

УДК 62-83:621.77, 62-83:681.5

к.т.н. Полилов Е.В.
(ДонГТУ, г. Алчевск, ЛНР)

ОЦЕНКА ГРАНИЦ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ФАЗОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Впервые представлена аналитическая зависимость максимума переходной характеристики в управлении линейными динамическими системами произвольного порядка. Рассмотрены случаи $m=n$, $m<n$ однотемповых и сингулярно-возмущённых систем. Получены условия возникновения т.н. феномена всплеска и неконтролируемого роста фазовых переменных.

Ключевые слова: характеристический полином, нестационарное алгебраическое уравнение, корни алгебраического уравнения, феномен всплеска.

Проблема и ее связь с научными и практическими задачами. Зависимость эффекта всплеска от спектра матрицы A (и других ее характеристик) интересовала специалистов по теории управления с самого начала становления этой научной дисциплины. Пионерской работой в этом направлении явилась статья А. А. Фельдбаума [1] 1948 года. А. А. Фельдбаум получил ряд результатов о связи расположения корней с характеристиками переходного режима. Решения ограничены *частным случаем*, когда все корни вещественны, кроме, быть может, одной комплексной пары. Вопрос о существовании больших уклонений был поставлен в конце 1970-х годов В. Н. Полоцким в ряде работ; см., например, [2, 3]. Достаточно полный ответ на этот вопрос был получен Р. Н. Измайловым в [4] в 1987 году. Показано, что “сдвиг” всех полюсов влево (это способствует более быстрой асимптотической скорости затухания процесса) приводит к неизбежной плате за это – к большим уклонениям траектории на начальном участке. Эти важные результаты Измайлова были несколько обобщены в [5], а их более простое доказательство дано в [6]. Новым шагом было доказательство того, что и при малых собственных значениях возникают большие уклонения, см. [7-9]; более того, эти эффекты присущи и другим расположениям полюсов. Существенно, но и сами авторы работ позиционируют решения лишь в оценке *нижней границы* вспле-

ска, заведомо полагая, что всплеск всегда больший. В разы? На порядок? Много больший? Стратегическая ошибка сторонников представленного направления исследований и, посему, ставших де-факто эмпирическими их решениях – заключается в не учёте *взаимного местоположения* нулей и полюсов передаточной функции $A(p_{\Omega(0)})/B(p_{\Omega(x)})$ проектируемой замкнутой системы, желая пояснить процессы лишь терминами собственных значений матрицы динамики A .

Особый интерес в исследовании феномена всплеска представляет класс т.н. сингулярно возмущённых или *разнотемповых* систем. Процессы в этих системах кардинально отличаются от классических однотемповых систем. Теория сингулярно возмущённых систем дифференциальных уравнений интенсивно развивается, и ее методы активно применяются для решения широкого круга задач из различных областей естествознания и техники.

Постановка задачи. Терминами классической теории автоматического управления (корневые методы) обосновать феномен всплеска и неконтролируемый рост фазовых переменных x линейных динамических систем произвольного порядка, найти аналитическую зависимость верхней границы или максимума переходной характеристики $h(t)$ однотемповых и сингулярно возмущённых систем.

Изложение материала и его результаты. Определение. Масштаб k кластера решений $\tilde{C} = (0, \tilde{c}_j(t) = k \times c_j(t))$, $\forall j = \overline{1, n}$ полинома $(R_{i(x)} : \beta_n^* p_{\Omega(x)}^n, \beta_{n-1}^* p_{\Omega(x)}^{n-1} \dots \beta_0^*)$, клетки осей $\text{Re}, \text{Im} \tilde{C}$ и радиусов

$\tilde{R}_{i(x)} = k \cdot R_{i(x)}$ геометрических средних $gmean(k \cdot c_j(t) \rightarrow \tilde{c}_j(t))$ – есть формальная подстановка оператора Лапласа $p_{\tilde{\Omega}(x)} = p_{\Omega(x)} / \tilde{R}_{i(x)}$:

$$\begin{aligned} \tilde{B}(p_{\Omega(x)} \rightarrow p_{\tilde{\Omega}(x)}) &= (R_{i(x)} \rightarrow \tilde{R}_{i(x)} : \beta_n^* p_{\Omega(x)}^n, \beta_{n-1}^* p_{\Omega(x)}^{n-1} \dots \beta_0^*) = \\ &= \sum_{j=0}^n \tilde{\beta}_{n-j}(t) p_{\tilde{\Omega}(x)}^{n-j} = \frac{\beta_n^*}{\tilde{R}_{i(x)}^n} p_{\Omega(x)}^n + \frac{\beta_{n-1}^*}{\tilde{R}_{i(x)}^{n-1}} p_{\Omega(x)}^{n-1} + \dots + \frac{\beta_1^*}{\tilde{R}_{i(x)}} p_{\Omega(x)} + \beta_0^* = \\ &= \beta_n^* p_{\tilde{\Omega}(x)}^n + \beta_{n-1}^* p_{\tilde{\Omega}(x)}^{n-1} + \dots + \beta_{n-j}^* p_{\tilde{\Omega}(x)}^{n-j} + \dots + \beta_1^* p_{\tilde{\Omega}(x)} + \beta_0^*. \end{aligned} \quad (1)$$

Геометрически, на примере ФНЧ:

