

УДК 622.243.2

проф. Литвинский Г. Г.
(ДонГТУ, г. Алчевск, ЛНР, ligag@ya.ru)

РАЗВИТИЕ ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ И ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАЗРУШЕНИЯ

Дан краткий анализ существующих теорий прочности. На основе идеи проф. Н. Н. Давиденкова и проф. Я. Б. Фридмана путём сопряжения линейного паспорта прочности для разрывов (пинч-эффект) и нелинейного паспорта аналитической теории прочности при разрушении сдвигом развита единая теория прочности. Изучены особенности разрушения материалов при изменении вида напряжённо-деформированного состояния (НДС). Впервые предложено описание прочности нового класса материалов, обладающих биупругостью. Дан перечень явлений и процессов в геомеханике и горном деле, где проявляется пинч-эффект. Результаты исследований развивают теоретические основы прочности и разрушения деформируемого твёрдого тела.

Ключевые слова: теория прочности, пинч-эффект, разрушение отрывом, разрушение сдвигом, паспорт прочности, геомеханика, горная порода, упругие постоянные, биупругость, параметр Надаи – Лодэ, схема Кармана, схема Беккера.

1 Актуальность и цель исследований

Проблема изучения закономерностей разрушения различных материалов и построения соответствующей теории прочности с давних пор привлекала внимание многих исследователей и учёных. Ей посвятили свои труды многие выдающиеся деятели науки: Галилео Галилей, Э. Мариотт, Ж. Понселе, Б. Сен-Венан и другие начиная с эпохи Возрождения и до наших дней [1].

Однако эту проблему всё ещё нельзя считать полностью решённой, и она требует интенсивного продолжения исследований, направленных на её углубление и обобщение. В частности, следует расширить существующий уровень знаний о закономерностях разрушения не только пластичных материалов (таких как металлы), но и материалов с хрупким поведением (типа горных пород, керамики и др.).

Известные гипотезы и теории прочности до сих пор нуждаются в системном анализе, сопоставлении с накопленными экспериментальными данными и определённом переосмыслении для развития наших представлений о сложных процессах разрушения различных материалов, в первую очередь тех из них, которым присущи не только пластичные, но и хрупкие свойства.

Следовательно, разработка теоретических основ расчёта условий разрушения различных материалов всё ещё остаётся актуальной проблемой для механики твёрдого деформируемого тела.

Целью исследования является создание единой (обобщённой) теории прочности на основе изучения закономерностей разрушения материалов (горных пород, материалов природного и искусственного происхождения) при различных видах напряжённо-деформированного состояния (НДС).

Идея работы состоит в учёте влияния на разрушение материалов проявлений пинч-эффекта, т. е. возникновения деформаций растяжения, и определении условий разрушения от трещин отрыва и сдвига на диаграмме О. Мора.

Объектом исследования являются прочностные показатели материалов при сложном НДС, **предмет** исследований — закономерности возникновения разрушения от разрывов (пинч-эффекта) при нагружении хрупких и пластичных материалов.

Исходя из этого, **задачами исследования** являются:

1) краткий анализ существующих теорий прочности и представлений о механизмах разрушения;

2) разработка математической модели разрушения с учётом влияния пинч-эффекта;

3) изучение закономерностей разрушения с учётом разнообразных механизмов зарождения и развития трещин сдвига и отрыва;

4) построение единой (обобщённой) теории прочности в виде паспорта прочности материала на диаграмме О. Мора;

5) изучение возможных практических приложений полученных результатов, рассмотрение прикладных задач горной геомеханики.

В настоящее время для объяснения разрушения материалов при действии внешних нагрузок были предложены различные теории прочности, в которых процессы разрушения объяснялись возникновением разрывных и сдвиговых трещин. Ещё Галилео Галилей к концу своей жизни (1642 г.) заложил основы теорий прочности. Далее, по мере накопления экспериментальных данных и развития техники, были предложены разные варианты теорий прочности. Рассмотрим их основные положения.

2 Краткий анализ теорий прочности

Развитию теорий прочности посвящены работы Сен-Венана, Мариотта, Ляме, Клебша, Баушингера, Бельтрами, Мизеса, Генки и других выдающихся механиков [1, 2]. Их идеи развивались, обобщались, экспериментально проверялись и были представлены в виде теорий прочности, которые впоследствии называли классическими.

Наиболее известны 4 классические теории прочности. Первая и вторая из них объясняют разрушение от трещин растяжения, а третья и четвертая — от трещин сдвига.

Для условий появления в теле разрывов были предложены две схожих гипотезы: наибольших **нормальных напряжений** (первая теория прочности) и наибольших линейных **деформаций** (вторая теория прочности).

Согласно **первой теории**, условия прочности выражены уравнениями (считая сжатие положительным):

при растяжении

$$\sigma_3 \geq -[\sigma_p]; \quad (1)$$

при сжатии

$$\sigma_1 \leq [\sigma_c], \quad (2)$$

где σ_1 и σ_3 — максимальное и минимальное главные нормальные напряжения, действующие в рассматриваемой точке;

$[\sigma_p]$ и $[\sigma_c]$ — допускаемые нормальные напряжения соответственно при одноосном растяжении ($\sigma_3 \leq 0 = \sigma_2 = \sigma_1$) и сжатии ($\sigma_1 \geq 0 = \sigma_2 = \sigma_3$).

Первую теорию прочности связывают с именем Галилея, предложившего исходную идею в середине XVII в., затем она была обоснована Ламе (1830 г.) и разработана Рэнкином (1888 г.). Эксперименты показали, что она даёт приемлемые результаты лишь при одноосном растяжении или сжатии материалов, но не подтверждается при объёмном их нагружении ($\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$).

Вторая гипотеза прочности впервые была выдвинута Э. Мариоттом (1682 г.), применялась Ж. Понселе, впоследствии развита Б. Сен-Венаном в XIX в. и достаточно хорошо описывала разрушение материалов при прямом растяжении.

