

УДК 330.4:519

Мотченко Л. А.,  
Клочко Н. В.  
(ДонГТУ, г. Алчевск, ЛНР)

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИННОВАЦИОННЫХ ПРОДУКТОВ И УСЛУГ

*В статье предложены прогнозно-аналитические модели динамики распространения инновационных продуктов и услуг типа SIR-модели в непрерывной и дискретной формах. Проведена разбивка социума на три типа потребителей нового продукта или услуги по признаку индивидуальной склонности к восприятию инновации.*

**Ключевые слова:** инновация, модель, динамика, новаторы, рутинеры, система дифференциальных уравнений, система разностных уравнений.

**Проблема и ее связь с научными и практическими задачами.** Проектом Федерального закона «Об инновационной деятельности и государственной инновационной политике» определено, что основными целями государственной инновационной политики Российской Федерации является создание экономических, правовых и организационных условий для инновационной деятельности, обеспечивающих рост конкурентоспособности отечественной продукции, эффективное использование научно-технических результатов, решения задач социально-экономического развития [1]. Без существенных инноваций ни одна страна не сможет обеспечить высокий уровень жизни населения и устойчивый экономический рост. Только инновационное развитие позволит повысить конкурентоспособность экономики, осуществить прогрессивные структурные сдвиги, обновить реальный сектор экономики, устойчивое социально-экономическое развитие государства. Однако сегодня инновационное развитие не стало основой роста национальной экономики РФ. Поэтому усилия специалистов необходимо сосредоточить на исследовании процесса распространения инноваций, определении факторов его ускорения, выявлении оптимальных действий по изменению инновационной стратегии.

**Анализ последних исследований и публикаций.** Наиболее известными теориями распространения инноваций являются диф-

фузные модели Роджерса Э. и Баса Ф. В основе модели Роджерса Э. [2] лежит сегментация потенциальных потребителей инновации по признаку индивидуальной склонности к восприятию инновации. Басс Ф. [3] на основе работы Роджерса Э. разработал математическую модель распространения новых продуктов с учетом следующего предположения: вероятность совершения покупки нового продукта потребителем является линейной функцией от числа предыдущих покупателей. Вместе с тем модель Басса Ф. определяет динамику только количества лиц, принявших новшество, другие потенциальные потребители инновации не учитываются. Этот недостаток устранен в модели эпидемии. Впервые классическая модель эпидемии, так называемая, SIR-модель, была предложена британскими учеными Кермаком В. и МакКендриком А. [4] для исследования распространения социально значимых заболеваний. В настоящее время такие модели используются для описания лавинообразных социально-экономических процессов (паники, ажиотажа в частности) [5], распространения информации в социальных сетях [6], поведения инвесторов [7], коллективной социальной динамики индивидуальных жертвований [8], распространения негосударственного пенсионного обеспечения [9], распространения вредоносных программ в компьютерных сетях [10] и т. д. Модели заражения, внушения и наследования, как главные

механизмы социально-психологического воздействия, представляют собой эффективное средство изучения распространения инноваций.

**Постановка задачи.** Целью статьи является разработка математических моделей динамики распространения инновационных продуктов и услуг как лавинообразного процесса, позволяющих исследовать и прогнозировать динамику потребления.

**Изложение материала и его результаты.** Согласно теории диффузии инноваций [11], любая инновация (например, новая идея, методика, технология, продукт) диффундирует, то есть распространяется в обществе по определенной предсказуемой модели. Некоторые люди принимают инновацию сразу же, едва услышав о ней. Другим людям нужно больше времени, чтобы попробовать что-нибудь новое, третьи могут отвергнуть инновацию или процесс ее принятия затянется. Опираясь на эти постулаты и существующие SIR-модели: эпидемии [4], модели лавинообразных процессов [5], модели распространения негосударственного пенсионного обеспечения [9], введем следующие гипотезы.

Население региона, где распространяется инновация, численностью  $N(t)$  в момент  $t$  можно разбить на три группы. Первая группа объединяет лиц, которые положительно относятся к нововведениям, они являются возможными потребителями инновационного продукта или услуги (новации). Назовем их потенциальными новаторами, а их количество в момент  $t$  обозначать через  $S(t)$ . Вторая группа объединяет лиц, которые уже являются потребителями новации — это настоящие новаторы, распространители новаторских идей, агенты. Их количество в момент  $t$  обозначим через  $I(t)$ . Наконец, третья группа — это лица, которые действуют по привычке, негативно относятся ко всяким новшествам и изменениям. Назовем их консерваторами или рутинерами (рутинер (фр., от routine) — человек костный, действующий

по привычке, боящийся всяких нововведений [12]), а их количество в момент  $t$  обозначать через  $R(t)$ . Таким образом, общая численность населения региона в момент  $t$  равна сумме  $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ .