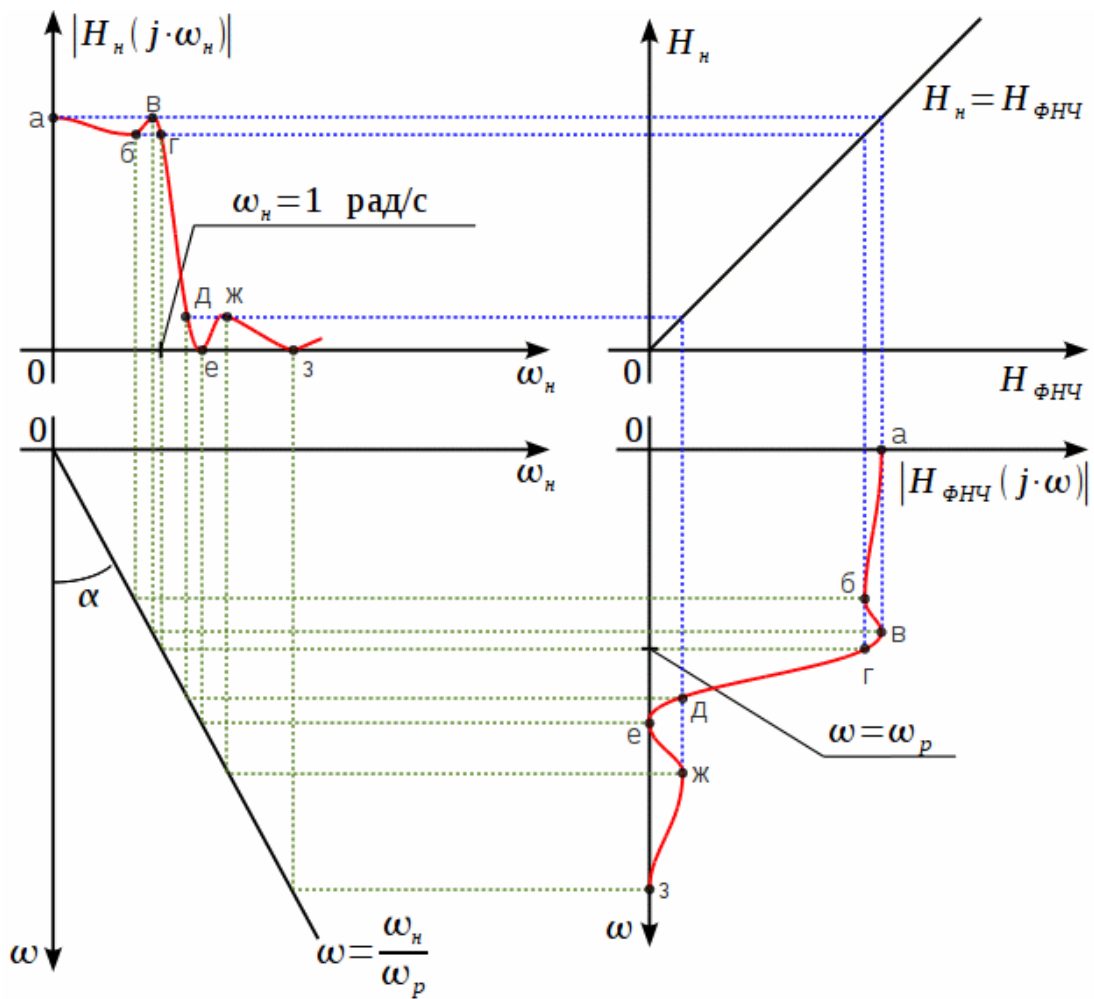


Рисунок 1 – Частотное преобразование ФНЧ

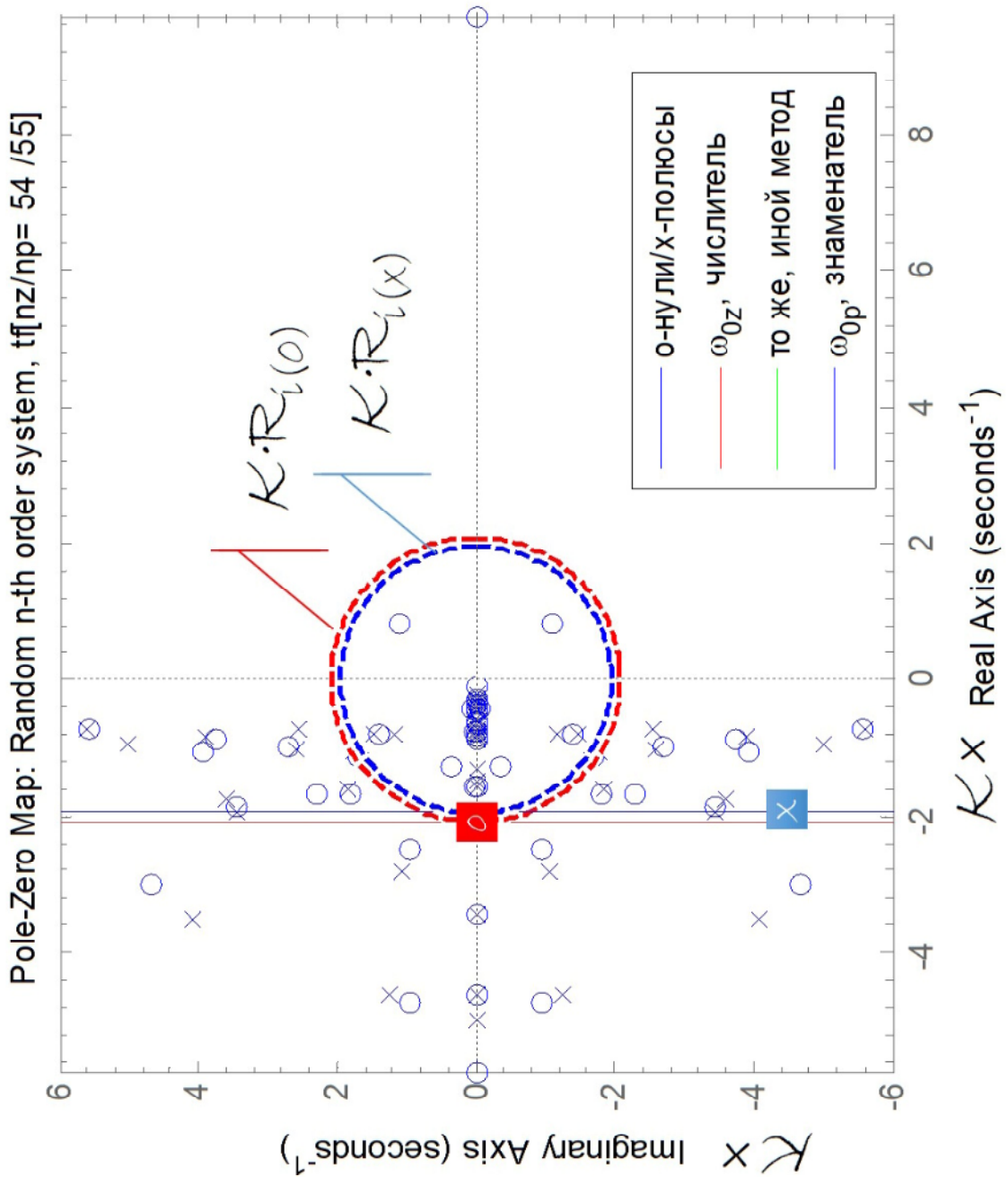


Рисунок 2 – Масштаб кластера решений $\tilde{C} = \left(0, \tilde{c}_j(t) = k \times c_j(t)\right), \forall j = \overline{1, n}$
 $\tilde{B} \left(p_{\Omega(x)} \rightarrow p_{\tilde{\Omega}(x)}\right) = \left(R_{i(x)} \rightarrow \tilde{R}_{i(x)} : \beta_n^* p_{\Omega(x)}^n, \beta_{n-1}^* p_{\Omega(x)}^{n-1} \dots \beta_0^*\right)$, радиусов $\tilde{R}_{i(x)}$
 геометрических средних $gmean_{j=1, n} \left(k \cdot c_j(t) \rightarrow \tilde{c}_j(t)\right)$ и клетки осей $\text{Re}, \text{Im} \tilde{C}$

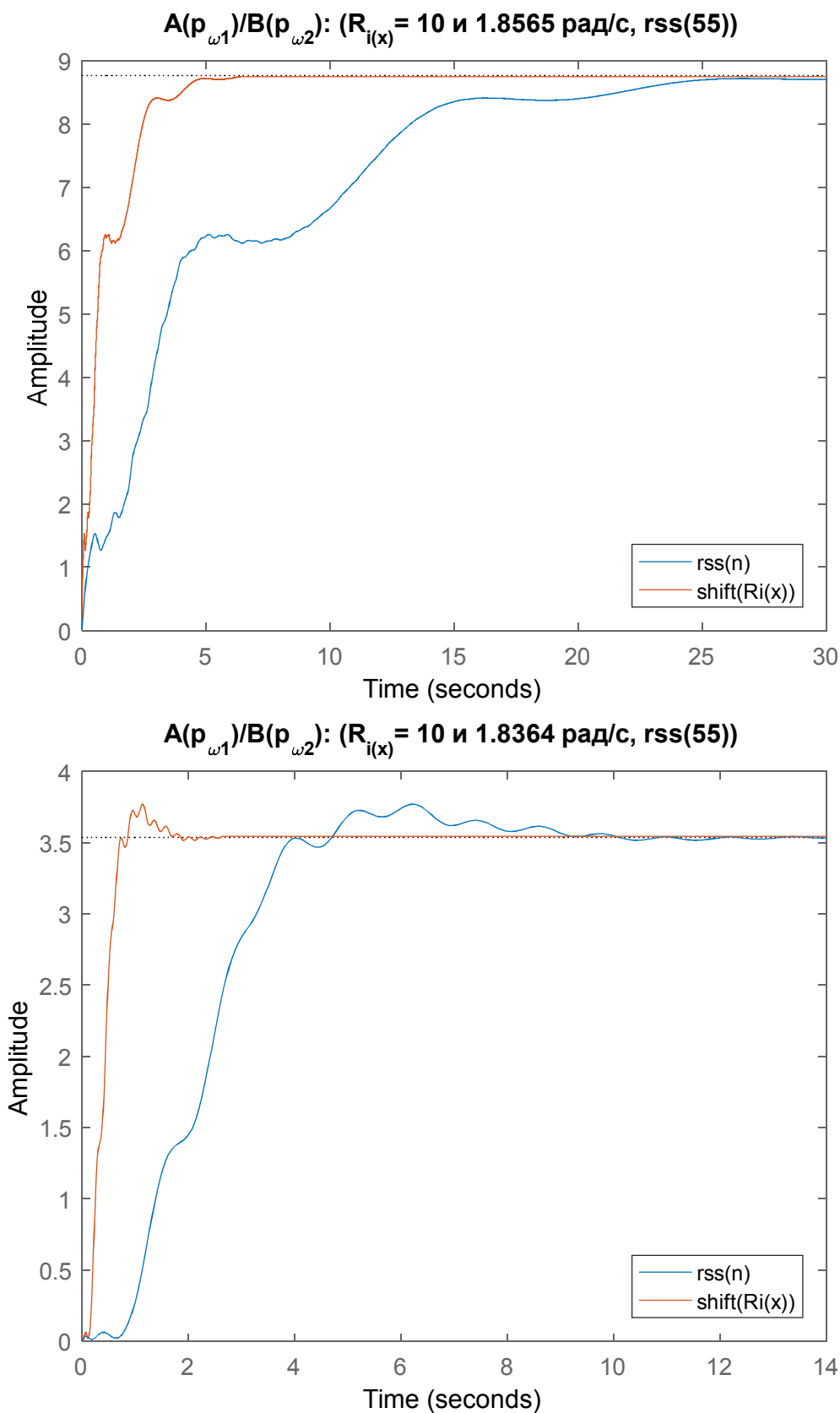


Рисунок 3 – Клоны $h(t)$ во времени, системы 55-го порядка

Теорема. Гурвицев полином $B(p_{\Omega(x)}) = (R_{i(x)} : \beta_n^* p^n, \beta_{n-1}^* p^{n-1} \dots \beta_0^*)$ представим произведением полиномов меньших степеней m и q заведомо *предопределённых* радиусов $R'_{i(x)}$ или $R_{i(\gamma)}$ геометрических средних, $\tilde{B}(p_{\Omega(x)}) = (R'_{i(x)} : \tilde{\beta}_m^* p^m, \tilde{\beta}_{m-1}^* p^{m-1} \dots \tilde{\beta}_0^*)$ и $Q(p_{\Omega(\gamma)}) = (R_{i(\gamma)} : \gamma_q^* p^q, \gamma_{q-1}^* p^{q-1} \dots \gamma_0^*)$ такие, что $m + q = n$. В силу свободно назначаемых m , $R'_{i(x)}$ и $\tilde{\beta}_j^* \forall j = \overline{0, m}$, например, одного из сомножителей, вариантов конфигурации $\tilde{B}(p_{\Omega(x)}) \times Q(p_{\Omega(\gamma)})$ бесконечно много. ПХ звеньев $1/B(p_{\Omega(x)})$ и $1/\tilde{B}(p_{\Omega(x)}) \times Q(p_{\Omega(\gamma)})$ совпадают до бесконечно малой $\varepsilon(t) \sim 0, \forall t = \overline{0, \infty}$. Каждый из двух сомножителей $\tilde{B}(p_{\Omega(x)}) \times Q(p_{\Omega(\gamma)})$ в свою очередь расщепим на иные сомножители и т.д.

Доказательство. Сущность озвученного наиболее ярко представима элементарным расщеплением целых чисел: $6 \Rightarrow 2 \times 3$, как произведения двух сомножителей. Или расщеплением полиномов малой степени $x^4 + 3x^3 - x^2 - 9x - 18$: $(x^2 + x - 6)(x^2 + 2x + 3) \Rightarrow (x - 2)(x^3 + 5x^2 + 9x + 9)$, например.

Известно, любой многочлен степени n вида $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ представляется произведением постоянно-го множителя при старшей степени a_n и n -шт. линейных множителей $(x - x_i), \forall i = \overline{1, n}$, то есть

$P_n(x) = a_n (x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1)$, причем $x_i, \forall i = \overline{1, n}$ являются корнями многочлена. Это утверждение справедливо для комплексных корней $x_i, \forall i = \overline{1, n}$ и комплексных коэффициентов $a_k, \forall k = \overline{0, n}$. Оно является основой для разложения любого многочлена $P(x_{\Omega(x)}) = (R_{i(x)} : \alpha_n^* x^n, \alpha_{n-1}^* x^{n-1} \dots \alpha_0^*)$ на множители, сленгом относительных $\alpha_j^* \forall j = \overline{0, n}$.

