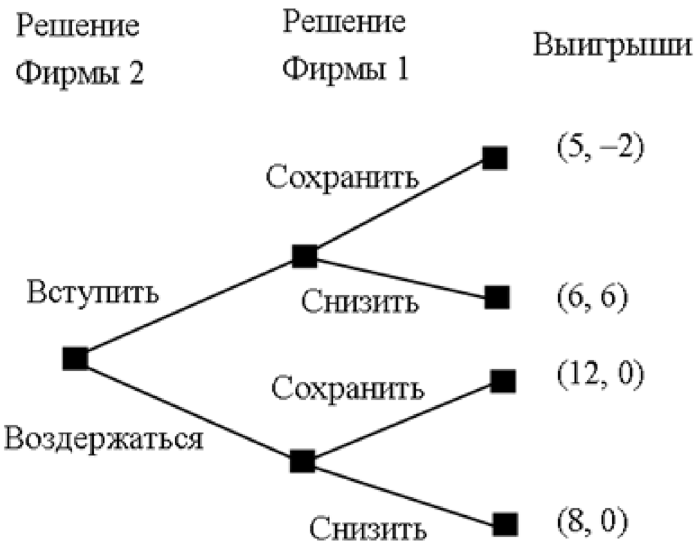

Рисунок 5.1 — Дерево решений варианта игры «Вступление на рынок»

Для сведения этой позиционной игры к нормальной форме рассмотрим стратегии двух игроков — Фирмы 1 и Фирмы 2 и их выигрыши в случае выбора соответствующих стратегий. Полученная платежная матрица игры для Фирмы 2 приведена в таблице 5.1.

Таблица 5.1 — Платежная матрица игры для Фирмы 2

Стратегии Фирмы 2	Стратегии Фирмы 1		min
	сохранить объем	снизить	
вступить на рынок	-2	6	-2
воздержаться	0	0	0
max	0	6	
min(max)=0			max(min)=0

Как видно из данных этой таблицы, имеется решение в чистых стратегиях: Фирме 2 воздержаться от вступления на рынок, а Фирме 1 сохранить объем производства.

Полученная платежная матрица игры для Фирмы 1 приведена в таблице 5.2.

Таблица 5.2 — Платежная матрица игры для Фирмы 1

Стратегии Фирмы 1	Стратегии Фирмы 2		min
	вступить на рынок	воздержаться	
сохранить объем	5	12	5
снизить	6	8	6
max	6	12	
min(max)=6			max(min)=6

Как видно из данных этой таблицы, имеется решение в чистых стратегиях: Фирме 1 снизить объем производства, а Фирме 2 вступить на рынок.

Таким образом, в этой игре имеются две равновесные партии. Поскольку первый шаг делает Фирма 2, она должна принять более выгодное для себя решение — вступить на рынок в расчете на то, что при приведенных исходных данных Фирме 1 экономически выгодно снизить объем производства и уступить часть рынка Фирме 2.

При других исходных данных может оказаться, что Фирме 1 экономически выгодно сохранить объем производства на прежнем уровне и подавить Фирму 2 как своего потенциального конкурента. Такое поведение характерно для деятельности фирм-монополистов.

5.3 Решение позиционной игры методом обратной индукции

Метод обратной индукции — распространенный метод нахождения оптимальной последовательности действий. Он предполагает обратную хронологию: вначале определяется оптимальное действие на последнем шаге, затем процедура повторяется на предыдущих шагах, пока не будет достигнуто начало процесса.

В соответствии с этим методом игра решается с конца. В первую очередь анализируются все последние вершины игры, в которых один из игроков должен сделать оптимальный выбор. Эта ветвь дерева остается для дальнейшего рассмотрения, остальные ветви отсекаются. Затем процесс повторяется для всех предшествующих вершин, пока не будет достигнута начальная вершина.

К позиционной игре сводятся многие инвестиционные задачи о строительстве предприятий, замене оборудования и т.п. В качестве примера такой игры рассмотрим следующую задачу. Требуется принять решение о строительстве среднего (СП) или малого (МП) предприятия по производству продукции в расчете на пятилетний период. Это решение зависит от будущего спроса на продукцию, выпускаемую этим предприятием. Кроме того, можно построить малое предприятие, а через год, в случае высокого спроса на выпускаемую продукцию, произвести его расширение (РП). Анализ рыночной ситуации показал, что вероятности высокого и низкого уровней спроса составляют соответственно 0,67 и 0,33. Имеющиеся для принятия решения исходные данные приведены в таблице 5.3.

Таблица 5.3 — Исходные данные для принятия решения о стратегии строительства предприятия

Стратегия	Затраты, млн. д.е.	Ожидаемый ежегодный доход, млн. д.е. при уровне спроса	
		высоком	низком
СП	7,00	2,30	0,50
МП	1,50	0,35	0,30
МП с РП	3,50	2,20	0,30
МП без РП	–	0,35	0,25

Определить оптимальную стратегию строительства предприятия по выпуску продукции.

Для данной задачи процесс принятия решения состоит из двух этапов: решение о размере предприятия в настоящий момент времени и о необходимости его расширения через год. Дерево решений изображено на рисунке 5.2.

В «решающих» вершинах 1 и 4 принимается решение о размерах предприятия. Остальные вершины, обозначенные круглыми узлами, являются «случайными». Вычисления начинаем с этапа 2 (вершина 4). Доход малого предприятия с последующим расширением в этой вершине составит