Оценим динамику данных групп. Сокращение количества потенциальных новаторов  $S(t)$  происходит за счет вступления в когорту потребителей новаторского продукта  $\Delta_I S(t)$  и перехода к совокупности тех, кто не воспринимает новаторский продукт, или тех, кто разочаровался в новаторском продукте  $\Delta_R S(t)$ , а прирост — за счет выхода из сообщества новаторов  $\Delta_S I(t)$  по разным причинам, и за счет переубеждения рутинеров  $\Delta_S R(t)$ . Определение приростов осуществляется на основании подхода, предложенного в [5] и [9].

Пусть представители всех типов распределены в социуме равномерно. Пусть далее каждый индивид, не являющийся новатором, контактирует с  $r$  индивидуумами в единицу времени. Доля новаторов среди них равна  $\frac{I(t)}{N(t)-1}$ , так как сам индивид не участвует в определении доли. Итак, на индивидуума влияют  $r \cdot \frac{I(t)}{N(t)-1}$  новаторов. Привлечь к инновации можно только потенциального потребителя, рутинеры сначала меняют свою «идеологию», то есть сначала становятся потенциальными, а уже потом действительными новаторами. Вероятность привлечения одного человека к потреблению новаторского продукта при однократном контакте равна  $p_{S1}$ , а вероятность убеждения одного рутинера  $p_{R1}$  (рис. 1).

Далее, принимая гипотезу о независимом влиянии нескольких агентов, получим вероятность того, что лицо будет привлечено к потребителям инновационного продукта хотя бы одним агентом:

$$p_S = 1 - (1 - p_{S1})^{r \cdot \frac{I(t)}{N(t)-1}}. \quad (1)$$

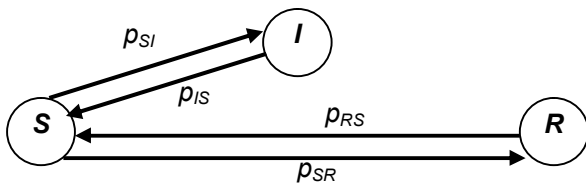


Рисунок 1 Схема процесса распространения инновационного продукта  
(источник: разработка авторов)

Отсюда сокращение количества потенциальных новаторов за счет привлечения в сообщество потребителей инновационного продукта за период  $\Delta t$ :

$$\Delta_I S(t) = S(t) \cdot \left[ 1 - (1 - p_{SI})^{r \cdot \frac{I(t)}{N(t)-1}} \right] \cdot \Delta t. \quad (2)$$

Аналогично определяется и прирост за период  $\Delta t$  количества потенциальных новаторов за счет присоединения к новаторской идее рутинеров:

$$\Delta_S R(t) = R(t) \cdot \left[ 1 - (1 - p_{RI})^{r \cdot \frac{I(t)}{N(t)-1}} \right] \cdot \Delta t. \quad (3)$$

Что касается сокращения за период  $\Delta t$  количества потенциальных новаторов за счет перехода к совокупности рутинеров и прироста за счет выхода из сообщества новаторов, но неокончательного отказа от новаторского продукта, то есть основания считать их пропорциональными численности этих групп, то есть

$$\Delta_R S(t) = p_{SR} \cdot S(t) \cdot \Delta t; \quad (4)$$

$$\Delta_S I(t) = p_{IS} \cdot I(t) \cdot \Delta t, \quad (5)$$

где  $p_{SR}$  — коэффициент (интенсивность) окончательного отказа от новаторского продукта для потенциальных новаторов в единицу времени;  $p_{IS}$  — коэффициент выбывания из новаторского сообщества, но неокончательного отказа от новаторского продукта в единицу времени.

Итак, общий прирост совокупности потенциальных новаторов за период  $\Delta t$ :

$$\begin{aligned} \Delta S(t) = & -S(t) \cdot \left[ 1 - (1 - p_{SI})^{r \cdot \frac{I(t)}{N(t)-1}} + p_{SR} \right] \Delta t + \\ & + p_{IS} I(t) \Delta t + R(t) \cdot \left[ 1 - (1 - p_{RI})^{r \cdot \frac{I(t)}{N(t)-1}} \right] \Delta t. \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогичные рассуждения проводятся для определения изменения количества действительных сторонников новаторского продукта. Прирост происходит за счет вступления в сообщество новаторов  $\Delta_I S(t)$ , а сокращение — за счет выхода из новаторского сообщества и окончательного отказа от этого продукта  $\Delta_R I(t)$  или отказа лишь на некоторое время, то есть перехода к совокупности потенциальных новаторов  $\Delta_S I(t)$ :

$$\begin{aligned} \Delta I(t) = & S(t) \cdot \left[ 1 - (1 - p_{SI})^{r \cdot \frac{I(t)}{N(t)-1}} \right] \cdot \Delta t - \\ & - (p_{IS} + p_{IR}) \cdot I(t) \cdot \Delta t, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $p_{IR}$  — коэффициент (интенсивность) окончательного отказа от новаторского продукта для новаторов в единицу времени.