Если коэффициенты $a_k, \forall k = \overline{0, n}$ – действительные числа, то комплексные корни многочлена *обязательно* будут встречаться комплексно сопряженными парами. К примеру, если корни x_1 и x_2 многочлена $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ являются комплексно сопряженными, а остальные корни $x_j, \forall j = \overline{3, n}$ действительные, то многочлен $P_n(x)$ представится в виде $P_n(x) = a_n (x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_3)(x^2 + wx + q)$.

Объединяя образованные пары $(n - k) / 2$ -штук комплексно-сопряжённых корней $\langle x_i \text{ и } x_{i+1} \rangle$ в квадратичные формы $(x - x_i)(x - x_{i+1}) \Rightarrow x^2 + p_i x + q_i, \forall i = \overline{1, (n - k) / 2}$, тем самым исключая комплексные числа в представлении динамических систем типовыми аperiodическими звеньями 1-го порядка, и, чего не существует в терминах классической теории автоматического управления, запишем множители:

$$P_n(x) = \underbrace{\prod_{i=1}^{(n-k)/2} (x^2 + w_i x + q_i)}_{\text{пары комплексно-сопряжённых корней, } (n-k)/2\text{-шт.}} \times \underbrace{a_n (x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_k)}_{\text{вещественные корни, } k\text{-шт.}} \quad (2)$$

Интуитивно понятно, перестановкой элементарных множителей $(x - x_i)$ и/или $(x^2 + w_i x + q_i)$ всегда могут быть «геометрически пересобраны» два полинома $B(p_{\Omega(x)}) \Rightarrow \tilde{B}(p_{\Omega(x)}) \times Q(p_{\Omega(\gamma)})$ любых степеней m и q такие, что $m + q = n$, радиусы геометрических средних $R'_{i(x)}$ и/или $R_{i(\gamma)}$ которых близки заведомо *предопределённым* величинам.

Более строго, полином $\tilde{B}(p_{\Omega(x)}) = (R'_{i(x)} : \tilde{\beta}_m^* p^m, \tilde{\beta}_{m-1}^* p^{m-1} \dots \tilde{\beta}_0^*)$ может быть назначен *любым*. Тогда, в силу $B(p_{\Omega(x)}) \Rightarrow \tilde{B}(p_{\Omega(x)}) \times Q(p_{\Omega(\gamma)}) + R(p_{\Omega(\delta)})$ парный искомый полином $Q(p_{\Omega(\gamma)}) = (R_{i(\gamma)} : \gamma_q^* p^q, \gamma_{q-1}^* p^{q-1} \dots \gamma_0^*)$ определяется делением $B(p_{\Omega(x)}) = (R_{i(x)} : \beta_n^* p^n, \beta_{n-1}^* p^{n-1} \dots \beta_0^*)$ на $\tilde{B}(p_{\Omega(x)}) = (R'_{i(x)} : \tilde{\beta}_m^* p^m, \tilde{\beta}_{m-1}^* p^{m-1} \dots \tilde{\beta}_0^*)$ с точностью до остатка $R(p_{\Omega(\delta)}) / \tilde{B}(p_{\Omega(x)})$.

Доказательство закончено.

Теорема. Обратная ПФ $1/B(p_{\Omega(x)}) =$

$$= \frac{1}{\underbrace{\frac{\beta_n^*}{R_{i(x)}^n} p^n + \frac{\beta_{n-1}^*}{R_{i(x)}^{n-1}} p^{n-1} + \dots + \frac{\beta_1^*}{R_{i(x)}} p + \beta_0^*}_{\substack{\text{Гурвицев полином } n\text{-го порядка,} \\ R_{i(x)} \text{ -любой положительный}}}}$$

Гурвицевого полинома $B(p_{\Omega(x)}) = (R_{i(x)} : \beta_n^* p^n, \beta_{n-1}^* p^{n-1} \dots \beta_0^*)$ любого порядка n обладает *фильтрующими* свойствами независимо от геометрии и/или динамики его корней $c_j(t), j = \overline{1, n}$, (если $\beta_j^*(t) \forall j = \overline{1, n}$ – не-

стационарные), а, следовательно, и величины радиуса $R_{i(x)}(t) = \Omega_1(t)$ инварианта, как их геометрического среднего.

Доказательство. Выше показано, что обратная передаточная функция $1/B(p_{\Omega(x)})$ Гурвицевого полинома

$$B(p_{\Omega(x)}) = (R_{i(x)} : \beta_n^* p^n, \beta_{n-1}^* p^{n-1} \dots \beta_0^*)$$

любого порядка представима (2) *последовательным соединением* ($k \leq n$)-штук классических аperiodических звеньев 1-го порядка (0 –20 дБ/дек ЛАЧХ), их образуют вещественные корни $1/(p - c_i)$, и $(n - k)/2$ -штук колебательных звеньев 2-го порядка (0 –40 дБ/дек ЛАЧХ), образованных парами оставшихся комплексносопряжённых корней $1/(p^2 + w_i p + q_i)$. И, очевидно, вся эта конструкция – *последовательное соединение фильтров нижних частот*, каждого из множителей в разложении $1/B(p_{\Omega(x)})$, также обладает свойствами ФНЧ, 0 – $n \cdot 20$ дБ/дек ЛАЧХ.

Доказательство закончено.

Ослабление динамического звена $1/B(p_{\Omega(x)})$ для частот $\Omega_{ex} > R_{i(x)}$ на участке – $n \cdot 20$ дБ/дек:

$$20n \times \lg \Omega^*, [\text{дБ}] \text{ или } 10^{n \times \lg \Omega^*}, [\text{раз}] \quad (3)$$

здесь $\Omega^* = \Omega_{ex} / \Omega_\phi \geq 1$.

Низкочастотный фильтр 7-го порядка ослабит входной сигнал с кратностью частот $\Omega^* = 2$ в $10^{7 \times \lg 2} = 128$ раз. В справедливости (3) легко убедиться, *декада*: $\Omega^* = 1$, $10^{7 \times \lg 1} = 1$ раз и $\Omega^* = 10$, $20 \cdot 7 \times \lg 10 = 7 \cdot 20$ дБ, линия наклоном – $n \cdot 20$ дБ/дек, *идеальная аппроксимация* фильтра низких частот.

Множитель $M = 10^{-n \times \lg \Omega^*} \ll 1$ будем использовать при оценке максимума переходной характеристики $h(t)$.

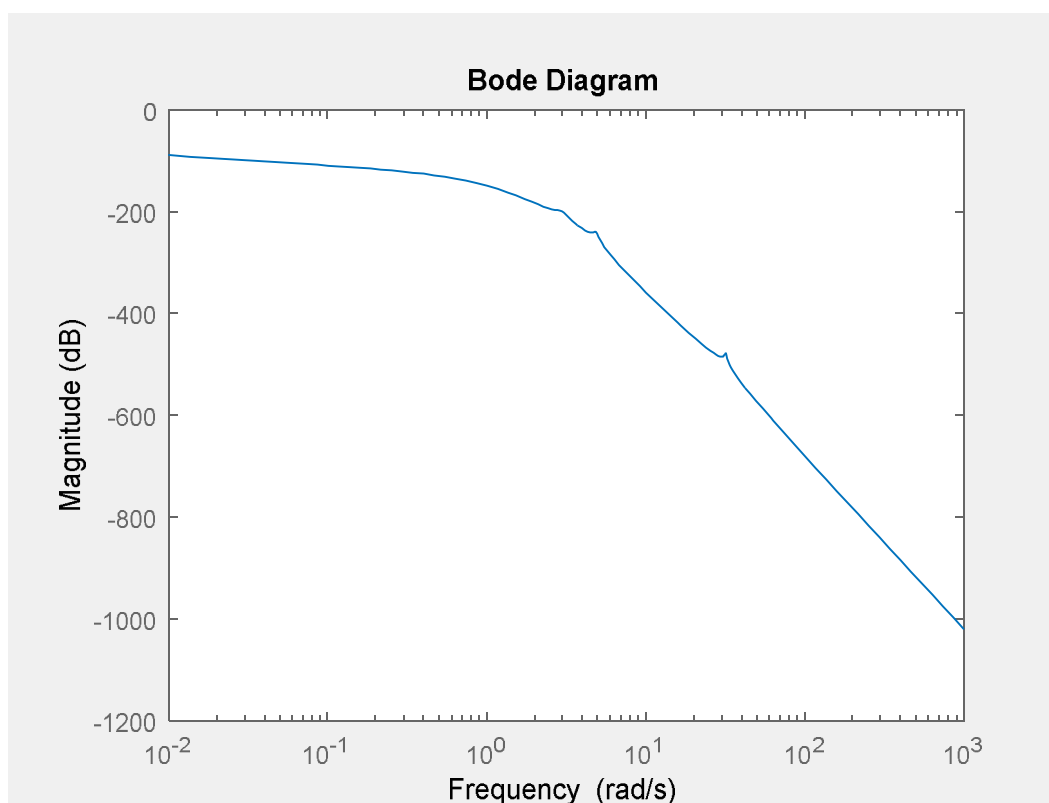


Рисунок 4 – АЧХ ПФ $1/B(p_{\Omega(x)})$, наклон $-n \cdot 20$ дБ/дек

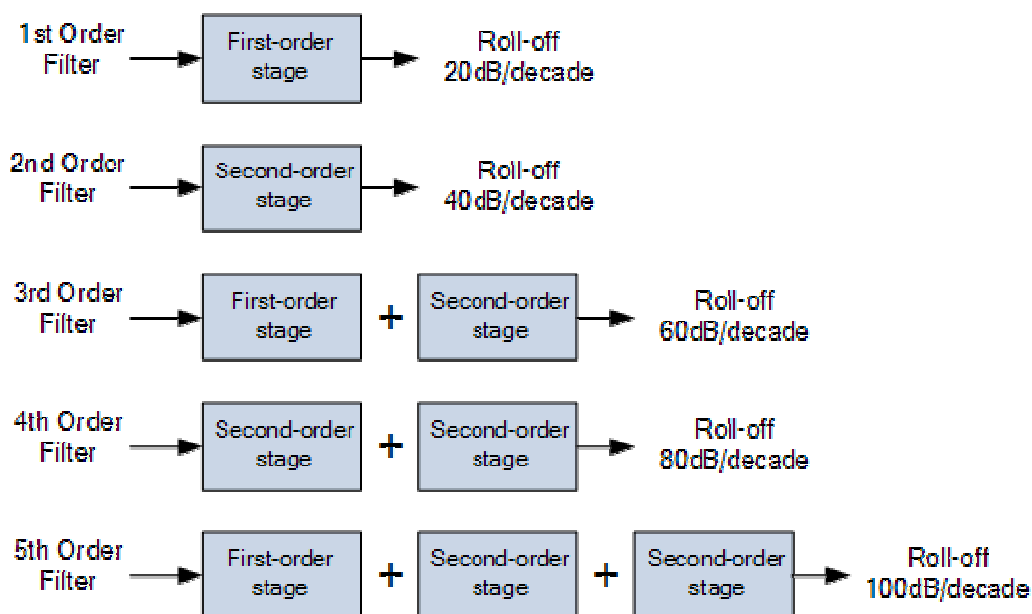


Рисунок 5 – Графическая интерпретация произведения

$$1/P_n(x) = 1/a_n(x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_k) \times \prod_{i=1}^{(n-k)/2} (x^2 + w_i x + q_i)$$