Согласно этой теории прочности, опасное состояние материала наступает тогда, когда наибольшее относительное удлинение (ε_1 или ε_3) достигает предельного значения $[\varepsilon_c]$ или $[\varepsilon_p]$:

$$\begin{aligned} [\varepsilon_p] &= [\sigma_p] / E \geq |\varepsilon_3|; \\ [\varepsilon_c] &= [\sigma_c] / E \geq |\varepsilon_1|, \end{aligned} \quad (3)$$

где $[\varepsilon_p]$ — предельно допустимое относительное удлинение; $[\sigma_p]$ — предел прочности материала на одноосное растяжение; E — модуль продольной упругости материала.

Если воспользоваться обобщённым законом Гука, уравнения прочности (3) мож-

но записать более удобно для использования при объёмных растяжении и сжатии:

$$\begin{aligned} [\sigma_p] &\geq |\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)|; \\ [\sigma_c] &\geq |\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)|. \end{aligned} \quad (4)$$

Попытки применения второй теории прочности при сложном нагружении, т. е. при разном объёмном состоянии материала ($\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$), были малоуспешны. Особенно разительные расхождения предсказаний этой теории с экспериментальными данными наблюдались при попытках её распространения для объёмного сжатия материалов. Поэтому со свойственной тому времени категоричностью, которая имела место из-за недостаточной изученности феномена разрушения, от второй теории прочности отказались и перестали применять в расчётной практике в начале прошлого века.

В настоящее время становится понятным, что вторую теорию прочности отвергли из-за попыток распространить её на сдвиговые механизмы разрушения материалов, где она неприменима. В то же время она вполне пригодна для описания разрушения материалов от растягивающих напряжений.

На смену первым двум теориям прочности пришли более сложные.

Третья теория прочности (наибольших касательных напряжений) была предложена французским физиком Кулоном в 1773 г. и подтверждена опытами Треска, Геста и других учёных и имеет вид

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq 2[\tau] = [\sigma_p] = [\sigma_c]. \quad (5)$$

Четвёртая теория (наибольшей удельной потенциальной энергии формоизменения) была разработана в 1904 г. Губером, в 1913 г. Мизесом и в 1924 г. Генки. Теория записывается уравнением

$$[\sigma] \geq 2^{-0,5} \sqrt{\sum_{i,j} (\sigma_i - \sigma_j)^2}, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (6)$$

Эти теории прочности дают условия начала разрушения металлов и материалов с

пластическим поведением в предельной стадии, т. е. когда их угол внутреннего трения ρ весьма мал:

$$\rho = d\sigma_n / d\tau_{nt} \approx 0, \quad (7)$$

где σ_n , τ_{nt} — соответственно нормальное и касательное напряжения на площадке предельного сдвига с нормалью n .

Для материалов с хрупким поведением при разрушении, у которых угол внутреннего трения $\rho > 0$, эти теории оказались малоприменимыми.

Пятая теория прочности предельных напряжённых состояний предложена О. Мором (1900 г.) по аналогии с законом трения скольжения Кулона [3]. Согласно ей, разрушение наступает в зависимости от вида напряжённого состояния в данной точке, когда на некоторой площадке с нормалью n выполняется критическое соотношение между нормальным и касательным напряжениями σ_n , τ_{nt} :

$$\tau_{nt} \geq f(\sigma_n). \quad (8)$$

Теория О. Мора позволила вполне удовлетворительно описать разрушение материалов с помощью предельной огибающей наибольших кругов напряжений диаграммы Мора [1, 3]. Уравнение (8), по сути, является записью этой предельной кривой, которую часто называют паспортом прочности материала.

Вся проблема состояла в том, что осталось неизвестным, как теоретически доказать вид функции (8). Отсюда появилось множество гипотез и теорий, предлагающих разные виды записи условия разрушения (8) с использованием «уточняющих» предположений и основанных на всё более сложных алгебраических преобразованиях, обзор которых приведён в [1, 2].

Наконец, с появлением **аналитической теории прочности** [4] эта проблема была решена. Из рассмотрения физических процессов зарождения и роста сдвиговых трещин при нагружении получено семейство дифференциальных (а не алгебраиче-

ских) уравнений, и была теоретически доказана порождающая формула разрушения материала, т. е. формула паспорта прочности, в простейшем случае имеющей вид

$$\tau_{nt} \geq \tau_0 \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_0} + 1 \right)^\alpha, \quad (9)$$

где α , σ_0 , τ_0 — соответственно параметр хрупкости, когезия разрыва и когезия сдвига — постоянные материала, определяемые экспериментально.

Однако все теории прочности, основанные на идее О. Мора (8) оказались несостоятельными для описания процессов разрушения, связанных с так называемым пинч-эффектом.

3 Феномен пинч-эффекта при сжатии материалов

Явление разрушения при сжатии от появившихся трещин раскола при отсутствии растягивающих напряжений на площадке разрушения впервые обнаружил лауреат нобелевской премии Р. У. Бриджмен. Он описал ряд явлений, характерных для разрушения твёрдых тел при больших давлениях [5]. Одно из этих явлений, названное им пинч-эффектом, состоит в следующем. Сплошной цилиндр подвергали давлению, действующему только на наружную цилиндрическую поверхность; торцы же оставляли ненагруженными. Когда давление достигало некоторого предела, цилиндр обычно раскалывался перпендикулярно своей образующей на диски. Возникновение раскола было подобным разрушению каменных материалов при одноосном сжатии.

Явление откола при нагружении материала в условиях $\sigma_3 \geq 0$ назовём феноменом пинч-эффекта.

Рассмотрим эти особенности разрушения породы. Для этого используем в качестве примера типичные результаты испытаний на одноосное сжатие стандартного образца сильвинита в лабораторных условиях под прессом [6]. Здесь мы сталкиваемся с особым типом разрушения, в котором при от-

сутствии растягивающих напряжений возникает продольный раскол образца породы под действием трещин разрыва (рис. 1).

Как следует из результатов испытаний, горные породы при одноосном сжатии начинают разрушаться путём появления и роста трещин откола, параллельных направлению приложения сжимающей нагрузки. Эти трещины буквально пронизывают тело образца, после чего образовавшиеся вертикальные отдельные столбцы, пластины и пр.) начинают руинным образом откалываться за счёт потери продольной устойчивости. Материал как бы вспучивается в поперечном направлении и на последних стадиях нагружения представляет собой сложную конструкцию вертикально ориентированных обломков.