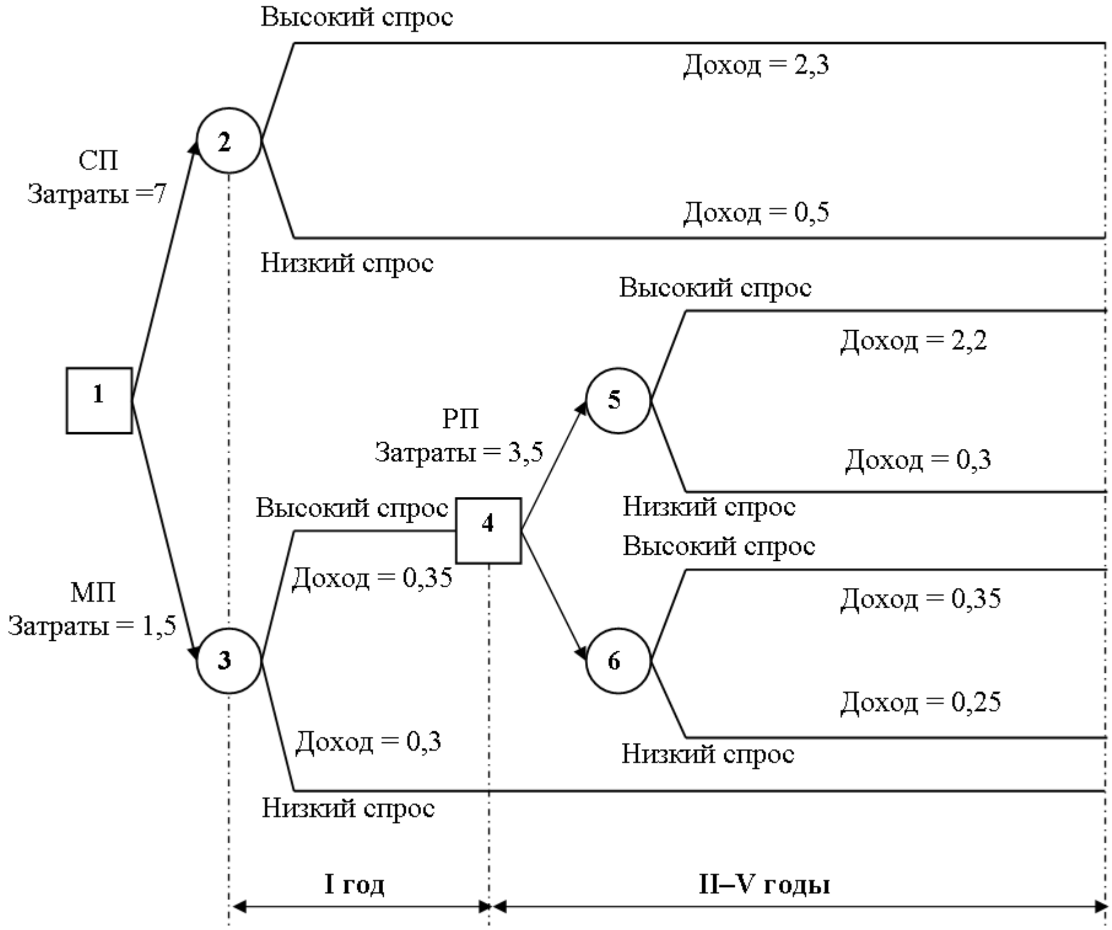

Рисунок 5.2 — Дерево решений

$$(2{,}20 \cdot 0{,}67 + 0{,}30 \cdot 0{,}33) \cdot 4 - 3{,}5 = \mathbf{2{,}79} \text{ млн.д.е.},$$

доход малого предприятия без расширения составит

$$(0{,}35 \cdot 0{,}67 + 0{,}25 \cdot 0{,}33) \cdot 4 = \mathbf{1{,}27} \text{ млн.д.е.}$$

В вершине 4 выгодно произвести расширение, поэтому в дальнейшем рассматриваем только ветвь с «узлом» 5.

На этапе 1 доход среднего предприятия составит

$$(2{,}30 \cdot 0{,}67 + 0{,}50 \cdot 0{,}33) \cdot 5 - 7{,}0 = \mathbf{1{,}53} \text{ млн.д.е.},$$

доход малого предприятия с последующим расширением составит

$$0{,}35 \cdot 0{,}67 + 2{,}79 \cdot 0{,}67 + 0{,}30 \cdot 0{,}33 \cdot 5 - 1{,}50 = \mathbf{1{,}10} \text{ млн.д.е.}$$

Таким образом, оптимальной является стратегия строительства среднего предприятия.

5.4 Контрольные вопросы

1. Какая игра называется позиционной?
2. Характеристика позиционной игры и ее представление.
3. Правила описания дерева игры.
4. Нормализация позиционной игры.
5. Решение позиционной игры методом обратной индукции.

5.5 Материалы для самоконтроля

1. Какая игра называется позиционной?

а) игра, моделирующая процессы последовательного принятия решений в условиях меняющейся во времени и неполной информации

б) игра, в которой группы игроков могут объединять свои усилия

в) игра, в которой моделируется какой-либо производственный или экономический процесс

2. Выберите неверное утверждение о позиционной игре

а) в ней могут принимать участие только два игрока

б) каждый из игроков может последовательно делать конечное число ходов

в) некоторые ходы могут быть случайными, а сведения о них могут меняться от хода к ходу

3. Как принято представлять позиционную игру?

а) матрицей выигрышей

б) деревом решений

в) описанием позиций, в которых принимается решение

г) системой уравнений, описывающих процесс решения

4. Выберите неверное утверждение в описании дерева игры:

а) дерево содержит одну единственную начальную вершину, в которую не входит ни одна ветвь

б) дерево имеет одну вершину, из которой не выходит ни одна ветвь

в) из корня дерева имеется единственный путь к каждой из остальных вершин дерева (ветвь дерева)

г) каждая ветвь дерева отображает партию игры

5. Что такое нормализация позиционной игры?

а) процесс нахождения равновесных партий в позиционной игре

б) процесс нахождения наиболее вероятной стратегии в позиционной игре

в) процесс сведения антагонистической позиционной игры к матричной игре

5. В чем суть метода обратной индукции?

а) предполагается, что на первом шаге выбрано оптимальное действие

б) выбор оптимальных действий начинается с конца

в) с помощью этого метода игра сводится к матричной игре

6. Каким методом целесообразно решать позиционную игру?

а) методом Брауна-Робинсон

б) путем сведения игры к задаче линейного программирования

в) методом обратной индукции

5.6 Лабораторные работы

Лабораторная работа 1. Позиционные игры

Цель работы — научиться решать позиционную игру методом обратной индукции с помощью Microsoft Excel на примере решения задачи о замене оборудования.

Задание.

Требуется принять решение о замене старого оборудования на новое того же вида или его ремонте. Отремонтированное оборудование впоследствии можно частично заменить на новое, более современное, или отремонтировать его заново. Решение определяется будущим спросом на продукцию, которую производят на этом оборудовании. Полная замена оборудования экономически оправдана при высоком уровне спроса. С другой стороны, можно отремонтировать старое оборудование и через один год, например, заменить его на новое, более совершенное, или заново его отремонтировать.

В данной задаче процесс принятия решения состоит из двух этапов: решение в настоящий момент времени о замене или ремонте оборудования и решение, принимаемое через один год, относительно частичной его замены и ремонта. Предполагается, что спрос может оказаться высоким, средним и низким. Фирма рассматривает эту задачу на пятилетний период.

Замена новым оборудованием того же вида, что и старое, обойдется в $2{,}5\cdot\left(1+\frac{n}{20}\right)$ млн. д.е. Затраты на частичную замену оборудования более совершенным оцениваются в $1{,}5\cdot\left(1+\frac{n}{20}\right)$млн. д.е., а ремонт или повторный ремонт старого — в $0{,}8\cdot\left(1+\frac{n}{20}\right)$ млн. д.е., где n — номер варианта.