Теорема. Максимум переходной характеристики $h(t)$ устойчивой нестационарной системы, описываемой линейной ПФ сингулярно невозмущённой динамической системы, описываемой линейной ПФ

$$\begin{aligned}
 W(p_{\Omega_{(0,x)}}) &= \frac{A(p_{\Omega_{(0)}})}{B(p_{\Omega_{(x)}})} = k_0 \frac{\sum_{i=0}^m \alpha_{m-i}(t) p^{m-i}}{\sum_{j=0}^n \beta_{n-j}(t) p^{n-j}} = \\
 &= k_0 \frac{\alpha_m^* p_{\Omega_{(0)}}^m + \alpha_{m-1}^* p_{\Omega_{(0)}}^{m-1} + \dots + \alpha_{m-j}^* p_{\Omega_{(0)}}^{m-j} + \dots + \alpha_1^* p_{\Omega_{(0)}} + \alpha_0^*}{\beta_n^* p_{\Omega_{(x)}}^n + \beta_{n-1}^* p_{\Omega_{(x)}}^{n-1} + \dots + \beta_{n-j}^* p_{\Omega_{(x)}}^{n-j} + \dots + \beta_1^* p_{\Omega_{(x)}} + \beta_0^*} = \\
 &= k_0 \frac{\frac{\alpha_m^*}{R_{i(0)}^m} p^m + \frac{\alpha_{m-1}^*}{R_{i(0)}^{m-1}} p^{m-1} + \dots + \frac{\alpha_{m-j}^*}{R_{i(0)}^{m-j}} p^{m-j} + \dots + \frac{\alpha_1^*}{R_{i(0)}} p + \alpha_0^*}{\frac{\beta_n^*}{R_{i(x)}^n} p^n + \frac{\beta_{n-1}^*}{R_{i(x)}^{n-1}} p^{n-1} + \dots + \frac{\beta_{n-j}^*}{R_{i(x)}^{n-j}} p^{n-j} + \dots + \frac{\beta_1^*}{R_{i(x)}} p + \beta_0^*}
 \end{aligned} \tag{4}$$

(здесь $p_{\Omega_{(0)}} = p / \Omega_{(0)}$, $p_{\Omega_{(x)}} = p / \Omega_{(x)}$; $R_{i(0,x)} = \Omega_{(0,x)} = \text{gmean}(0, x)$ и $\alpha_{m-j}^* = \alpha_{m-j} \cdot \Omega_{(0)}^{m-j}$, $\beta_{n-j}^* = \beta_{n-j} \cdot \Omega_{(x)}^{n-j}$)
 для всех $m = n$ имеет место в квант времени $t = 0$ и однозначно определяется геометрическими средними $\text{gmean}(c_i(t))$, $\text{gmean}(c_j(t))$ корней $c_1(t), c_2(t), \dots, c_{m+n}(t)$ полиномов числителя $A(p)$ и знаменателя $B(p)$ (как энергетической меры сил $k = R_{i(x)} / R_{i(0)}$ сингулярностей полиномов $k < 1$, $k = 1$ и $k > 1$):

$$\begin{aligned}
 \max_{t=0, \infty} h(t) \Big|_{t=0+} &= k_0 \frac{\alpha_m^*}{\beta_n^*} \times \underbrace{\frac{R_{i(x)}^n}{R_{i(0)}^m}}_{k=R_{i(x)}/R_{i(0)}, \text{ кратность радиусов инвариантов Полилова-Мотченко}} = k_0 \frac{\alpha_m^*}{\beta_n^*} \times k^m; \\
 k^m &= \left(\frac{\left(\prod_{i=1}^n c_i(t) \right)^{1/n}}{\left(\prod_{j=1}^m c_j(t) \right)^{1/m}} \right)^m = \frac{\alpha_m(t)}{\alpha_0(t)} \left(\frac{\beta_0(t)}{\beta_n(t)} \right)^{m/n} \Big|_{t=0+}, \tag{5} \\
 &\text{то же, сленгом геометрических средних корней } c_{i,j}(t) \text{ полиномов числителя } A(p) \text{ и знаменателя } B(p) \text{ рассматриваемой ПФ} \\
 &\text{или категориями коэффициентов полиномов числителя } A(p) \text{ и знаменателя } B(p) \text{ рассматриваемой ПФ}
 \end{aligned}$$

где $R_{i(0)}(t) = \sqrt[m]{\alpha_0(t) / \alpha_m(t)}$ и n -шт. полюсов (x) линейной динамической системы с передаточной функцией $A(p_{\Omega_{(0)}}) / B(p_{\Omega_{(x)}})$ сленгом классической теории автоматического управления).

Доказательство. Началу движения $t = 0$ динамической системы (4) соответствует оператор Лапласа $p = \infty$.

Передаточная функция $W(p)$ в этот квант времени не определена:

$$W(p) = \frac{A(p_{\Omega(0)})}{B(p_{\Omega(x)})} \Bigg|_{t=0} = k_0 \frac{\sum_{i=0}^m \alpha_{m-i}(t) p^{m-i}}{\sum_{j=0}^n \beta_{n-j}(t) p^{n-j}} \Bigg|_{p=\infty} =$$

$$= \lim_{p \rightarrow \infty} k_0 \frac{\frac{\alpha_m^*}{R_{i(0)}^m} p^m + \frac{\alpha_{m-1}^*}{R_{i(0)}^{m-1}} p^{m-1} + \dots + \frac{\alpha_{m-j}^*}{R_{i(0)}^{m-j}} p^{m-j} + \dots + \frac{\alpha_1^*}{R_{i(0)}} p + \alpha_0^*}{\frac{\beta_n^*}{R_{i(x)}^n} p^n + \frac{\beta_{n-1}^*}{R_{i(x)}^{n-1}} p^{n-1} + \dots + \frac{\beta_{n-j}^*}{R_{i(x)}^{n-j}} p^{n-j} + \dots + \frac{\beta_1^*}{R_{i(x)}} p + \beta_0^*} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right). \quad (6)$$

Для раскрытия неопределенности преобразуем $A(p_{\Omega(0)})/B(p_{\Omega(x)})$, разделив числитель и знаменатель на старшие степени многочленов $A(p_{\Omega(0)})$ и $B(p_{\Omega(x)})$:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p^m}{p^n} k_0 \frac{\frac{\alpha_m^*}{R_{i(0)}^m} + \frac{\alpha_{m-1}^*}{R_{i(0)}^{m-1}} \frac{p^{m-1}}{p^m} + \dots + \frac{\alpha_{m-j}^*}{R_{i(0)}^{m-j}} \frac{p^{m-j}}{p^m} + \dots + \frac{\alpha_1^*}{R_{i(0)}} \frac{p}{p^m} + \alpha_0^* \frac{1}{p^m}}{\frac{\beta_n^*}{R_{i(x)}^n} + \frac{\beta_{n-1}^*}{R_{i(x)}^{n-1}} \frac{p^{n-1}}{p^n} + \dots + \frac{\beta_{n-j}^*}{R_{i(x)}^{n-j}} \frac{p^{n-j}}{p^n} + \dots + \frac{\beta_1^*}{R_{i(x)}} \frac{p}{p^n} + \beta_0^* \frac{1}{p^n}} =$$

$$= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{n-m}} k_0 \frac{\frac{\alpha_m^*}{R_{i(0)}^m} + \frac{\alpha_{m-1}^*}{R_{i(0)}^{m-1}} \frac{1}{p} + \dots + \frac{\alpha_{m-j}^*}{R_{i(0)}^{m-j}} \frac{1}{p^j} + \dots + \frac{\alpha_1^*}{R_{i(0)}} \frac{1}{p^{m-1}} + \alpha_0^* \frac{1}{p^m}}{\frac{\beta_n^*}{R_{i(x)}^n} + \frac{\beta_{n-1}^*}{R_{i(x)}^{n-1}} \frac{1}{p} + \dots + \frac{\beta_{n-j}^*}{R_{i(x)}^{n-j}} \frac{1}{p^j} + \dots + \frac{\beta_1^*}{R_{i(x)}} \frac{1}{p^{n-1}} + \beta_0^* \frac{1}{p^n}} = \quad (7)$$

$$= \begin{cases} k_0 \frac{\alpha_m^* R_{i(x)}^n}{\beta_n^* R_{i(0)}^m}, & \forall m = n; \\ 0, & \forall m < n \text{ и } \pm\infty, \forall m > n. \end{cases}$$

Доказательство окончено.

Динамика всегда неизменна и подобна представленной на рис. 6. В нулевой квант времени имеет место $\max_{t=0, \infty} h(t)$, процесс лавинообразно и колебательно уменьшается до установившегося значения. α_m^* и β_n^* , как, впрочем, и α_0^* и β_0^* всегда равны 1.

Особо обращаем внимание, на рис. 6 представлена не импульсная, а переходная характеристика $h(t)$ линейной динамической системы $A(p_{\Omega(0)})/B(p_{\Omega(x)}) \forall m = n$, как реакция на $1(t)$. Феномен всплеска $h(t)$ имеет место для всех $R_{i(0)} < R_{i(x)}$.