Огромный накопленный экспериментальный материал при испытаниях на одноосное сжатие природных и искусственных материалов, а также поведение крупных каменных и бетонных конструкций при сжатии убедительно свидетельствует, что их разрушение происходит за счёт образования продольных трещин растяжения. На рисунке 2 представлена бетонная колонна, в ней отчётливо видны явно выраженные вертикальные трещины раскола различного раскрытия.

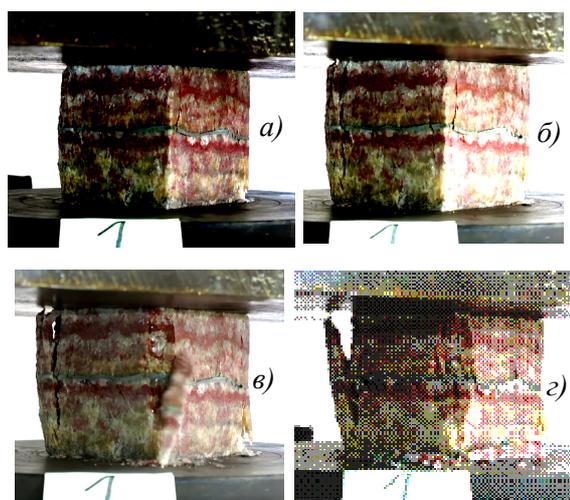


Рисунок 1 Последовательные этапы (а, б, в, з) разрушения образца сильвинита продольными трещинами разрыва при одноосном сжатии



Рисунок 2 Разрушение сжатой бетонной колонны продольными трещинами раскола

Нетрудно заметить подобие такого разрушения, вызванного пинч-эффектом: и здесь и там материал при сжатии раскалывается трещинами растяжения.

Эта особенность разрушения расколом вступает в противоречие с существующими представлениями о разрушении при сжатии, согласно которым главную роль должны играть деформации сдвига, как это наблюдается при сжатии металлов. Появление трещин растяжения при отсутствии растягивающих напряжений (и особенно при наличии сжимающих боковых напряжений, когда $\sigma_3 \geq 0$) оставалось необъяснимым с позиций существующих третьей и четвертой теорий прочности.

Возникла проблема описания разрушения с учётом двух принципиально различных механизмов разрушения — разрыва и сдвига.

В простых случаях нагружения, например одноосных, показатели прочности определялись сравнительно легко. Однако при сложном напряжённом состоянии ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \neq 0$) всё значительно усложняется.

4 Развитие единой теории прочности для биупругих материалов

Идея единой теории прочности была высказана в 1936 г. профессором Н. Н. Давиденковым и в дальнейшем развита профессором Я. Б. Фридманом [7, 8]. Она заключалась в объединении второй и третьей теории, чтобы описывать разрушение металлов при любом напряжённом состоянии как путём отрыва, так и сдвига.

Их исследованиями было показано, что существующие теории прочности нуждаются в дополнении, поскольку необходимо делать проверку на прочность материала при его разрушении по двум конкурирующим механизмам: либо от деформаций растяжения, ответственных за возникновение разрывов, либо от предельных деформаций сдвигов, вызывающих сдвиговые разрушения.

Чтобы произошло разрушение по любому из возможных механизмов (разрывом или сдвигом), необходимо выполнение первого или второго условия:

$$\begin{aligned} \nu(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3 &\geq [\sigma_p]; \\ (\sigma_1 - \sigma_3) &\geq [\sigma_c]. \end{aligned} \quad (10)$$

Я. Б. Фридман ввёл для твёрдого тела два прочностных параметра: сопротивление отрыву $[\sigma_p]$ и сопротивление срезу $[\tau]$, а напряжённое состояние предложил описывать отношением касательного и нормального напряжений. Теория указывала на разный характер разрушения и условие перехода от пластичного разрушения к хрупкому при изменении схемы нагружения. Однако теория оказалась не вполне практичной, поскольку она являлась аддитивным объединением двух предыдущих теорий прочности, когда для проверки условий прочности вместо одного следует использовать два неравенства.

Предложенный критерий в виде отношения касательного и нормального напряжений на площадке разрушения не получил должного теоретического и экспериментального подтверждения и носит не-

сколько искусственный характер. Тем более спорным является не вполне обоснованное предложение применять в качестве критерия вида разрушения отношение $\alpha = t_{\max}/S_{\max}^n$, которое непригодно для более широкого класса материалов.

Уравнения (10) ориентированы на описание поведения металлов и по умолчанию предполагают, что материал однородный и его упругие показатели не зависят от знака приложенных напряжений. Однако для каменных и иных природных материалов зависимости будут существенно иными, поэтому теория нуждается в дальнейшем обобщении.

С этой целью используем вторую теорию прочности для расчёта условий появления расколов (пинч-эффекта) при произвольном объёмном НДС материала. В отличие от традиционного подхода, учтём, что хрупкие, каменные материалы (горные породы, керамика и пр.), как правило, имеют разные упругие константы при действии напряжений разных знаков. Следовательно, модули линейной упругости E_p, E_c и коэффициенты Пуассона ν_p, ν_c могут существенно различаться для растяжения и сжатия (индексы p или c соответственно). Проблема усложняется, поскольку необходимо учитывать разные упругие постоянные в зависимости от знака действующих в каждой точке материала напряжений.

Материалы с разными упругими показателями для различных знаков напряжений мы предлагаем назвать **биупругими**. Такие материалы довольно часто необходимо выделять в практических приложениях, когда приходится учитывать поля напряжений различных знаков.

Рассмотрим простейшую модель биупругого материала, представленную на рисунке 3. Характерной особенностью таких материалов является довольно резкое (дискретное) изменение численных значений упругих постоянных E_p, E_c и ν_p, ν_c нередко в несколько раз.