Ежегодные доходы предприятия в млн. д.е. при высоком, среднем и низком уровнях спроса для каждой из стратегий представлены в таблице 5.4.

Таблица 5.4 — Ежегодные доходы предприятия, млн. д.е.

Стратегия	Спрос		
	высокий	средний	низкий
Замена старого оборудования на новое того же вида	$0{,}95\cdot\left(1+\frac{n}{20}\right)$	$0{,}7\cdot\left(1+\frac{n}{20}\right)$	$0{,}45\cdot\left(1+\frac{n}{20}\right)$
Ремонт старого оборудования	$0{,}4\cdot\left(1+\frac{n}{20}\right)$	$0{,}25\cdot\left(1+\frac{n}{20}\right)$	$0{,}2\cdot\left(1+\frac{n}{20}\right)$
Частичная замена оборудования на более совершенное	$0{,}9\cdot\left(1+\frac{n}{20}\right)$	$0{,}6\cdot\left(1+\frac{n}{20}\right)$	$0{,}4\cdot\left(1+\frac{n}{20}\right)$
Повторный ремонт старого оборудования	$0{,}4\cdot\left(1+\frac{n}{20}\right)$	$0{,}3\cdot\left(1+\frac{n}{20}\right)$	$0{,}2\cdot\left(1+\frac{n}{20}\right)$

Анализ рыночной ситуации позволил оценить вероятности высокого $p(B_1)$, среднего $p(B_2)$ и низкого $p(B_3)$ уровней спроса. Первые две вероятности заданы в таблице 5.5.

Используя рисование средствами Word, построить дерево решений. Используя Excel, определить оптимальную стратегию фирмы по замене и ремонту оборудования на пятилетний период.

Таблица 5.5 — Вероятности высокого и среднего спроса

Вариант	Вероятности		Вариант	Вероятности	
	$p(B_1)$	$p(B_2)$		$p(B_1)$	$p(B_2)$
1	0,51	0,12	16	0,22	0,24
2	0,32	0,25	17	0,21	0,32
3	0,40	0,13	18	0,27	0,29
4	0,45	0,20	19	0,30	0,44
5	0,36	0,30	20	0,20	0,23
6	0,25	0,35	21	0,23	0,24
7	0,33	0,19	22	0,41	0,09
8	0,48	0,14	23	0,17	0,51
9	0,16	0,22	24	0,28	0,19
10	0,40	0,15	25	0,44	0,17
11	0,50	0,10	26	0,12	0,25
12	0,43	0,21	27	0,19	0,18
13	0,48	0,33	28	0,29	0,16
14	0,15	0,40	29	0,11	0,39
15	0,58	0,11	30	0,52	0,13

6 ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДОВ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТЕОРИИ ИГР

6.1 Концептуальная схема использования методов теории игр для оптимизации управленческих решений

В настоящее время в теории игр не существует единой концепции решения, одинаково подходящей для всех классов игр. Кроме того, в каких-то ситуациях поведение игроков может быть нерациональным, а это в настоящее время практически не поддается формализации. Да и понятие «рациональное поведение» у разных людей различно. То, что кажется рациональным одним, может быть нерациональным для других. Поэтому теория игр не всегда может точно предсказать поведение игроков в реальной игровой ситуации или дать однозначную рекомендацию по принятию решения. На современном этапе развития ее основной задачей является выдача рекомендаций по выбору наиболее оптимальных решений и отсечение способов поведения игроков и ситуаций, которые являются явно нерациональными.

В предыдущих разделах и в литературе достаточно подробно освещены основные положения теории игр, виды игр и существующие методы их решения, рассмотрены игровые подходы к решению некоторых задач в экономике и бизнесе. Однако ввиду существования нескольких типов игр и различных методов их решения при практическом применении методов теории игр экономисты и менеджеры сталкиваются с определенными трудностями выбора рационального инструментария для решения конкретной задачи.

С целью обобщения ранее изложенного материала разработана концептуальная схема использования методов теории игр для оптимизации управленческих решений, показанная на рисунке 6.1. Как видно из этого рисунка, наиболее распространенным видом игр являются матричные игры, в которых участвуют два игрока (например, A и B), основанные на построении платежной матрицы. Решением игры называется совокупность найденных оптимальных стратегий и цены игры.

Если в платежной матрице существует элемент, который одновременно является минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце, то наилучшие варианты стратегии для сторон, участвующих в игре, совпадают, и игра имеет решение в чистых стратегиях.