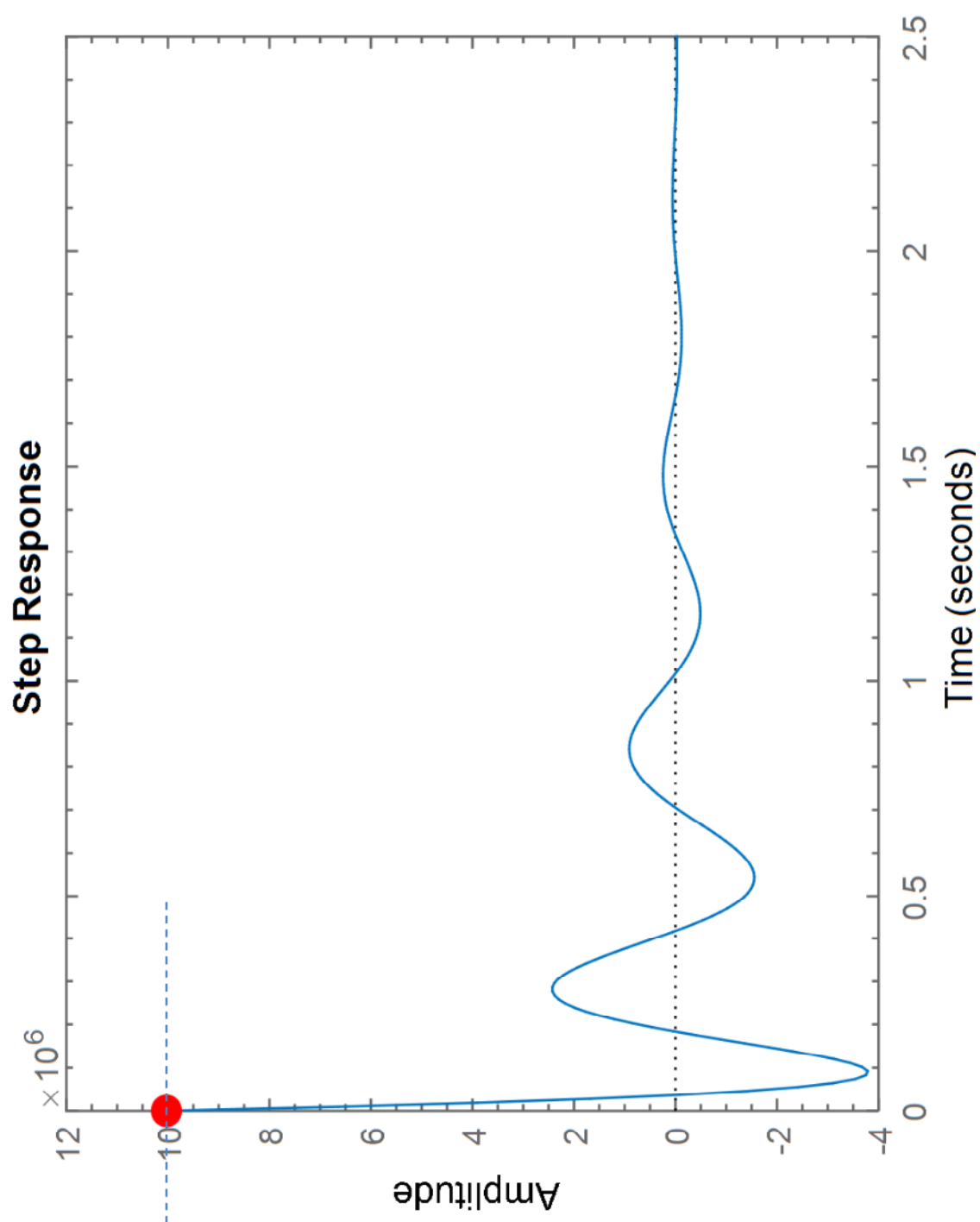


Рисунок 6 – ПХ $h(t)$ устойчивой нестационарной *сингулярно невозмущённой* динамической системы $A(p_{\Omega(0)})/B(p_{\Omega(x)})$, $\forall t = n$

Теорема. Максимум переходной характеристики $h(t)$ устойчивой нестационарной *сингулярно невозмущённой* динамической системы, описываемой линейной ПФ

$$\begin{aligned}
 W(p_{\Omega_{(0,\times)}}) &= \frac{A(p_{\Omega_{(0)}})}{B(p_{\Omega_{(\times)}})} = k_0 \frac{\sum_{i=0}^m \alpha_{m-i}(t) p^{m-i}}{\sum_{j=0}^n \beta_{n-j}(t) p^{n-j}} = \\
 &= k_0 \frac{\alpha_m^* p_{\Omega_{(0)}}^m + \alpha_{m-1}^* p_{\Omega_{(0)}}^{m-1} + \dots + \alpha_{m-j}^* p_{\Omega_{(0)}}^{m-j} + \dots + \alpha_1^* p_{\Omega_{(0)}} + \alpha_0^*}{\beta_n^* p_{\Omega_{(\times)}}^n + \beta_{n-1}^* p_{\Omega_{(\times)}}^{n-1} + \dots + \beta_{n-j}^* p_{\Omega_{(\times)}}^{n-j} + \dots + \beta_1^* p_{\Omega_{(\times)}} + \beta_0^*} = \\
 &= k_0 \frac{\frac{\alpha_m^*}{R_{i(0)}^m} p^m + \frac{\alpha_{m-1}^*}{R_{i(0)}^{m-1}} p^{m-1} + \dots + \frac{\alpha_{m-j}^*}{R_{i(0)}^{m-j}} p^{m-j} + \dots + \frac{\alpha_1^*}{R_{i(0)}} p + \alpha_0^*}{\frac{\beta_n^*}{R_{i(\times)}^n} p^n + \frac{\beta_{n-1}^*}{R_{i(\times)}^{n-1}} p^{n-1} + \dots + \frac{\beta_{n-j}^*}{R_{i(\times)}^{n-j}} p^{n-j} + \dots + \frac{\beta_1^*}{R_{i(\times)}} p + \beta_0^*}
 \end{aligned} \tag{8}$$

(здесь $p_{\Omega_{(0)}} = p / \Omega_{(0)}$, $p_{\Omega_{(\times)}} = p / \Omega_{(\times)}$; $R_{i(0,\times)} = \Omega_{(0,\times)} = \text{gmean}(0,\times)$ и $\alpha_{m-j}^* = \alpha_{m-j} \cdot \Omega_{(0)}^{m-j}$, $\beta_{n-j}^* = \beta_{n-j} \cdot \Omega_{(\times)}^{n-j}$) для всех $m < n$ имеет место в квант времени $t > 0$, и *однозначно* определяется геометрическими средними $\text{gmean}_{i=1,m}(c_i(t))$,

$\text{gmean}_{j=1,n}(c_j(t))$ корней $c_1(t), c_2(t), \dots, c_{m+n}(t)$ полиномов числителя $A(p)$ и знаменателя $B(p)$ (как энергетической меры сил $k = R_{i(\times)} / R_{i(0)}$ сингулярностей полиномов $k < 1$, $k = 1$ и $k > 1$):

$$\left. \max_{t=0,\infty} h(t) \right|_{t>0} = M \times k_0 \frac{\alpha_m^*}{\tilde{\beta}_m^*} \times \underbrace{\frac{R_{i(\times)}^m}{R_{i(0)}^m}}_{k=R_{i(\times)}/R_{i(0)}, \text{ кратность радиусов инвариантов Полилова-Мотченко}} = M \times k_0 \frac{\alpha_m^*}{\tilde{\beta}_m^*} \times k^m;$$

$$k^m = \underbrace{\left(\frac{\left(\prod_{i=1}^n c_i(t) \right)^{1/n}}{\left(\prod_{j=1}^m c_j(t) \right)^{1/m}} \right)^m}_{\text{то же, сленгом геометрических средних корней } c_{i,j}(t) \text{ полиномов числителя } A(p) \text{ и знаменателя } B(p) \text{ рассматриваемой ПФ}} = \underbrace{\frac{\alpha_m(t)}{\alpha_0(t)} \left(\frac{\beta_0(t)}{\beta_n(t)} \right)^{m/n}}_{\text{или категориями коэффициентов полиномов числителя } A(p) \text{ и знаменателя } B(p) \text{ рассматриваемой ПФ}} \Bigg|_{t=0+}, \tag{9}$$

где $R_{i(0)}(t) = \sqrt[n]{\alpha_0(t) / \alpha_m(t)}$ и $R_{i(\times)}(t) = \sqrt[n]{\beta_0(t) / \beta_n(t)}$ – радиусы инвариантов Полилова-Мотченко (геометрические средние m -шт. нулей (0) и n -шт. полюсов (\times) линейной динамической системы (8)). Множитель $M \ll 1 \quad \forall m < n$.

$M = 10^{-k \times \lg \Omega^*}$ определён в теореме о фильтрации, здесь $\Omega^* = \Omega_{ex} / \Omega_{\phi} \geq 1$ и $k \leq m - n$ порядок ФНЧ.