Разделив уравнение (6–7) на  $\Delta t$  и переходя к границе при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим модель динамики распространения новаторского продукта в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -S(t) \cdot \left[ 1 - (1 - p_{SI})^{r \cdot \frac{I(t)}{N(t)-1}} + p_{SR} \right] + \\ + I(t) \cdot p_{IS} + R(t) \cdot \left[ 1 - (1 - p_{RI})^{r \cdot \frac{I(t)}{N(t)-1}} \right]; \\ \frac{dI(t)}{dt} = S(t) \cdot \left[ 1 - (1 - p_{SI})^{r \cdot \frac{I(t)}{N(t)-1}} \right] - \\ - I(t) \cdot [p_{IS} + p_{IR}]; \\ \frac{dR(t)}{dt} = \frac{dN(t)}{dt} - \frac{dS(t)}{dt} - \frac{dI(t)}{dt}. \end{cases} \quad (8)$$

Для однозначного определения решения системы необходимо задать начальные усло-

вия. В качестве нулевого момента времени  $t_0$  естественно выбрать момент появления нового продукта или услуги. Начальное количество новаторов равно  $I(t_0) = I_0$ , рутинеров —  $R(t_0) = R_0$ , а начальное количество потенциальных новаторов вычисляется как разница  $S(t_0) = S_0 = N_0 - R_0 - I_0$ .

Для определения количества новаторов и рутинеров воспользуемся моделью Роджерса Э. [2], согласно которой новаторы составляют 2,5%, они более ориентированы на новшества, чем члены других категорий. Отстающие (рутинеры) составляют 16%, они подозрительно относятся ко всему новому. Потенциальных новаторов Э. Роджерс разбивает на три категории: ранние последователи, раннее большинство, позднее большинство. Опираясь на модель Роджерса Э., примем  $I_0 = 2,5\%$ ,  $R_0 = 16\%$  и  $S_0 = 81,5\%$ .

Однако более информативным является описание динамики распространения инновационных продуктов в долях определенных групп социума  $k_S(t) = \frac{S(t)}{N(t)}$ ,

$$k_I(t) = \frac{I(t)}{N(t)}, \quad k_R(t) = \frac{R(t)}{N(t)};$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dk_S(t)}{dt} &= -k_S(t) \cdot \left[ \frac{d \ln N(t)}{dt} + (1 - (1 - p_{S1})^{r \cdot k_I(t)}) + \right. \\ &\quad \left. + p_{SR} \right] + k_I(t) \cdot p_{IS} + k_R(t) \cdot \left[ 1 - (1 - p_{R1})^{r \cdot k_I(t)} \right]; \\ \frac{dk_I(t)}{dt} &= k_S(t) \cdot \left[ 1 - (1 - p_{S1})^{r \cdot k_I(t)} \right] - \\ &\quad - k_I(t) \cdot \left[ \frac{d \ln N(t)}{dt} + p_{IS} + p_{IR} \right]; \\ \frac{dk_R(t)}{dt} &= \frac{dk_S(t)}{dt} - \frac{dk_I(t)}{dt}, \end{aligned} \right. \quad (9)$$

### Библиографический список

1. Об инновационной деятельности и государственной инновационной политике [Электронный ресурс] : пояснительная записка к проекту Федерального закона. — Режим доступа: <https://www.lawmix.ru/lawprojects/73399>.

при начальных условиях:

$$k_I(t_0) = k_{I0}, \quad k_R(t_0) = k_{R0},$$

$$k_S(t_0) = k_{S0} = 1 - k_{I0} - k_{R0}.$$

Вместе с тем для описания процесса распространения инновационных продуктов более естественной является дискретная модель (10), поскольку сам процесс является дискретным, в виде следующей системы разностных уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} S_{t+1} &= S_t \cdot \left[ (1 - p_{S1})^{r \cdot \frac{I_t}{N_t - 1}} - p_{SR} \right] + I_t \cdot p_{IS} + \\ &\quad + R_t \cdot \left[ 1 - (1 - p_{R1})^{r \cdot \frac{I_t}{N_t - 1}} \right]; \\ I_{t+1} &= S_t \cdot \left[ 1 - (1 - p_{S1})^{r \cdot \frac{I_t}{N_t - 1}} \right] + \\ &\quad + I_t \cdot [1 - p_{IS} - p_{IR}]; \\ R_{t+1} &= N_{t+1} - S_{t+1} - I_{t+1}, \end{aligned} \right. \quad (10)$$

где  $S_0, I_0, R_0, N_0$  — известные начальные значения.