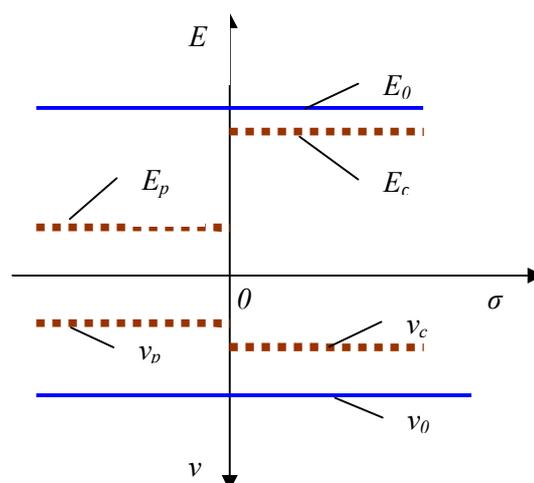


Рисунок 3 Математическая модель изменения упругих постоянных E_p, E_c и ν_p, ν_c у материалов, обладающих биупругостью

Пусть в упругом теле действует произвольное НДС с главными напряжениями $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Известный обобщённый закон Гука [9] запишем в новой трактовке для биупругих материалов:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{E_\sigma} \left[\sigma_i - \nu_\sigma (\sigma_j + \sigma_k) \right], \quad (11)$$

где $(i, j, k = 1, 2, 3)$ — круговая перестановка индексов, а упругие постоянные подставляем по формулам

$$E_\sigma = \begin{vmatrix} E_p \\ E_c \end{vmatrix}; \quad \nu_\sigma = \begin{vmatrix} \nu_p \\ \nu_c \end{vmatrix}, \quad (12)$$

где E_σ, ν_σ — индексированные постоянные, соответствующие напряжениям сжатия или растяжения в данной точке.

Определим возможность появления растягивающих деформаций при произвольном НДС с использованием главных напряжений. Из (11) согласно неравенствам $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ сразу следует, что это возможно лишь для $0 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$, откуда следуют два неравенства:

$$\begin{aligned} \nu_c (\sigma_2 + \sigma_1) &\geq \sigma_3; \\ \nu_c (\sigma_3 + \sigma_1) &\geq \sigma_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Более вероятными являются растягивающие деформации из первого неравенства (13), которое следует рассматривать в первую очередь для суждения о появлении возможных разрывов в плоскости, нормальной к этим деформациям. Учтём к тому же возможность такого НДС, когда для большинства практически значимых состояний соблюдаются условия $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0$, что позволяет записать

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E_p} - \frac{\nu_c}{E_c}(\sigma_2 + \sigma_1). \quad (14)$$

В случае, когда $\sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, а материал является биупругим (обладает различием упругих постоянных при растяжении и сжатии), получим более сложную формулу для деформаций растяжения по направлению σ_3 :

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E_p} - \frac{\nu_c}{E_c}\sigma_1 - \frac{\nu_p}{E_p}\sigma_2. \quad (15)$$

Для нахождения критического главного напряжения, при котором возникает пинч-эффект, воспользуемся принципом эквивалентности. Согласно ему, следует найти такое эквивалентное растягивающее напряжение σ_p , которое создаёт такую же деформацию растяжения по заданному направлению, как и фактически действующая НДС.

Определим предельную растягивающую деформацию, которая вызывает предельную раздвижку молекулярной решётки материала, приводящую к её разрыву. Для этого воспользуемся экспериментальными данными испытаний материала на прямое одноосное растяжение:

$$[\varepsilon_p] = [\sigma_p] / E_p, \quad (16)$$

где $[\sigma_p]$ — показатель прочности породы на одноосное растяжение, Па;

$[\varepsilon_p]$ — предельная деформация растяжения, приводящая к разрыву материала по направлению ε_3 .

Из (15) и (16) получаем искомое соотношение для определения предельного значения наибольшего напряжения сжатия σ_1 , приводящего к деформации разрыва по направлению ε_3 при условии $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0$:

$$\varepsilon_3 \leq -[\varepsilon_p], \quad (17)$$

$$[\sigma_3 - \nu_c(\sigma_2 + \sigma_1)] / E_c \leq -[\sigma_p] / E_p.$$

После преобразований получим окончательную формулу для определения максимального напряжения сжатия σ_1 , вызывающего разрывы материала вдоль линии своего действия по направлению минимального главного напряжения σ_3 :

$$\sigma_1 \geq \left\{ \sigma_3 + \frac{E_c}{E_p} [\sigma_p] \right\} \frac{1}{\nu_c} - \sigma_2. \quad (18)$$

Если среднее главное напряжение является растягивающим ($\sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$), необходимо использовать формулу (14), что несколько изменяет полученную формулу (18), которая принимает вид

$$\sigma_1 \geq \left[\frac{\sigma_3}{E_c} + \frac{[\sigma_p]}{E_p} - \nu_p \frac{\sigma_2}{E_p} \right] \frac{E_c}{\nu_c}. \quad (19)$$

Таким образом, формулы (18) и (19) позволяют найти условия проявления пинч-эффекта при любом НДС в точке нагруженного биупругого материала. Из них следует, что чем большими будут напряжения сжатия $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0$, тем больше вероятность появления феномена пинч-эффекта в виде трещин раскола, нормальных к направлению минимального главного напряжения. Заметим, что разрывы могут возникать даже тогда, когда все напряжения будут сжимающими.

5 Единая теория прочности на паспорте О. Мора

Предложенные Н. Н. Давиденковым, а затем Я. Б. Фридманом варианты единой теории прочности позволяют судить о жё-

сткости нагружения и связанной с этим вероятности разрушения отрывом и сдвигом для металлов. Однако они неприменимы для многих материалов, в первую очередь для горных пород и природных материалов. Их разрушение нельзя характеризовать неизменными границами в виде пределов напряжений сдвигов t_{\max} и деформаций удлинения S_{\max}^n .

Поэтому целесообразно построить единую теорию в виде паспорта прочности, охватывающего всё разнообразие возможных изменений НДС, который позволит предсказать не только характер разрушения — хрупкий или вязкий, — но и определить то предельное сочетание НДС, при котором происходит переход из одного состояния разрушения в другое. В том числе и для более сложной модели материалов, которым свойственна биупругость.