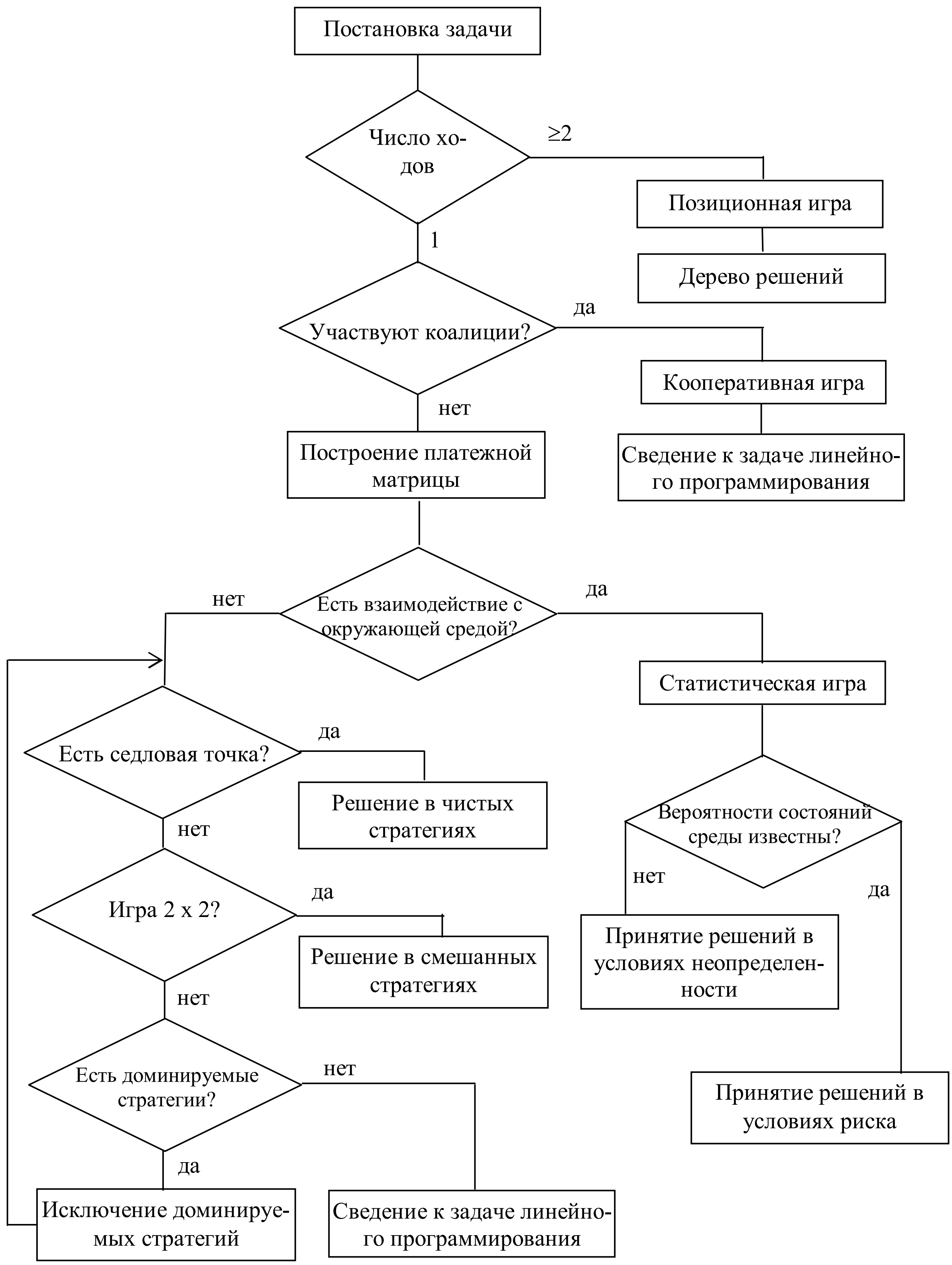

Рисунок 6.1 — Концептуальная схема использования методов теории игр для оптимизации управленческих решений

Если платежная матрица игры 2×2 не имеет седловой точки, игрокам целесообразно выбирать стратегии случайным образом, чередуя несколько чистых стратегий. Такие смешанные стратегии определяют наилучший исход игры для каждого игрока.

Матричную игру $m \times n$ вначале следует проверить на наличие доминируемых и дублирующих стратегий. Если они имеются, их следует исключить из рассмотрения. Для такой игры существуют различные методы решения: Брауна-Робинсон, графический метод, путем сведения к задаче линейного программирования. Для практического использования рекомендуется использовать последний метод в виду его точности и простоты реализации в среде Excel с помощью инструмента Поиск решения.

Для выбора наиболее выгодного варианта поведения из нескольких имеющихся вариантов в условиях неопределённости и риска используются матричные игры особого типа, в которых игрок взаимодействует не со вторым игроком, а с окружающей средой («природой»), не заинтересованной в его проигрыше. Ситуация является полностью неопределенной, если известен лишь набор возможных вариантов состояний окружающей среды и отсутствует возможность получения о них какой-либо статистической информации. При этом в условиях неопределенности выполняются расчеты с применением критериев Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица и выбирается стратегия, на которую указало большинство из перечисленных критериев.

Если известны не только состояния, в которых случайным образом может находиться «природа», но и вероятности этих состояний, то решение принимается в условиях риска. Для выбора оптимальных стратегий в условиях риска используются критерии Байеса, Ходжа-Лемана, Гермейера. Чаще всего применяют критерий Байеса (критерий максимального математического ожидания выигрыша).

Для позиционной игры, моделирующей процессы последовательного принятия решений в условиях меняющейся во времени и неполной информации, выполняется построение дерева решений — графического изображения последовательности решений и состояний среды с указанием вероятностей для всех комбинаций решений. Такую игру удобно решать методом обратной индукции (по аналогии с принципом Беллмана в динамическом программировании).

6.2 Дополнительные задания для самостоятельной работы

Ниже приводится ряд заданий для самостоятельной работы, рассчитанных на закрепление пройденного материала.

Задание 1.

Два предприятия производят продукцию и поставляют её на рынок региона. Они являются единственными поставщиками продукции в регион, поэтому полностью определяют рынок данной продукции в регионе.

Каждое из предприятий имеет возможность производить продукцию с применением одной из трёх различных технологий. В зависимости от качества продукции, произведённой по каждой технологии, предприятия могут установить цену единицы продукции на уровне 10, 8 и 4 денежных единиц соответственно. При этом предприятия имеют различные затраты на производство единицы продукции, приведенные в таблице 6.1.

Таблица 6.1 — Затраты на единицу продукции, произведенной на предприятиях региона (д.е.).

Технология	Цена реализации единицы продукции, д.е.	Полная себестоимость единицы продукции, д.е.	
		предприятие 1	предприятие 2
I	10	6	7
II	8	5,5	6,5
III	4	3	2,8

В результате маркетингового исследования рынка продукции региона была определена функция спроса на продукцию:

$$S = 8 - 0{,}5 \cdot P_{cp},$$

где S – количество продукции, которое приобретёт население региона (тыс. ед.);

P_{cp} — средняя цена продукции предприятий, д.е.

Доля продукции предприятия 1, приобретенной населением, зависит от соотношения цен на продукцию предприятия 1 и предприятия 2. Ее значения, полученные в результате маркетингового исследования, приведены в таблице 6.2.

Таблица 6.2 — Доля продукции предприятия 1, приобретаемой населением в зависимости от соотношения цен на продукцию

Цена реализации ед. продукции, д.е.		Доля продукции предприятия 1, купленной населением
предприятие 1	предприятие 2	
10	10	0,35
10	8	0,30
10	4	0,20
8	10	0,7
8	8	0,4
8	4	0,3
4	10	0,9
4	8	0,8
4	4	0,77

В задаче необходимо определить:

– существует ли ситуация равновесия при выборе технологий производства продукции обоими предприятиями;

– существуют ли технологии, которые предприятия заведомо не будут выбирать вследствие невыгодности;

– сколько продукции будет реализовано в ситуации равновесия и какое предприятие окажется в выигрышном положении.

Пояснения к решению.