Доказательство. Пусть полином m -го порядка

$$\tilde{B}(p_{\Omega(x)}) = (R_{i(x)} : \tilde{\beta}_m^* p^m, \tilde{\beta}_{m-1}^* p^{m-1} \dots \tilde{\beta}_0^*)$$

любой Гурвицев, выписан по заведомо predetermined и/или желаемой геометрии решений $c_j(t), j = \overline{1, m}$, например, решения m шт. равномерно расположим на полуокружности по Баттерворту, или с любым иным стандартным распределением корней в левой полуплоскости, и, важно, масштабируемы геометрическим средним $R'_{i(x)} \equiv R_{i(x)}$, численно совпадающим с геометрическим средним $R_{i(x)}$ полинома

$$B(p_{\Omega(x)}) = (R_{i(x)} : \beta_n^* p^n, \beta_{n-1}^* p^{n-1} \dots \beta_0^*)$$

знаменателя ПФ.

$$G(p_{\Omega(\gamma)}) \cong \frac{B(p_{\Omega(x)})}{\tilde{B}(p_{\Omega(x)})} :$$

$$\frac{\beta_n^* p^n}{R_{i(x)}^n} + \frac{\beta_{n-1}^* p^{n-1}}{R_{i(x)}^{n-1}} + \dots + \frac{\beta_{n-j}^* p^{n-j}}{R_{i(x)}^{n-j}} + \dots + \frac{\beta_1^* p}{R_{i(x)}} + \beta_0^*$$

делимое

$$\frac{\tilde{\beta}_m^* p^m}{R_{i(x)}^m} + \frac{\tilde{\beta}_{m-1}^* p^{m-1}}{R_{i(x)}^{m-1}} + \dots + \frac{\tilde{\beta}_{m-j}^* p^{m-j}}{R_{i(x)}^{m-j}} + \dots + \frac{\tilde{\beta}_1^* p}{R_{i(x)}} + \tilde{\beta}_0^*$$

делитель

$$\frac{\gamma_k^* p^k}{R_{i(\gamma)}^k} + \frac{\gamma_{k-1}^* p^{k-1}}{R_{i(\gamma)}^{k-1}} + \dots + \frac{\gamma_{k-j}^* p^{k-j}}{R_{i(\gamma)}^{k-j}} + \dots + \frac{\gamma_1^* p}{R_{i(\gamma)}} + \gamma_0^* + \underbrace{\frac{R(p_{\Omega(\rho)})}{\tilde{B}(p_{\Omega(x)})}}_{\text{остаток}}$$

здесь $k \leq n - m$.

Ненулевой остаток $R(p_{\Omega(\rho)}) / \tilde{B}(p_{\Omega(x)})$ в случае «некратного деления», отбросим в силу слабого влияния, что графически подтвердим позже, сравнивая обе переходные характеристики $h(t)$.

Имеем, передаточная функция $W(p_{\Omega(0,x)})$ системы:

Полином знаменателя

$$B(p_{\Omega(x)}) = (R_{i(x)} : \beta_n^* p^n, \beta_{n-1}^* p^{n-1} \dots \beta_0^*)$$

представим в виде произведения двух различных полиномов

$$B(p_{\Omega(x)}) \Rightarrow \tilde{B}(p_{\Omega(x)}) \times G(p_{\Omega(\gamma)}), \quad \text{здесь}$$

второй

сомножитель

$$G(p_{\Omega(\gamma)}) = (R_{i(\gamma)} < R_{i(x)} : \gamma_k^* p^k, \gamma_{k-1}^* p^{k-1} \dots \gamma_0^*)$$

искмое. Очевидно, $G(p_{\Omega(\gamma)})$ определим

делением известных $B(p_{\Omega(x)}) / \tilde{B}(p_{\Omega(x)}) \Rightarrow$

$$G(p_{\Omega(\gamma)}) + R(p_{\Omega(\rho)}) / \tilde{B}(p_{\Omega(x)}) \text{ столбиком}$$

$$\frac{A(p_{\Omega(0)})}{B(p_{\Omega(x)})} \Rightarrow \frac{A(p_{\Omega(0)})}{\tilde{B}(p_{\Omega(x)}) \times G(p_{\Omega(\gamma)})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{A(p_{\Omega(0)})}{\tilde{B}(p_{\Omega(x)})} \right) \times \frac{1}{G(p_{\Omega(\gamma)})} .$$

фиктивный генерирующий избыточный фильтрующий

В развёрнутом виде, ПФ

$$\begin{aligned}
 W(p_{\Omega_{(0,\times)}}) &= \frac{(R_{i(0)} : \alpha_m^* p^m, \alpha_{m-1}^* p^{m-1} \dots \alpha_0^*)}{(R_{i(\times)} : \beta_n^* p^n, \beta_{n-1}^* p^{n-1} \dots \beta_0^*)} = \frac{A(p_{\Omega_{(0)}})}{\tilde{B}(p_{\Omega_{(\times)}}) G(p_{\Omega_{(\gamma)}})} = \\
 &= \frac{(R_{i(0)} : \alpha_m^* p^m, \alpha_{m-1}^* p^{m-1} \dots \alpha_0^*)}{(R'_{i(\times)} \equiv R_{i(\times)} : \tilde{\beta}_m^* p^m, \tilde{\beta}_{m-1}^* p^{m-1} \dots \tilde{\beta}_0^*) (R_{i(\gamma)} < R_{i(\times)} : \gamma_k^* p^k, \gamma_{k-1}^* p^{k-1} \dots \gamma_0^*)} \\
 &= \underbrace{\frac{(R_{i(0)} : \alpha_m^* p^m, \alpha_{m-1}^* p^{m-1} \dots \alpha_0^*)}{(R'_{i(\times)} \equiv R_{i(\times)} : \tilde{\beta}_m^* p^m, \tilde{\beta}_{m-1}^* p^{m-1} \dots \tilde{\beta}_0^*)}}_{\substack{1\text{-й сомножитель,} \\ \text{фиктивный генерирующий}}} \times \underbrace{\frac{1}{(R_{i(\gamma)} < R_{i(\times)} : \gamma_k^* p^k, \gamma_{k-1}^* p^{k-1} \dots \gamma_0^*)}}_{\substack{2\text{-й сомножитель,} \\ \text{избыточный фильтрующий}}}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Или с неединичным k_0

$$\begin{aligned}
 W(p_{\Omega_{(0,\times)}}) &= k_0 \left\langle \frac{\frac{\alpha_m^*}{R_{i(0)}^m} p^m + \frac{\alpha_{m-1}^*}{R_{i(0)}^{m-1}} p^{m-1} + \dots + \frac{\alpha_{m-j}^*}{R_{i(0)}^{m-j}} p^{m-j} + \dots + \frac{\alpha_1^*}{R_{i(0)}} p + \alpha_0^*}{\frac{\tilde{\beta}_m^*}{R_{i(\times)}^m} p^m + \frac{\tilde{\beta}_{m-1}^*}{R_{i(\times)}^{m-1}} p^{m-1} + \dots + \frac{\tilde{\beta}_{m-j}^*}{R_{i(\times)}^{m-j}} p^{m-j} + \dots + \frac{\tilde{\beta}_1^*}{R_{i(\times)}} p + \tilde{\beta}_0^*} \right\rangle \times \\
 &\quad \underbrace{\text{Виртуальный всплеск } k_0 \frac{\alpha_m^*}{\tilde{\beta}_m^*} \times (R_{i(\times)}/R_{i(0)})^m, \text{ тем самым однозначно}}_{\substack{\text{определена отправная точка, очевидно всегда} \\ \text{больший } \max_{t=0,\infty} h(t)}} \\
 &\quad \times \underbrace{\frac{1}{\left(\frac{\gamma_k^*}{R_{i(\gamma)}^k} p^k + \frac{\gamma_{k-1}^*}{R_{i(\gamma)}^{k-1}} p^{k-1} + \dots + \frac{\gamma_{k-j}^*}{R_{i(\gamma)}^{k-j}} p^{k-j} + \dots + \frac{\gamma_1^*}{R_{i(\gamma)}} p + \gamma_0^* \right)}}_{\substack{\text{Фильтрующий полином, гасит виртуальный } k_0 \frac{\alpha_m^*}{\tilde{\beta}_m^*} \times (R_{i(\times)}/R_{i(0)})^m \\ \text{до точки перегиба } \max_{t=0,\infty} h(t). \text{ Очевиден и масштаб гашения } M \ll 1}}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Очевидно, и в силу представленной теоремы о фильтрах, 2-й сомножитель $1/G(p_{\Omega_{(\gamma)}})$ «безобидный», обладает фильтрующими свойствами. И даже несущественны ни его порядок $k \leq n - m$, ни его геометрическое среднее $R_{i(\gamma)}$. В любом случае, «пропуская сквозь себя» сгенерированное в виртуальном 1-ом форсирующем сомножителе $A(p_{\Omega_{(0)}})/\tilde{B}(p_{\Omega_{(\times)}})$, последовательно соединённые,

$1/G(p_{\Omega_{(\gamma)}})$ либо повторит поданное практически без изменений при $R_{i(\gamma)} \gg R_{i(\times)}$, приближая ПХ $h(t)$ к предельному случаю $\tilde{h}(t)$, когда степени полиномов числителя и знаменателя близки и $h_2(t) \cong 1$, либо же

частично погасит виртуальное избыточное $\tilde{h}(t)$ до $\tilde{h}(t) \times h_2(t) \cong h(t)$, когда $R_{i(\gamma)} < R_{i(x)}$, и очевидны доминирующие явные фильтрующие свойства.

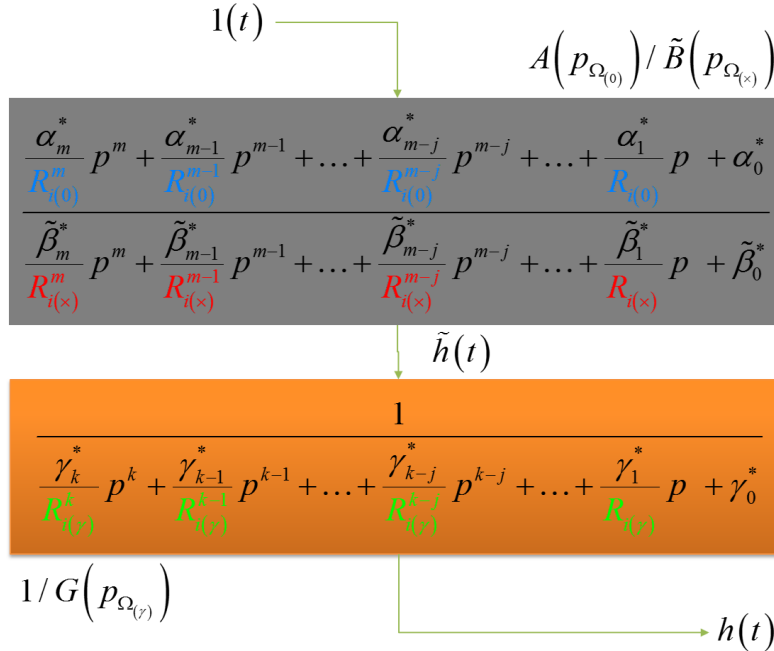


Рисунок 7 – Графическая интерпретация решения

Иными словами, однозначно определена верхняя граница феномена всплеска любой динамической системы. Выше точки перегиба, пика $\tilde{h}(t)$, определяемой в виртуальном 1-ом форсирующем сомножителе $A(p_{\Omega(0)}) / \tilde{B}(p_{\Omega(x)})$ нет и быть не может.