Чтобы учесть влияние промежуточного напряжения $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ на прочность при всём многообразии НДС материала, воспользуемся известным параметром Надаи – Лодэ [9]:

$$\mu = 2 \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1. \quad (20)$$

Параметр отражает НДС обобщённого сжатия при $\mu = 1$, сдвига при $\mu = 0$ и растяжения при $\mu = -1$, а также все промежуточные виды НДС, когда $1 \geq \mu \geq -1$.

Выразим из (20) значение промежуточного напряжения σ_2 через σ_1 и σ_3 :

$$\sigma_2 = 0,5(\mu + 1)(\sigma_1 - \sigma_3) + \sigma_3. \quad (21)$$

Подставляя (21) в выражение (19), получим условие появления разрывов в главных напряжениях при разных значениях параметра μ в области $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0 \geq \sigma_3$:

$$\sigma_1 = \frac{2 - \nu(1 - \mu)}{(3 + \mu)\nu} \sigma_3 + \frac{2e}{(3 + \mu)\nu} [\sigma_p], \quad (22)$$

где $e = E_c / E_p$ — соотношение модулей упругости при сжатии и растяжении для биупругого материала.

Уравнение паспорта прочности (22) на диаграмме О. Мора представляет собой прямолинейную огибающую наибольших предельных кругов напряжений. Угол наклона этой огибающей $\rho_1 \geq 0$ (угол внутреннего трения) к оси нормальных напряжений σ можно определить после некоторых преобразований по формуле

$$\rho_1 = \arcsin \frac{A_1 - 1}{A_1 + 1}, \quad (23)$$

где введено обозначение

$$A_1 = \frac{2 - \nu(1 - \mu)}{(3 + \mu)\nu}. \quad (24)$$

Проанализируем условия существования и единственности полученного решения. Из физического смысла угла внутреннего трения $\rho_1 \geq 0$ паспорта прочности, согласно (23), должно соблюдаться неравенство $A_1 \geq 1$. Данное условие, после подстановки и решения относительно коэффициента Пуассона, приводит к необходимости соблюдения тривиального для всех упругих материалов неравенства $\nu \leq 0,5$ при любом возможном значении параметра Надаи – Лодэ $-1 \leq \mu \leq 1$. Следовательно, условие существования и единственности решения для уравнения паспорта прочности (22) доказано.

На рисунке 4 приведён единый паспорт прочности, где прямая 1 соответствует уравнению (22), а кривая 2 построена согласно аналитической теории прочности по уравнению (9).

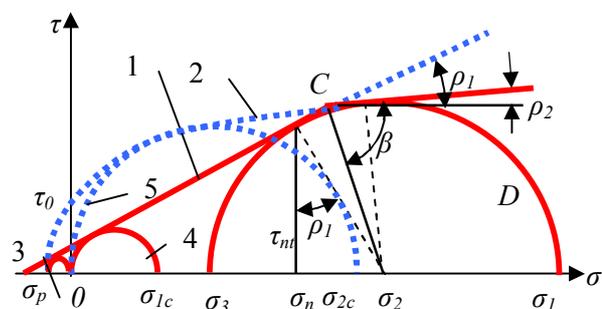


Рисунок 4 Построение единого паспорта прочности материала с учетом двух возможных механизмов разрушения

Пересечение паспортов прочности 1 и 2 выделяет две области под сплошными линиями на рисунке 4:

- область под линией 1 соответствует разрушению при сжатии за счёт образования трещин откола;
- область под кривой 2 определяет условия разрушения от предельных сдвигов по уравнению (9).

Те участки паспортов прочности 1 и 2, которые показаны пунктирными линиями, никогда не реализуются и с физической точки зрения являются фиктивными. Две линии 1 и 2 пересекаются, и их точка пересечения C показывает переход между двумя возможными механизмами разрушения трещинами отрыва или сдвига. Сопряжение этих двух линий происходит посредством предельного круга Мора D , для которого эти линии являются касательными. Точка пересечения C линий 1 и 2 оказывается, таким образом, вне предельного круга сопряжения D .

Обратим внимание на то, что показатели прочности на одноосное сжатие по механизму отрыва σ_{1c} (круг Мора 4) и механизму сдвига σ_{2c} (круг Мора 5) могут существенно различаться. На самом деле экспериментальные результаты при проведении испытаний на одноосное сжатие будут показывать промежуточные значения из-за трудности осуществления в чистом виде того или иного механизма разрушения.

Определим координаты σ_c и τ_c точки пересечения C двух паспортов прочности 1 и 2. Для этого необходимо либо выполнить графическое построение по уравнениям (9) и (22), подобное приведённому на рисунке 4, либо совместно решить эти уравнения прочности. Координаты σ_c и τ_c однозначно определяют положение круга сопряжения D на диаграмме О. Мора.

Для этого найдём углы наклона обеих ветвей паспорта прочности: угол ветви 1 мы определили ранее в виде (23), а угол ветви 2 найдём, продифференцировав уравнение прочности (9):

$$\rho_2 = \arctg \frac{\partial \sigma_n}{\partial \tau_n} = \frac{\sigma_p + \sigma_c}{\alpha \tau_c}, \quad (25)$$

где σ_c и τ_c — координаты точки C пересечения двух ветвей паспорта единой прочности;

σ_p — прочность на одноосное растяжение в аналитической теории прочности.

Теперь следует найти НДС материала, при котором происходит переход от одного типа разрушения к другому. Вначале определяем параметры круга сопряжения D , для чего из геометрических построений находим наклон биссектрисы острого угла пересечения в точке C обеих ветвей прочности:

$$\beta = 0,5(\pi - \rho_1 + \rho_2), \quad (25)$$

а её угол наклона ρ_c к оси τ будет равен

$$\rho_c = \beta + \rho_1 - 0,5\pi. \quad (26)$$

В результате получаем радиус R круга D :

$$R_c = \tau_c / \cos \rho_c. \quad (27)$$

Напряжённое состояние, которое даёт круг D , оказывается равным

$$\begin{vmatrix} \sigma_{1c} \\ \sigma_{3c} \end{vmatrix} = \sigma_c + \tau_c \operatorname{tg} \rho_c + \begin{vmatrix} R \\ -R \end{vmatrix}. \quad (28)$$

Следовательно, все параметры переходного напряжённого состояния определены и можно перейти к анализу закономерностей, вытекающих из единой теории прочности.