Стратегиями предприятий в данной задаче являются их решения относительно технологий производства продукции. Эти решения определяют себестоимость и цену реализации единицы продукции. Поскольку предприятия ведут борьбу за рынок продукции в регионе, выигрыш одного предприятия равен проигрышу другого. Задача может быть сведена к матричной игре с нулевой суммой. При этом коэффициентами выигрышей платежной матрицы будут значения разницы прибылей предприятий:

$$\Delta П = П_1 - П_2 = S \cdot \rho \cdot (P_1 - C_1) + S \cdot (1 - \rho) \cdot (P_2 - C_2) \text{ тыс. д.е.,}$$

где $П_1$, $П_2$ — прибыли предприятия 1 и предприятия 2 соответственно, тыс. д.е.;

ρ — доля продукции предприятия 1, купленной населением;

P_1, P_2 — цены реализации единицы продукции предприятиями 1 и 2, д.е.;

C_1, C_2 — полная себестоимость единицы продукции, произведенной на предприятиях 1 и 2, д.е.

Задание 2.

Два продавца (назовем их A и B) предлагают на рынке взаимозаменяемые товары. Функция полезности каждого из 100 покупателей, приобретающих их продукцию, имеет вид:

$$U = (Q_A + 5)^{0,4} \cdot (Q_B + 3)^{0,6},$$

где Q_A, Q_B — функции спроса на товары продавцов A и B соответственно.

Каждый покупатель использует равную часть бюджета на покупку товаров этих продавцов — 20 д.е. В силу равенства бюджетов и функций полезности 100 покупателей можно объединить в одного покупателя с бюджетом 2000 д.е.

Согласно модели Р. Стоуна для конкретной функции полезности

$$U = \prod_{i=1}^{n} \left(Q_i - Q_i^0\right)^{\alpha_i}$$

с учетом бюджетного ограничения функция спроса имеет вид:

$$Q_i = Q_i^0 + \frac{\alpha_i \cdot \left(I - \sum_{i=1}^{n} Ц_j \cdot Q_i^0 \right)}{Ц_i \cdot \sum_{j=1}^{n} \alpha_j},$$

где Π — операция произведения;

Q_i^0 — минимальный объем потребления;

α_i — коэффициент полезности *i*-го товара;

I — доход (бюджет);

$Ц_i$ — цена *i*-го товара.

Тогда для приведенной функции полезности функции спроса на товары продавцов *A* и *B* имеют вид:

$$Q_A = -5 + \frac{0{,}4}{0{,}4 + 0{,}6} \cdot \frac{2000 + 5 \cdot Ц_A + 3 \cdot Ц_B}{Ц_A} = -3 + \frac{800 + 1{,}2 \cdot Ц_B}{Ц_A},$$

$$Q_B = -3 + \frac{0{,}6}{0{,}4 + 0{,}6} \cdot \frac{2000 + 5 \cdot Ц_A + 3 \cdot Ц_B}{Ц_B} = -1{,}2 + \frac{1200 + 3 \cdot Ц_A}{Ц_B},$$

где $Ц_A$, $Ц_B$ — цены на товары продавцов *A* и *B*.

При этом доход продавцов зависит не только от цены на его товар, но и от количества проданного товара, на которое может повлиять другой продавец, уменьшив цену на соответствующий товар.

Допустим, что в нулевой момент времени цены составляли соответственно 25 и 30 д.е. и были устоявшимися. Предположим, что каждый продавец может увеличить или уменьшить цену своего товара на 10%. Причем если цену уменьшает только один из них, то за счет увеличения спроса его продукт поднимет интерес и ко второму и спрос у него возрастет на 3 % за счет дополнительных средств покупателей. Если цены увеличивают оба продавца, то спрос на их товар падает на 1 %.

Математически формализуйте данную конфликтную ситуацию и постройте матрицу игры. Определите, как лучше торговать продавцам.

Задание 3.

Фирма выбирает систему торговли. Имеются следующие альтернативы:

A_1 — розничная торговля через сеть магазинов;

A_2 — мелкооптовая торговля со склада;

A_3 — крупнооптовая торговля со склада;

A_4 — торговля через дистрибьюторов.

Возможные регионы распространения товара следующие:

P_1 — регион 1;

P_2 — регион 2;

P_3 — регион 3.

Для каждого региона специалисты оценили выгодность торговли по стобалльной шкале. Матрица принятия решений имеет вид:

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} \end{pmatrix} \end{array}$$

Обоснуйте критерий принятия решения. Выберите систему торговли. Значения элементов матрицы q_{ij} приведены в таблице вариантов индивидуальных заданий.

Варианты индивидуальных заданий.

Вариант 1				Вариант 2				Вариант 3			
	P_1	P_2	P_3		P_1	P_2	P_3		P_1	P_2	P_3
A_1	90	80	70	A_1	60	70	90	A_1	80	80	70
A_2	80	90	80	A_2	80	70	90	A_2	80	90	80
A_3	70	90	80	A_3	60	90	90	A_3	70	70	90
A_4	70	67	80	A_4	50	60	40	A_4	40	60	70
Вариант 4				Вариант 5				Вариант 6			
	P_1	P_2	P_3		P_1	P_2	P_3		P_1	P_2	P_3
A_1	60	80	90	A_1	50	70	60	A_1	60	70	50
A_2	70	60	80	A_2	60	50	80	A_2	70	90	50
A_3	90	50	50	A_3	60	70	60	A_3	60	90	60
A_4	60	50	50	A_4	80	90	50	A_4	50	70	90
Вариант 7				Вариант 8				Вариант 9			
	P_1	P_2	P_3		P_1	P_2	P_3		P_1	P_2	P_3
A_1	50	80	60	A_1	75	90	50	A_1	80	50	60
A_2	40	90	60	A_2	75	80	75	A_2	80	90	80
A_3	70	80	60	A_3	50	40	90	A_3	70	90	80
A_4	50	30	60	A_4	50	30	70	A_4	30	50	60
Вариант 10				Вариант 11				Вариант 12			
	P_1	P_2	P_3		P_1	P_2	P_3		P_1	P_2	P_3
A_1	50	30	40	A_1	90	60	70	A_1	50	70	90
A_2	80	70	90	A_2	80	90	80	A_2	70	60	80
A_3	60	90	90	A_3	70	70	90	A_3	60	50	70
A_4	40	40	50	A_4	50	40	30	A_4	60	30	40