Пик $\tilde{h}(t)$, в свою очередь, определён однозначно, как степенная функция кратности $k = R_{i(x)} / R_{i(0)}$ геометрических средних генерирующих полиномов

$$A(p_{\Omega(0)}) = (R_{i(0)} : \alpha_m^* p^m, \alpha_{m-1}^* p^{m-1} \dots \alpha_0^*) \text{ и}$$

$$\tilde{B}(p_{\Omega(x)}) = (R_{i(x)} : \tilde{\beta}_m^* p^m, \tilde{\beta}_{m-1}^* p^{m-1} \dots \tilde{\beta}_0^*):$$

$\max \tilde{h}(t) \cong (R_{i(x)} / R_{i(0)})^m$, и имеет место в нулевой квант времени $t = 0+$ с лавинообразным спадом $t + \Delta t$ при подаче внешних воздействий $1(t)$ и/или ненулевых начальных условий, и трогании системы с места инъекцией колоссального количества энергии.

Имеет ли смысл и дальше искать истинную «точку перегиба» фильтрованного $\tilde{h}(t)$, математически протягивая его сквозь $1/G(p_{\Omega(\gamma)})$?

Пожалуй, нет, даже несмотря на простоту решения $M = 10^{-k \times \lg \Omega^*}$. Поскольку принципиально *никаких иных методов* воздействия на точку перегиба $\max(h(t) \Rightarrow \tilde{h}(t) \times h_2(t))$ ПХ динамической системы, кроме примитива математического сдвига/масштабирования геометрических средних $R_{i(x)} \rightarrow shift$ и/или $R_{i(0)} \rightarrow shift$, не суть важно даже, чем реализованного технически, а также переформатирования порядков m и n полиномов числителя и знаменателя

$$A(p_{\Omega(0)}) = (R_{i(0)} : \alpha_m^* p^m, \alpha_{m-1}^* p^{m-1} \dots \alpha_0^*),$$

$B(p_{\Omega(x)}) = (R_{i(x)} : \beta_n^* p^n, \beta_{n-1}^* p^{n-1} \dots \beta_0^*)$ ПФ (алгоритмами управления) в теории автоматического управления нет!

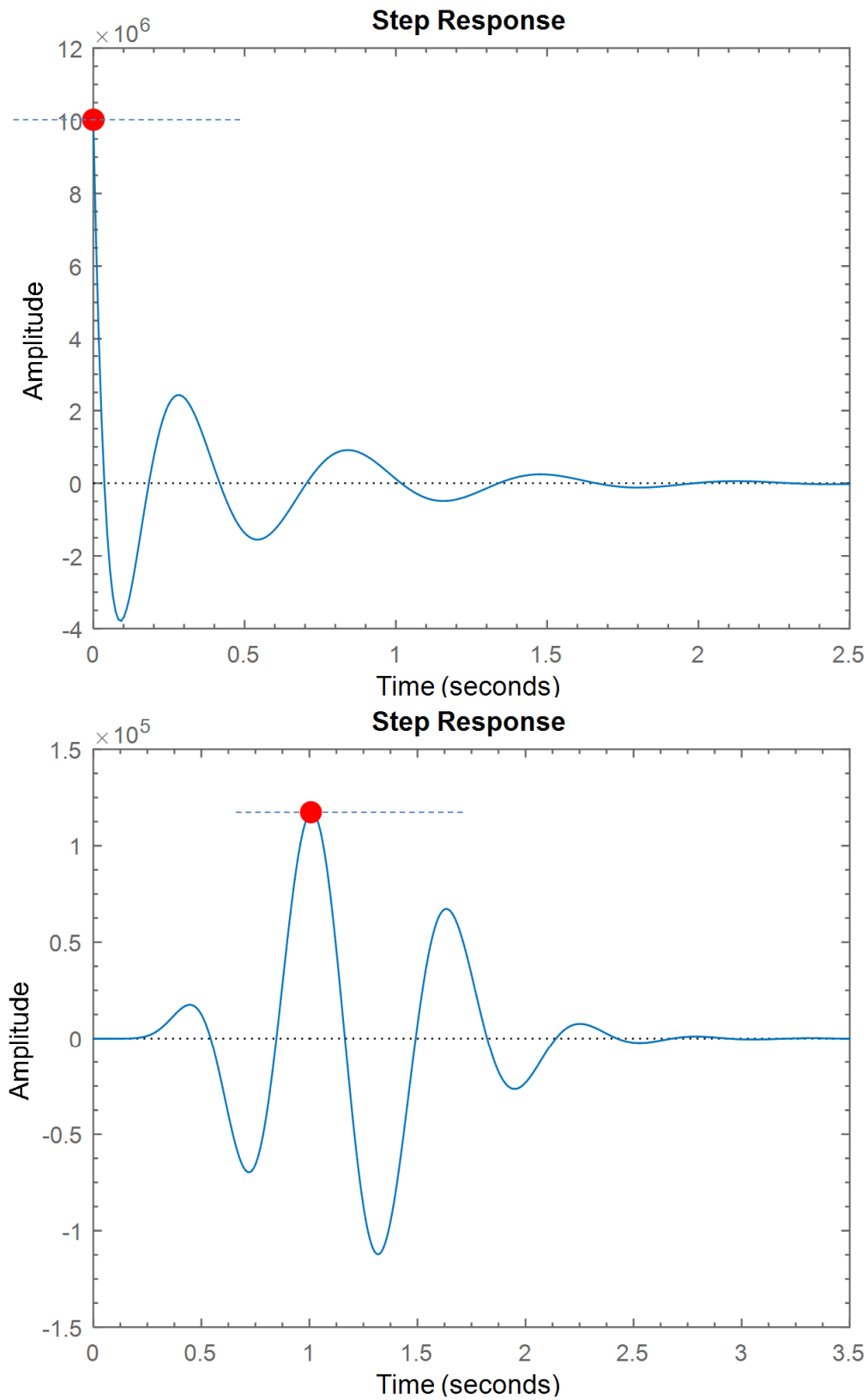


Рисунок 8 – ПХ $\tilde{h}(t)$, $\tilde{h}(t) \times h_2(t)$ и $h(t)$. Масштаб $M \ll 1$ очевиден

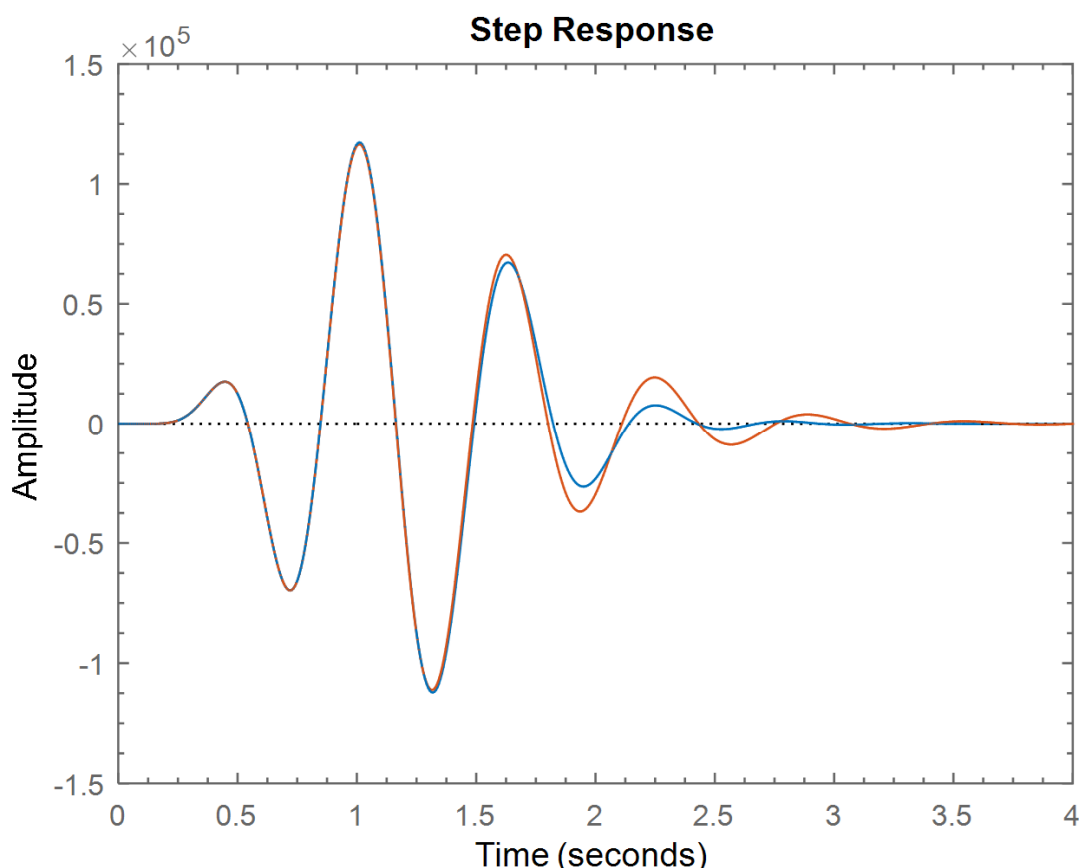


Рисунок 9 – О пренебрежении ненулевым остатком $R(p_{\Omega(\rho)}) / \tilde{B}(p_{\Omega(\times)})$ при определении $G(p_{\Omega(\gamma)})$

И эти механизмы в явном виде выписаны в $\tilde{h}(t)$. Уместно ограничить поисках $h(t)$ фактом масштабирования:

$$M \times \max \tilde{h}(t) \equiv M \times k_0 \frac{\alpha_m^*}{\beta_m^*} \left(R_{i(\times)} / R_{i(0)} \right)^m, \text{ и}$$

$M = 10^{-k \times \lg \Omega^*} \ll 1$. Иное лишено смысла, учитывая беспрепятственный визуальный доступ к точке перегиба $h(t)$ численным моделированием любой итерации кратности $R_{i(\times)} / R_{i(0)} = \text{var}$ динамической системы $A(p_{\Omega(0)}) / B(p_{\Omega(\times)})$. Доказательство окончено.