6 Закономерности единой теории прочности

Полученные замкнутые аналитические выражения позволяют оценить влияние основных параметров на закономерности разрушения различных материалов.

В первую очередь обратим внимание на то, что паспорт прочности при образовании трещин раскола существенно зависит от упругих постоянных материала и вида напряжённого состояния. Тот участок паспорта единой теории прочности, где реализуется разрушение сдвигом, наоборот, не зависит от этих параметров.

Таким образом, становится понятным, что многолетний спор о влиянии НДС на прочность породы получил неожиданное разрешение: приверженцы, казалось бы, противоположных точек зрения оказались и правы и неправы одновременно. На участке разрушения разрывом паспорт прочности зависит от параметра Надаи – Лодэ и поэтому будет представлен пучком параллельных прямых с переменными углами наклона. В области разрушения сдвигом все эти прямые переходят в единый паспорт прочности, представленный одной линией согласно зависимостям типа (9).

Введём обозначения для описания параметров, прямо или опосредовано влияющих на разрушение. В первую очередь следует опираться на определяемую путём лабораторных испытаний прочность на одноосное растяжение σ_{1p} , которая соответствует обычному растяжению, при этом параметр Надаи – Лодэ оказывается равным $\mu = 1$, а нагружение соответствует схеме Беккера.

Тогда прочность на всестороннее растяжение $\sigma_{3p} = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \leq 0$ (истинная когезия разрыва) оказывается зависимой от коэффициента Пуассона ν и равной

$$\sigma_{3p} = \sigma_{1p} / (1 - 2\nu). \quad (29)$$

Именно эта координата паспорта прочности — когезия отрыва — является исходной для всех линий (лучей) разрывной прочности.

Опуская громоздкие преобразования, приведём конечные формулы, позволяющие получить все необходимые параметры единого паспорта прочности.

Прочность на растяжение зависит от вида НДС μ и коэффициента Пуассона ν :

$$\sigma_p(\mu, \nu) = \frac{2 \sin[\rho(\mu, \nu)]}{1 + \sin[\rho(\mu, \nu)]} \sigma_{1p}, \quad (30)$$

где $\rho(\mu, \nu)$ — угол наклона линии прочности к оси нормальных напряжений диаграммы О. Мора:

$$\rho(\mu, \nu) = \arcsin \frac{A(\mu, \nu) - 1}{A(\mu, \nu) + 1}, \quad (31)$$

$$A(\mu, \nu) = \frac{2 - \nu(1 - \mu)}{(3 + \mu)\nu}. \quad (32)$$

Прочность на одноосное сжатие при разных значениях влияющих факторов (параметра Надаи – Лодэ μ и коэффициента Пуассона ν) следует определять по формуле

$$\sigma_c(\mu, \nu) = \frac{2 \sin[\rho(\mu, \nu)]}{1 - \sin[\rho(\mu, \nu)]} \sigma_{1p}. \quad (33)$$

Изучим влияние среднего напряжения на показатели прочности. Для определённости и наглядности проведём исследование изменения прочности у наиболее распространённой горной породы — алевролита — со следующими показателями [10]:

- прочность на одноосное сжатие $\sigma_c = 22,5$ МПа и на растяжение $\sigma_p = 5$ МПа;
- коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$;
- соотношение модулей упругости при сжатии и растяжении при наличии средней степени трещиноватости $e = 1$ (однородная порода без проявлений биупругости);
- когезия отрыва $\sigma_0 = \sigma_p = 5$ МПа и сдвига $\tau_0 = 7$ МПа;
- параметр хрупкости $\alpha = 0,3$.

Построим для алевролита его паспорт прочности согласно приведённым выше зависимостям (29)–(33), дискретно меняя параметр Надаи – Лодэ $\mu = (1, 0, -1)$. Тогда когезия отрыва (прочность на всестороннее растяжение) равна

$$\begin{aligned} \sigma_{3p} &= \sigma_{1p} / (1 - 2\nu) = \\ &= 5 / (1 - 2 \cdot 0,25) = 10. \end{aligned} \quad (34)$$

Углы наклона линий (лучей) прочности к оси согласно (31)

$$\begin{vmatrix} \rho(1, \nu) \\ \rho(0, \nu) \\ \rho(-1, \nu) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 19,4 \\ 23,6 \\ 30 \end{vmatrix}, \text{ град.} \quad (35)$$

Прочности на растяжение при $\sigma_1 = 0$ и сжатие при $\sigma_3 = 0$ для разных $\mu = (1, 0, -1)$ соответственно равны в МПа

$$\begin{vmatrix} \sigma_p(1, \nu) \\ \sigma_p(0, \nu) \\ \sigma_p(-1, \nu) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \\ 5,7 \\ 6,7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \sigma_c(1, \nu) \\ \sigma_c(0, \nu) \\ \sigma_c(-1, \nu) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ 13,3 \\ 20 \end{vmatrix}. \quad (36)$$

Полученные значения единого паспорта прочности отражены на графиках рисунка 5, где выполнено наложение трёх линий (лучей) прочности, соответствующих НДС $\mu = (1, 0, -1)$ и выходящих из единого центра, соответствующего прочности на всестороннее растяжение $\sigma_{3p} = 10$ МПа.

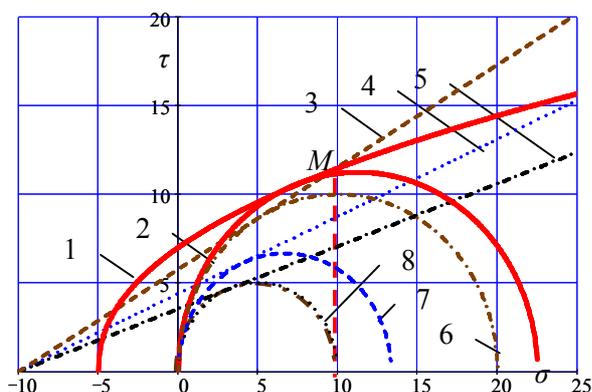


Рисунок 5 Зависимость единого паспорта прочности алевролита при разных значениях параметра Надаи – Лодэ $\mu = (1, 0, -1)$

Сопоставим паспорт прочности 1 и соответствующую ему прочность на одноосное сжатие 2 (круг О. Мора), равную $\sigma_c = 22,5$ МПа, с предельной линией 3, для которой круг 6 прочности на одноосное сжатие, равной $\sigma_c(-1, \nu) = 20$ МПа. В обоих случаях нагружение соответствует схеме Кармана, когда $\mu = -1$. Как видим, разрушение происходит трещинами отрыва при меньшем значении прочности на сжатие.