Вариант 13				Вариант 14				Вариант 15			
	P_1	P_2	P_3		P_1	P_2	P_3		P_1	P_2	P_3
A_1	80	70	50	A_1	60	80	50	A_1	80	50	40
A_2	90	50	50	A_2	40	60	70	A_2	70	50	40
A_3	30	60	70	A_3	50	40	80	A_3	50	70	60
A_4	50	40	70	A_4	50	40	40	A_4	40	40	30
Вариант 16				Вариант 17				Вариант 18			
	P_1	P_2	P_3		P_1	P_2	P_3		P_1	P_2	P_3
A_1	70	60	60	A_1	40	80	50	A_1	50	70	80
A_2	60	80	80	A_2	80	90	80	A_2	80	70	90
A_3	50	90	40	A_3	70	90	80	A_3	60	90	90
A_4	40	30	20	A_4	40	30	40	A_4	50	25	30
Вариант 19				Вариант 20				Вариант 21			
	P_1	P_2	P_3		P_1	P_2	P_3		P_1	P_2	P_3
A_1	75	80	50	A_1	60	80	90	A_1	60	65	80
A_2	80	90	80	A_2	70	60	80	A_2	70	55	50
A_3	70	75	90	A_3	60	55	40	A_3	75	90	60
A_4	45	30	40	A_4	50	35	40	A_4	40	45	33
Вариант 22				Вариант 23				Вариант 24			
	P_1	P_2	P_3		P_1	P_2	P_3		P_1	P_2	P_3
A_1	70	50	80	A_1	80	70	50	A_1	90	75	90
A_2	75	80	80	A_2	67	75	80	A_2	67	50	60
A_3	50	80	70	A_3	75	80	60	A_3	50	80	60
A_4	40	50	33	A_4	40	30	50	A_4	50	40	33
Вариант 25				Вариант 26				Вариант 27			
	P_1	P_2	P_3		P_1	P_2	P_3		P_1	P_2	P_3
A_1	80	90	70	A_1	70	67	90	A_1	75	80	80
A_2	67	70	75	A_2	75	80	80	A_2	80	75	90
A_3	60	50	75	A_3	90	67	90	A_3	75	90	70
A_4	60	70	80	A_4	60	50	40	A_4	67	45	75
Вариант 28				Вариант 29				Вариант 30			
	P_1	P_2	P_3		P_1	P_2	P_3		P_1	P_2	P_3
A_1	85	67	50	A_1	90	75	55	A_1	70	67	50
A_2	90	60	40	A_2	80	75	70	A_2	85	75	50
A_3	67	60	70	A_3	40	55	80	A_3	90	67	67
A_4	40	67	50	A_4	70	33	50	A_4	55	80	75

Задание 4.

Сельскохозяйственное предприятие занимается выращиванием трех основных видов культур. Их урожайность и качество зависят от погодных условий. Прогнозные данные о средней выручке, полученной от реализации культур, в зависимости от погодных условий приведены в таблице 6.3.

Таблица 6.3 — Выручка в зависимости от погодных условий, тыс. д.е.

Наименование культур	Погодные условия			
	засушливые	оптимальные	средневлажные	влажные
Пшеница	8,9	13,6	11,9	9,8
Овес	9,3	8,8	9,1	7,5
Горох	1,9	2,2	2,1	1,9

Определить оптимальный процент высева каждой культуры на занимаемой площади при условии, что природа действует «враждебно».

Пояснения к решению.

Проверить матрицу игры на наличие доминируемых стратегий, после чего решить игру как игру игроков с нулевой суммой.

Задание 5.

Предлагается три варианта конструкции нового товара: K_1, K_2, K_3. Изготовить их можно с помощью одного из трех альтернативных технологических процессов: T_1, T_2, T_3. Экспертами были оценены по десятибалльной шкале потребительские свойства конструкции i, изготовленной с помощью технологического процесса j. Конструкция, имеющая больший балл качества, соответственно обладает и большей себестоимостью.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} T_1 & T_2 & T_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{array} & \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}, \end{array}$$

где q_{ij} — балл качества и себестоимости конструкции.

Из-за ограниченности финансовых ресурсов возникла конфликтная ситуация между «конструкторами» и «финансистами». Требуется принять компромиссное решение в выборе конструкции, если таковое возможно. В случае невозможности компромисса попытаться обосновать выбор с помощью критериев принятия решения. Значения элементов матрицы q_{ij} приведены в таблице вариантов индивидуальных заданий.

Варианты индивидуальных заданий.

Вариант 1				Вариант 2				Вариант 3			
	T_1	T_2	T_3		T_1	T_2	T_3		T_1	T_2	T_3
K_1	9	8	7	K_1	6	7	9	K_1	8	8	7
K_2	8	9	8	K_2	8	7	9	K_2	8	9	8
K_3	7	9	8	K_3	6	9	9	K_3	7	7	9
Вариант 4				Вариант 5				Вариант 6			
	T_1	T_2	T_3		T_1	T_2	T_3		T_1	T_2	T_3
K_1	6	8	9	K_1	5	7	6	K_1	6	7	5
K_2	7	6	8	K_2	6	5	8	K_2	7	9	5
K_3	9	5	5	K_3	6	7	6	K_3	6	9	6
Вариант 7				Вариант 8				Вариант 9			
	T_1	T_2	T_3		T_1	T_2	T_3		T_1	T_2	T_3
K_1	5	8	6	K_1	7	9	5	K_1	8	5	6
K_2	4	9	6	K_2	7	8	7	K_2	8	9	8
K_3	7	8	6	K_3	5	4	9	K_3	7	9	8
Вариант 10				Вариант 11				Вариант 12			
	T_1	T_2	T_3		T_1	T_2	T_3		T_1	T_2	T_3
K_1	5	3	4	K_1	9	6	7	K_1	5	7	9
K_2	8	7	9	K_2	8	9	8	K_2	7	6	8
K_3	6	9	9	K_3	7	7	9	K_3	6	5	7
Вариант 13				Вариант 14				Вариант 15			
	T_1	T_2	T_3		T_1	T_2	T_3		T_1	T_2	T_3
K_1	8	7	5	K_1	6	8	5	K_1	8	5	4
K_2	9	5	5	K_2	4	6	7	K_2	7	4	5
K_3	3	6	7	K_3	5	4	8	K_3	5	7	6
Вариант 16				Вариант 17				Вариант 18			
	T_1	T_2	T_3		T_1	T_2	T_3		T_1	T_2	T_3
K_1	7	6	6	K_1	4	8	5	K_1	5	7	8
K_2	6	8	8	K_2	8	9	8	K_2	8	7	9
K_3	5	9	4	K_3	7	9	8	K_3	6	9	9
Вариант 19				Вариант 20				Вариант 21			
	T_1	T_2	T_3		T_1	T_2	T_3		T_1	T_2	T_3
K_1	7	8	5	K_1	6	8	9	K_1	6	6	8
K_2	8	9	8	K_2	7	6	8	K_2	7	5	5
K_3	7	7	9	K_3	6	5	4	K_3	7	9	6
Вариант 22				Вариант 23				Вариант 24			
	T_1	T_2	T_3		T_1	T_2	T_3		T_1	T_2	T_3
K_1	7	5	8	K_1	8	7	5	K_1	9	7	4
K_2	7	8	8	K_2	6	7	8	K_2	6	5	6
K_3	5	8	7	K_3	7	8	6	K_3	9	8	6

Вариант 25				Вариант 26				Вариант 27			
	T_1	T_2	T_3		T_1	T_2	T_3		T_1	T_2	T_3
K_1	9	5	7	K_1	9	8	6	K_1	5	7	7
K_2	8	9	7	K_2	8	7	9	K_2	6	5	8
K_3	6	8	9	K_3	7	9	5	K_3	8	8	7
Вариант 28				Вариант 29				Вариант 30			
	T_1	T_2	T_3		T_1	T_2	T_3		T_1	T_2	T_3
K_1	8	9	6	K_1	5	7	8	K_1	8	6	5
K_2	7	8	9	K_2	8	6	9	K_2	7	6	7
K_3	8	6	8	K_3	7	5	4	K_3	6	9	7

Задание 6.