**Выводы и направление дальнейших исследований.** Полученные модели (8–10) являются базовыми, поскольку позволяют анализировать и прогнозировать лишь общие тенденции распространения инновационных продуктов или услуг, как динамики численности означенных трех групп потребителей. Необходимость учета сегментации потенциальных потребителей нового продукта по признаку индивидуальной склонности к восприятию инновации согласно Роджерсу Э. (пять сегментов), а также неоднородность социума по возрастному, социальному, психологическому, ролевому составу и нестационарность вероятностных характеристик определяют направление дальнейших исследований авторов.

2. Rogers, E. M. *A History of Communication Theory. An Introduction to Planned Communication [Text]* / E. M. Rogers. — London etc., 1992. — 62 p.
3. Bass, Frank M. *New Product Growth Model for Consumer Durables [Text]* / Frank M. Bass // *Management science*. — № 15. — P. 215–227.
4. Kermack, W. O. *A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics [Text]* / W. O. Kermack, A. G. McKendrick // *Proceedings of the Royal Society of London*. — 1927. — Series A, Vol. 115. — P. 700–721.
5. Данич, В. Н. *Моделирование быстрых социально-экономических процессов [Текст]* : монография / В. Н. Данич. — Луганск : Изд-во ЛНУ им. В. Даля, 2004. — 304 с.
6. Губанов, Д. А. *Модели влияния в социальных сетях [Текст]* / Д. А. Губанов, Д. А. Новиков, А. Г. Чхартишвили // *Управление большими системами*. — 2009. — Вып. 27. — С. 205–281.
7. Shive, S. *An Epidemic Model of Investor Behaviour [Text]* / S. Shive // *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. — 2010. — № 45. — P. 169–198. — [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://journals.cambridge.org>.
8. Schweitzer, F. *The Epidemics of Donations : Logistic Growth and Power-Laws [Text]* / F. Schweitzer, R. Mach. — PLoS ONE. — 2008. — № 3 (1). — [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.plosone.org/article>.
9. Данич, В. М. *Модели динаміки розповсюдження недержавного пенсійного забезпечення [Текст]* / В. М. Данич, Л. П. Якимова // *Вісник ЛНУ ім. В. Даля*. — Луганськ, 2011. — № 2 (156), Ч. 1. — С. 65–70.
10. Новиков, С. В. *Эпидемиологические модели прогнозирования вирусных атак [Текст]* // *Теория и технология программирования и защиты информации: мат. X международной научно-практической конференции*. — Санкт-Петербург, 2006. — С. 35–36.
11. Rogers, E. M. *Diffusion of innovations [Text]* / E. M. Rogers. — New York : Free Press, 1995. — 519 p.
12. *Словарь иностранных слов, вошедших в состав русского языка [Текст]* / под ред. А. Н. Чудинова. — [3-е изд., испр. и доп.]. — СПб. : Издание В. И. Губинского, 1910. — 582 с.

© Мотченко Л. А.

© Клочко Н. В.

Рекомендована к печати д.э.н., проф., зав. каф. ЭП ЛНУ им. В. Даля Максимовым В. В.

Статья поступила в редакцию 13.02.19.

Мотченко Л. А., Клочко Н. В. (ДонДТУ, м. Алчевськ, ЛНР)

**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ ПОШИРЕННЯ ІННОВАЦІЙНИХ ПРОДУКТІВ ТА ПОСЛУГ**

У статті запропоновано прогнозно-аналітичні моделі динаміки поширення інноваційних продуктів і послуг типу SIR-моделі в безперервній і дискретній формах. Проведено розбивку соціуму на три типи споживачів нового продукту або послуги за ознакою індивідуальної схильності до сприйняття інновації.

**Ключові слова:** інновація, модель, динаміка, новатори, рутинери, система диференціальних рівнянь, система різницевих рівнянь.

Motchenko L. A., Klochko N. V. (DonSTU, Alchevsk, LPR)

**MATHEMATICAL MODEL OF DISTRIBUTION DYNAMICS OF INNOVATIVE PRODUCTS AND SERVICES**

The article contains predictive and analytical models of distribution dynamics of innovative products and services such as the SIR-model in continuous and discrete forms. There has been made the breakdown of society into three types of consumers of a new product or service basing on the individual leaning to perceive innovation.

**Key words:** innovation, model, dynamics, innovators, routineers, differential equations system, difference equation system.