Поскольку предельная линия 3 вплоть до точки M своего пересечения с паспортом 1 имеет меньшую ординату τ_n , можно утверждать, что в этой области разрушение при

сжатии всегда будет происходить механизмом отрыва. Область отрыва при сжатии значительно расширяется с увеличением параметра Надаи – Лодэ, что видно по линиям 4 и 5, которым соответствуют $\mu = (0, 1)$ и предельные круги напряжений 7 и 8 на одноосное сжатие $\sigma_3 = 0$. Особенно это касается условия нагружения материалов по схеме Беккера, когда НДС соответствует $\mu = 1$.

Для пород с большей прочностью, у которых параметр хрупкости $\alpha > 0,5$ и паспорт прочности ближе к линейному, разрушение в стабилометрах будет происходить в основном отрывом при нагружении не только по схеме Беккера $\mu = 1$, но и по схеме Кармана $\mu = -1$. Именно этот феномен наблюдал Бриджмен, впервые назвав его пинч-эффектом [5].

Отметим ряд качественных отличий, которые ранее считались антагонистическими противоречиями, а теперь объединены в единой теории прочности:

- Паспорт единой теории прочности материала состоит из двух сопряжённых ветвей: линейного паспорта прочности от разрывов и нелинейного паспорта аналитической теории прочности для механизма сдвигового разрушения.

- Возникновение и интенсивность разрушения трещинами разрыва при сжатии зависят от упругих постоянных материала E и ν , тогда как разрушение сдвигами от них не зависит. При этом для материалов с различными показателями упругости при сжатии и растяжении пришлось ввести понятие биупругости.

- Разрывы (дисторсии) в материале всегда перпендикулярны минимальному напряжению σ_3 , а поверхность трещин сдвига коллинеарна среднему напряжению σ_2 , и, как показано в [4], сдвиги часто опережаются по концам вторичными трещинами разрыва, формируя Z-образные структурные дефекты сплошности.

- После появления трещин разрыва при пинч-эффекте в условиях $\sigma_3 \geq 0$ дальней-

шее их развитие происходит путём потери местной устойчивости тонких структурных элементов (пластин, столбиков и пр.) вследствие возникновения и роста вторичных трещин сдвига.

- Разрывные трещины при пинч-эффекте даже после своего возникновения не изменяют НДС материала, поскольку $\sigma_3 \geq 0$, тогда как сдвиговые трещины являются источником значительных концентраций НДС на своих концах и во всей нарушенной области.

- При своём возникновении и росте разрывы при пинч-эффекте и сдвиговые дилатации не являются конкурирующими и дополняют друг друга, возникая и развиваясь в разной последовательности: при пинч-эффекте первичны разрывы, а сдвиги вторичны, при первичном разрушении сдвигом от сжатия — наоборот.

- Если напряжение в результате динамического возрастания (взрыв) преодолевает оба порога прочности по разрыву и сдвигу, то ход разрушения неоднозначный и зависит от реономных параметров материала.

Важно отметить, что образование трещин разрыва в породах происходит не всегда, поскольку строго ограничено возможностью появления пинч-эффекта, т. е. только в тех породах, у которых соотношение показателей прочности на одноосное сжатие и растяжение удовлетворяет базовому неравенству $[\sigma_c] \geq (3...10)[\sigma_p]$, где числовые коэффициенты зависят от упругих постоянных и НДС породного массива.

Отсюда следует, что пинч-эффект не будет наблюдаться в пластичных однородных материалах (глина, мергель, сталь и др.), если их не подвергнуть искусственному «охрупчиванию», например, для пластичных пород — глубокому охлаждению жидким азотом при специальных способах сооружения горных выработок.

После анализа особенностей зарождения и протекания многих физико-механических процессов, связанных с разрушением отрывом пород при их сжатии [11], можно заключить, что пинч-эффект имеет значи-

тельное, а иногда и определяющее влияние на ведение горных работ.

Поэтому после развития единой теории прочности следует ожидать пересмотра и обновления многих устоявшихся понятий и расчётных схем механики деформируемого твёрдого тела и геомеханики, связанных с разрушением материалов при проявлении пинч-эффекта в более широком диапазоне явлений и процессов.

Кратко перечислим основные явления и процессы в геомеханике и горном деле, где следует учитывать существенное влияние пинч-эффекта:

- механическое разрушение пород рабочими органами горных машин, вооружённых горным инструментом режущескалывающего, дробящего, раскалывающего или раздавливающего действия;

- динамическое спонтанное трещинообразование и выбросы пород и газа на открытых поверхностях массива горных пород при ведении проходческих и выемочных работ;

- образование трещин отрыва вдоль породных обнажений в боках и кровле подземных и открытых горных выработок, существенно осложняющее проявления горного давления;

- условия возникновения и распространения трещин разного типа в динамических полях напряжений, особенно при ведении взрывных работ различного назначения;

- процессы раскола кернов на диски («дискование») при керновом бурении в массиве горных пород как индикатор и предвестник горных ударов и выбросов;

- рост продольных трещин отрыва параллельно породным обнажениям бортов карьеров, что заметно снижает их устойчивость и влияет на показатели открытых разработок;

- явление отжима, раздавливания и осыпания краевой части угольного пласта или породных обнажений в забоях очистных и подготовительных выработок;

- динамические отколы породы от груди проходческих забоев при буровзрывном и комбайновом способе проведения горных выработок;

- разрушение трещинами раскола центрально и внецентренно сжатых бетонных, железобетонных и каменных конструкций;

- процессы трещинообразования при определении показателя прочности горных пород путём раздавливания керна «бразильским» методом;

- разнообразные способы по откалыванию и поверхностной обработке камня в промышленных и иных целях (каменоломни, работа инструмента скульптора и каменотёса, а в доисторическую эпоху — изготовление каменных ножей и стрел из кремния и обсидиана) и др.