Торговому агенту необходимо в назначенное время прибыть в город, где находится потребитель. Иногородний потребитель должен вручить ему заказ на 30 тыс. д.е., но только при условии, что он лично посетит клиента в оговоренное время встречи. Возможны два варианта поездки: лететь самолетом или ехать поездом. Если погода будет хорошая, он может лететь и потратить на дорогу 2 часа. Если ехать поездом, время в пути составит около 12 часов, причем будет потерян день на рабочем месте, который по оценке торгового агента мог бы увеличить сбыт на 10 тыс. д.е. Если будет принято решение лететь самолетом, а самолет задержат в аэропорту из-за тумана, придется личное посещение заменить телефонным звонком. Это приведет к уменьшению заказа иногороднего клиента до 5 тыс. д.е., зато агент сможет обеспечить заказы на 10 тыс. д.е. дома. По прогнозу метеослужбы вероятность ясной погоды — 0,9, тумана — 0,1. Стоимость билета на поезд в оба конца составляет 0,5 тыс. д.е., на самолет — 1 тыс. д.е. Построить платежную матрицу выигрышей и определить оптимальную стратегию агента.

При какой вероятности ясной погоды выгоднее добираться поездом?

Задание 7.

На предприятии в конце месяца сложилась производственная ситуация, требующая выбора одного из трех вариантов:

- выпустить одно новое и одно старое изделие;
- выпустить три старых изделия;
- выпустить два старых изделия.

Материальное поощрение по этим вариантам в тыс. д.е. приведено в таблице 6.4.

Таблица 6.4 — Материальное поощрение по итогам работы, тыс. д.е.

Вариант	За нормочасы	За выполнение номенклатуры	За новую технику	Всего
1	3,6	1,4	4	9
2	3,6	1,4	–	5
3	3,6	–	–	3,6

Стимулировать работу можно доплатами в 0,7 тыс. д.е. и 1,50 тыс. д.е. Платежная матрица вариантов (числитель) и вероятность их осуществления (знаменатель) приведена в таблице 6.5. Найдите оптимальный для предприятия вариант и среднюю оценку ожидаемого при этом итога работы.

Таблица 6.5 — Платежная матрица вариантов в тыс. д.е. и вероятность их осуществления

Вариант и размер доплаты	Возможные итоги работы (выпуск)			
	новое и старое	три старых	два старых	одно старое
№1 и 0,7 д.е.	8,3/0,75	–	–	-0,7/0,25
№1 и 1,5 д.е.	7,5/0,9	–	–	-1,5/0,1
№2 и 0,7 д.е.	–	4,3/0,8	2,9/0,15	-0,7/0,05
№2 и 1,5 д.е.	–	3,5/0,9	2,1/0,05	-1,5/0,05
№3 и 0,7 д.е.	–	4,3/0,05	2,1/0,8	-0,7/0,15
№3 и 0 д.е.	–	5,0/0,1	3,6/0,7	0/0,2

Задание 8.

Установленное на предприятии сложное и дорогостоящее оборудование после k лет работы может оказаться в одном из трех состояний: y_1 — оборудование вполне работоспособно и требует лишь небольшого текущего ремонта; y_2 — некоторые детали значительно износились и требуют серьезного ремонта или замены; y_3 — основные детали износились настолько, что дальнейшая эксплуатация оборудования невозможна.

Прошлый опыт эксплуатации аналогичного оборудования показывает, что в 20% случаев оно может находиться в состоянии y_1, в 50% — в состоянии y_2 и в 30% — в состоянии y_3.

Для предприятия возможны три различных способа действия: x_1 — оставить оборудование в работе еще на один год, проводя незначительный ремонт своими силами; x_2 — провести капитальный ремонт оборудования с вызовом специальной бригады ремонтников; x_3 — заменить оборудование новым.

Потери, которые понесет предприятие при различных способах действия, приведены в таблице 6.6. В таблице также приведены априорные вероятности различных состояний природы. В потери входят стоимость ремонта или замены оборудования, а также убытки, связанные с ухудшением качества продукции и с простоями, вызванными неисправным оборудованием.

Таблица 6.6 — Потери предприятия при различных способах действия

Состояние оборудования	$p(y_j)$	Потери предприятия, тыс. д.е.		
		x_1	x_2	x_3
y_1	0,2	10	30	50
y_2	0,5	50	25	40
y_3	0,3	75	60	30

Определить для заданной смешанной стратегии средние потери при различных способах действия. Найти оптимальную минимаксную стратегию предприятия, при которой средний риск потерь при наихудшем состоянии природы был бы минимален.

Задание 9.

На технологическую линию может поступать сырьё с малым y_1 и с большим y_2 количеством примесей. Известно, что в среднем поступает 60% сырья первого вида и 40% сырья второго вида. Для использования различных видов сырья предусмотрены три режима работы технологической линии: x_1; x_2; x_3. Априорные вероятности состояний природы и потери, отражающие качество выпускаемой продукции и расходы сырья в зависимости от качества сырья и режима работы технологической линии, приведены в таблице 6.7.

Таблица 6.7 — Потери предприятия и вероятности состояний

Вид сырья	$p(y_j)$	Потери предприятия, тыс. д.е.		
		x_1	x_2	x_3
y_1	0,6	0	15	33
y_2	0,4	54	32	20

Определить средние потери, соответствующие заданным вероятностям при различных режимах работы. Найти оптимальную смешанную стратегию режимов работы линии и вероятности чистых стратегий в смешанной, при которых средние потери будут минимальны при наихудшем состоянии природы.

Задание 10.

Создается новое гибкое автоматизированное производство (ГАП). Выявлены три концепции создания такого производства:

A_1 — ГАП на основе завода-автомата;

A_2 — ГАП на основе автоматизированных цехов;

A_3 — ГАП на основе отдельных быстро заменяемых модулей.