Каждый из перечисленных физических горных процессов нуждается в самостоятельном исследовании с учётом влияния пинч-эффекта, что может существенно расширить границы нашего их понимания, объяснения, прогнозирования и возможного использования для повышения эффективности добычи сырьевых ресурсов и подземного строительства.

Выводы

На основании проведённых исследований получены следующие результаты, имеющие научную новизну и практическую ценность:

1. Проведён краткий критический анализ существующих теорий прочности и показаны их основные недостатки.

Библиографический список

1. Писаренко, Г. С. *Справочник по сопротивлению материалов [Текст]* / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. — К. : Дельта, 2008. — 813 с.
2. Лебедев, А. А. *Развитие теорий прочности в механике материалов [Текст]* / А. А. Лебедев. // *Проблемы прочности*. — 2010. — № 5 (10). — С. 127–146.
3. Работнов, Ю. Н. *Сопротивление материалов [Текст]* / Ю. Н. Работнов. — М. : Физматгиз, 1962. — 456 с.
4. Литвинский, Г. Г. *Аналитическая теория прочности горных пород и массивов [Текст]* / Г. Г. Литвинский. — Донецк : Норд-Пресс, 2008. — 207 с.
5. Бриджмен, П. У. *Физика высоких давлений [Текст]* / П. У. Бриджмен. — М. – Л. : ОНТИ, 1935. — 402 с.
6. *Испытание сильвинита [Электронный ресурс]*. — Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch?v=TrTZXpYipyU>.
7. Давиденков, Н. Н. *Некоторые проблемы механики материалов [Текст]* : монография / Н. Н. Давиденков. — Л. : Лениздат, 1943. — 152 с.

2. В качестве исходной была принята идея проф. Н. Н. Давиденкова и Я. Б. Фрийдмана о необходимости создания единой теории прочности; эта теория была развита для материалов с произвольными свойствами.

3. Единая теория прочности получена путём сопряжения двух механизмов разрушения: линейного паспорта прочности от разрывов и нелинейного паспорта аналитической теории прочности для механизма сдвигового разрушения.

4. Предложено описание прочности нового класса материалов, обладающих биупругостью.

5. Впервые разработан паспорт материалов с позиций единой теории прочности и с учётом феномена пинч-эффекта, открытого Бриджменом.

6. Изучены закономерности проявлений пинч-эффекта и впервые определены условия образования трещин раскола.

7. Указан обширный перечень явлений и процессов в геомеханике и горном деле, где следует учитывать существенное влияние пинч-эффекта.

В целом результаты исследования могут быть использованы для изучения практически важных вопросов технологии добычи и переработки сырьевых ресурсов в нефтяной и горной промышленности, а также будут полезны при подготовке инженеров и аспирантов горных специальностей.

8. Фридман, Я. Б. Механические свойства металлов. Часть I. Деформация и разрушение [Текст] / Я. Б. Фридман. — М. : Машиностроение, 1972. — 472 с.

9. Лурье, А. И. Теория упругости [Текст] / А. И. Лурье. — М. : Наука, 1970. — 940 с.

10. Распределение и корреляция показателей физических свойств горных пород [Текст] : справочное пособие / М. М. Протодяконов, Р. И. Тедер, Е. И. Ильницкая и др. — М. : Недра, 1981. — 192 с.

11. Литвинский, Г. Г. Основы горной геомеханики. Т. 1. Механические свойства горных пород и массивов [Текст] / Г. Г. Литвинский. — Алчевск : ДонГТУ, 2012. — 312 с.

© Литвинский Г. Г.

**Рекомендована к печати д.т.н., проф., зав. каф. СПСиШ ДонНТУ Борщевским С. В.,
к.т.н., доц. каф. РМПИ ДонГТУ Мележиком А. И.**

Статья поступила в редакцию 13.03.19.

проф. Литвинський Г. Г. (ДонДТУ, м. Алчевськ, ЛНР)

РОЗВИТОК ЄДИНОЇ ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ І ЗАКОНОМІРНОСТІ РУЙНУВАННЯ

Дано стислий аналіз існуючих теорій міцності. На основі ідеї проф. Н. Н. Давиденкова і проф. Я. Б. Фрідмана шляхом сполучення лінійного паспорту міцності для розривів (пінч-ефект) і нелінійного паспорту аналітичної теорії міцності при руйнуванні зрушенням розвинуто єдину теорію міцності. Вивчено особливості руйнування матеріалів при зміні виду напружено-деформованого стану (НДС). Вперше запропоновано опис міцності нового класу матеріалів, що мають біпружність. Дано перелік явищ і процесів в геомеханіці і гірській справі, де проявляється пінч-ефект. Результати дослідження розвивають теоретичні основи міцності і руйнування деформованого твердого тіла.

Ключові слова: теорія міцності, пінч-ефект, руйнування відривом, руйнування зсувом, паспорт міцності, геомеханіка, гірська порода, пружні постійні, біпружність, параметр Надаї – Люде, схема Кармана, схема Беккера.

Prof. Litvinsky G. G. (DonSTU, Alchevsk, LPR)

DEVELOPMENT OF A UNIFIED THEORY OF STRENGTH AND PATTERNS OF DESTRUCTION

A brief analysis of the existing theories of strength is given. Based on the ideas of Professor V. V. Davidenkova and Professor J. B. Friedman developed the unified strength theory by pairing the linear strength passport for breaks (pinch-effect) and nonlinear passports of the analytical theory of strength at failure by shear. The features of material destruction while changing the type of stress-strain state (SSS) are studied. For the first time, a description of the strength of a new class of materials with bielasticity is proposed. An extensive list of phenomena and processes in geomechanics and mining, where the pinch effect is manifested, is given. The research results develop the theoretical foundations of the strength and fracture of a deformable solid.

Key words: theory of strength, pinch-effect, destruction by the stretch, destruction by the shear, passport strength, geomechanics, rocks, elastic constants, bielasticity, Nadai – Lode factor, Karman scheme, Becker scheme.