Будущее ГАП может эксплуатироваться при возможных условиях:

B_1 — механообработка сохранит в обозримом будущем свое доминирующее значение при обработке деталей;

B_2 — механообработка будет вытеснена какими-то более прогрессивными технологическими процессами.

В качестве элементов платежной матрицы используется комплексный показатель эффективности, полученный путем свертки следующих показателей: производительность труда, фондоотдача, экономический эффект от эксплуатации ГАП:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 100 & 25 \\ 90 & 65 \\ 75 & 75 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Вероятности наступления условий (риска) следующие:

$p(B_1)$ — вероятность, что механообработка сохранит в обозримом будущем свое доминирующее положение. Значения этой вероятности в зависимости от варианта индивидуального задания приведены в таблице 6.8;

$p(B_2)$ — вероятность, что механообработка будет вытеснена более прогрессивными технологическими процессами. $p(B_2) = 1 - p(B_1)$.

Требуется принять решение о варианте ГАП со знанием вероятностей риска $p(B_1)$ и $p(B_2)$.

Таблица 6.8 — Значения вероятности $p(B_1)$

Вариант	$p(B_1)$	Вариант	$p(B_1)$	Вариант	$p(B_1)$
1	0,51	11	0,22	21	0,12
2	0,32	12	0,21	22	0,19
3	0,40	13	0,27	23	0,29
4	0,45	14	0,30	24	0,11
5	0,36	15	0,20	25	0,52
6	0,25	16	0,23	26	0,50
7	0,33	17	0,41	27	0,43
8	0,48	18	0,17	28	0,48
9	0,16	19	0,28	29	0,15
10	0,40	20	0,44	30	0,58

Задание 11.

Три различных потребителя (А, В и С) должны построить хранилища специальной продукции. Затраты на строительство зависят от объема хранилищ и составляют для потребителей А, В и С 20, 30 и 25 ден. ед. соответственно. Для постройки хранилищ потребители могут организовывать коалиции. Объединившись в коалиции, их затраты составят: А и В — 40; А и С — 39; В и С — 50; А, В и С — 60 ден. ед. соответственно. Считая, что члены коалиции равноправны, определить наиболее выгодный вариант постройки хранилищ (число хранилищ и коалиции, которые будут их строить).

Задание 12.

Фирма планирует построить завод для производства нового товара. После рассмотрения нескольких вариантов были оставлены три основных:

– построить большой завод (БЗ) стоимостью 600 тыс. д.е. При этом варианте в случае большого спроса на выпускаемую продукцию ожидается годовой доход в размере 250 тыс. д.е. в течение следующих пяти лет. В случае низкого спроса ежегодные убытки из-за больших капиталовложений составят 50 тыс. д.е. Вероятности высокого и низкого уровней спроса составляют соответственно 0,7 и 0,3;

– построить маленький завод (МЗ) стоимостью 350 тыс. д.е. При этом варианте в случае большого спроса ежегодный доход в течение пяти лет составит 150 тыс. д.е., при низком спросе – 25 тыс. д.е. Вероятности высокого и низкого уровней спроса также составляют соответственно 0,7 и 0,3;

– отложить решение вопроса о строительстве завода на один год для сбора дополнительной информации, которая может быть позитивной или негативной с вероятностями 0,8 и 0,2 соответственно. Через год, если информация окажется позитивной, можно построить большой или маленький завод по указанным выше ценам. Руководство компании может решить вообще никакого завода не строить, если информация будет негативной. Вне зависимости от типа завода вероятности большого и низкого спроса меняются на 0,9 и 0,1 соответственно, если будет получена позитивная информация. Доходы на последующие четыре года остаются такими же, какими они были указаны в двух предыдущих вариантах для БЗ и МЗ.

Все расходы выражены в текущей стоимости и не должны дисконтироваться.

Построить дерево решений и определить наиболее эффективную последовательность действий руководства фирмы, основываясь на ожидаемых доходах каждого варианта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Садовин, Н. С. Основы теории игр : учеб. пособие / Н. С. Садовин, Т. Н. Садовина. — Йошкар-Ола, 2011. — 119 с.

2. Безруков, А. Б. Прикладная теория игр : учеб. пособие / А. Б Безруков, С. С. Саитгараев. — Челябинск : Челяб. гос. ун-т., 2001. — 127 с.

3. Петросян, Л. А. Теория игр : учеб. пособие для университетов / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, Е. А. Семина. — М.: Высш.шк., Книжный дом «Университет», 1998. — 304 с.

4. Нейман, Дж. фон. Теория игр и экономическое поведение / Дж. фон Нейман, О. Моргенштейн. : пер. с англ. под ред. и с доб. Н. Н. Воробьева. — М. : Наука, 1970. — 708 с.

5. Крушевский, А. В. Теория игр / А. В. Крушевский — К. : Издательское объединение «Вища школа», 1977. — 216 с.

6. Мулен, Э. Теория игр с примерами из математической экономики : пер. с франц. / Э. Мулен. — М. : Мир, 1985. — 200 с.

7. Печерский, С Л. Теория игр для экономистов. Вводный курс : учеб. пособие / С. Л. Печерский, А. А. Беляева. — СПб. : Изд-во Европ. Ун-та в С.-Петербурге, 2001. — 342 с.

8. Оуэн, Г. Теория игр : пер. с англ. / Г. Оуэн. — М. : Мир, 1971. — 232 с.

9. Дубров, А. М. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе : учеб. пособие / А. М. Дубров, Б. А. Лагоша, Е. Ю. Хрусталев; под ред. Б.А. Лагоши. — Финансы и статистика, 2000. — 176 с.

10. Эпштейн, Г. Л. Теория игр : учеб. пособие / Г. Л. Эпштейн. — М. : МГУПС (МИИТ), 2014. — 114 с.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Наталья Николаевна Лепило

ТЕОРИЯ ИГР

Учебное пособие

В авторской редакции

Художественное оформление обложки Н. В. Чернышова

Заказ № 294. Формат 60x84 $^{1}/_{16.}$
Бумага офс. Печать RISO.
Усл. печат. л. 7,7 Уч.-изд. л. 6,6
Издательство не несет ответственность за содержание
материала, предоставленного автором к печати.
Издатель и изготовитель:
ГОУВПО ЛНР «Донбасский государственный технический университет»
пр. Ленина, 16, г. Алчевск, ЛНР, 94204
(ИЗДАТЕЛЬСКО-ПОЛИГРАФИЧЕСКИЙ ЦЕНТР, ауд. 2113, т/факс 2-58-59)
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя
и распространителя средства массовой информации
МИ-СГР ИД 000055 от 05.02.2016