Сингулярно возмущённые системы. В связи с интенсивным развитием приборостроения, авиации, космических исследований, химической промышленности и

других областей науки и техники возникла потребность в использовании сложных математических моделей, сочетающих в себе высокую размерность и вычислительную жесткость, что послужило толчком к значительному расширению исследований по теории сингулярно возмущенных дифференциальных систем, которые естественным образом возникают при моделировании и анализе объектов различной природы, способных одновременно совершать *быстрые и медленные движения*. Это может быть обусловлено наличием в системе малых или больших параметров, таких как массы, моменты инерции, коэффициенты упругости, постоянные времени, сопротивления, индуктивности и т.п. Сложную композицию медленных и быстрых движений представляет собой движение систем твердых тел.

В линейную динамическую систему $A(p)/B(p)$ с полиномами $A(p) = (R_{i(0)} : \alpha_{n-q}^* p^{n-q}, \alpha_{n-q-1}^* p^{n-q-1} \dots \alpha_0^*)$ и $B(p) = (R_{i(x)} : \beta_n^* p^n, \beta_{n-1}^* p^{n-1} \dots \beta_0^*)$ инжектируем q -шт. форсирующих динамических звеньев $\prod_{j=1}^q (T_{\mu j} p + 1)$ первого порядка с

$$\begin{aligned} W_{x_n^* \rightarrow u_y}^*(p) &= \frac{A(p)}{B(p)} \prod_{j=1}^q (T_{\mu j} p + 1) = \tilde{A}(p) / B(p) = \\ &= \frac{\underbrace{(\alpha_{n-q} p^{n-q} + \alpha_{n-q-1} p^{n-q-1} + \dots + \alpha_{n-q-1} p^{n-q-i} + \dots + \alpha_1 p + 1)}_{A(p) = (R_{i(0)} : \alpha_{n-q}^* p^{n-q}, \alpha_{n-q-1}^* p^{n-q-1} \dots \alpha_0^*)} \times \prod_{j=1}^q (T_{\mu j} p + 1)}{\underbrace{\beta_n p^n + \beta_{n-1} p^{n-1} + \dots + \beta_{n-i} p^{n-i} + \dots + \beta_1 p + 1}_{B(p) = (R_{i(x)} : \beta_n^* p^n, \beta_{n-1}^* p^{n-1} \dots \beta_0^*)}} \cdot \\ &= \frac{\tilde{A}(p) = (\tilde{R}_{i(0)} : \tilde{\alpha}_n^* p^n, \tilde{\alpha}_{n-1}^* p^{n-1} \dots \tilde{\alpha}_0^*)}{B(p) = (R_{i(x)} : \beta_n^* p^n, \beta_{n-1}^* p^{n-1} \dots \beta_0^*)}. \end{aligned} \quad (13)$$

В силу теоремы о максимуме $h(t)$ для случая одинаковых степеней $m = n$ ПФ с медленными нулями $\tilde{R}_{i(0)} < R_{i(x)}$ в нулевой квант времени $t \rightarrow 0+$ амплитуда ПХ $h(t)|_{t \rightarrow 0+} = k_0 \frac{\tilde{\alpha}_n^*}{\beta_n^*} \times R_{i(x)}^n / \tilde{R}_{i(0)}^n$, оранжевая точка рис. 10. Но, вопреки ожиданиям, оранжевая точка не является точкой максимума $h(t)$ сингулярно возмущённых систем при $m = n$!

различными в общем случае, *малыми* постоянными времени $T_{\mu j}, \forall j = \overline{1, q}$. Тем самым уравнием степени полиномов числителя $\tilde{A}(p) = (\tilde{R}_{i(0)} : \tilde{\alpha}_n^* p^n, \tilde{\alpha}_{n-1}^* p^{n-1} \dots \tilde{\alpha}_0^*)$ и знаменателя $B(p)$ исследуемой ПФ.

Очевидным этот факт становится, если вспомнить о малости $T_{\mu j}, \forall j = \overline{1, q}$ в постановке задачи. q -кратное произведение $\prod_{j=1}^q (T_{\mu j} p + 1)$ малых величин – величины пренебрежимо малые. $(n - k)$ -я степень в $\tilde{A}(p) = (\tilde{R}_{i(0)} : \tilde{\alpha}_n^* p^n, \tilde{\alpha}_{n-1}^* p^{n-1} \dots \tilde{\alpha}_0^*)$, с которой невозможно его дальнейшее *редуцирование* и есть полином $\hat{A}(p)$ числителя:

$$\begin{aligned} W_{x_n^* \rightarrow u_y}^*(p) &= \frac{\underbrace{\tilde{\alpha}_n p^n + \tilde{\alpha}_{n-1} p^{n-1} + \dots + \tilde{\alpha}_{n-k} p^{n-k} + \tilde{\alpha}_{n-k-1} p^{n-k-1} + \dots + \tilde{\alpha}_1 p + 1}_{\hat{A}(p) = (\hat{R}_{i(0)} : \tilde{\alpha}_{n-k}^* p^{n-k}, \tilde{\alpha}_{n-k-1}^* p^{n-k-1} \dots \tilde{\alpha}_0^*)}}{\underbrace{\beta_n p^n + \beta_{n-1} p^{n-1} + \dots + \beta_{n-i} p^{n-i} + \dots + \beta_1 p + 1}_{B(p) = (R_{i(x)} : \beta_n^* p^n, \beta_{n-1}^* p^{n-1} \dots \beta_0^*)}}, \\ &\left\langle \frac{B(p) = (R_{i(x)} : \beta_n^* p^n, \beta_{n-1}^* p^{n-1} \dots \beta_0^*)}{(R_{i(x)} : \beta_{n-k}^* p^{n-k}, \beta_{n-k-1}^* p^{n-k-1} \dots \beta_0^*)} \text{, расцепим на } \tilde{B}(p)G(p) \Rightarrow \right. \\ &\left. \left((R_{i(x)} : \beta_{n-k}^* p^{n-k}, \beta_{n-k-1}^* p^{n-k-1} \dots \beta_0^*) (R_{i(y)} < R_{i(x)} : \gamma_q^* p^q, \gamma_{q-1}^* p^{q-1} \dots \gamma_0^*) \right) \right\rangle \end{aligned} \quad (14)$$

т.е. $(\hat{R}_{i(0)} : \tilde{\alpha}_{n-k}^* p^{n-k}, \tilde{\alpha}_{n-k-1}^* p^{n-k-1} \dots \tilde{\alpha}_0^*)$. $\hat{R}_{i(0)} < R_{i(x)}$ ($M = 10^{-q \times \lg \Omega^*} \ll 1, q < k$)

Теперь в силу второй теоремы о максимуме $h(t)$ для случая неодинаковых степеней $m < n$ ПФ с медленными нулями

красная точка рис. 10. $\max h(t)|_{t > 0} \cong M \times k_0 \frac{\tilde{\alpha}_{n-k}^*}{\beta_{n-k}^*} (R_{i(x)} / \hat{R}_{i(0)})^{n-k}$

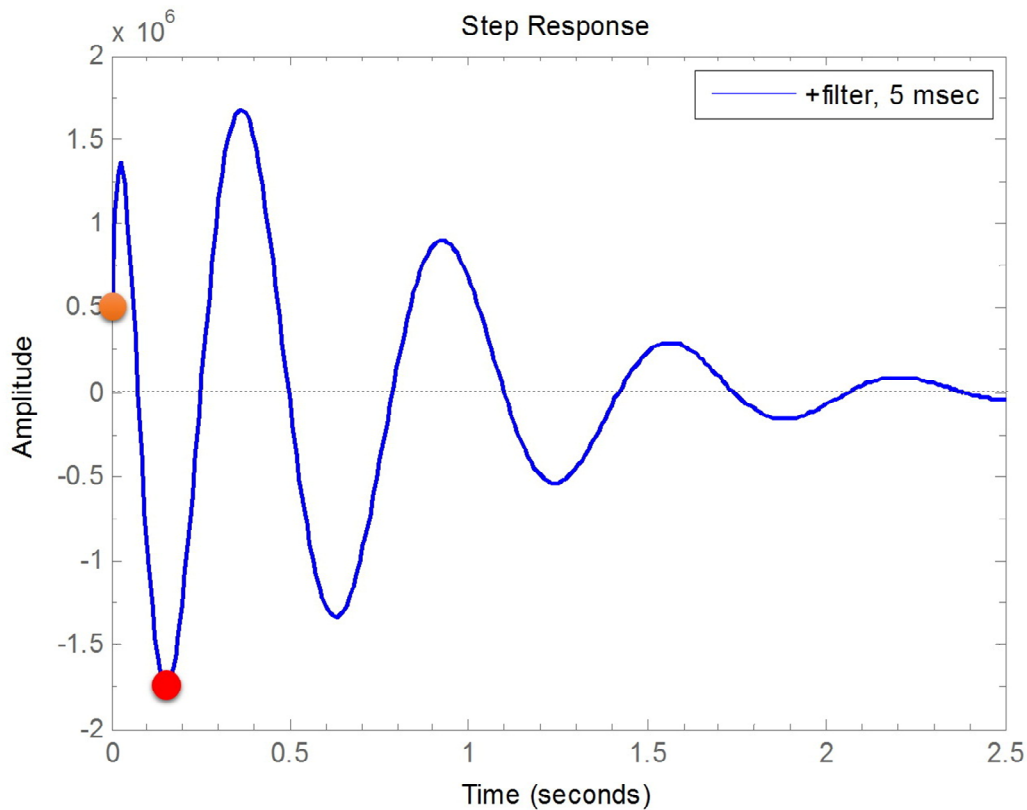


Рисунок 10 – ПХ $h(t)$ устойчивой нестационарной
сингулярно возмущённой динамической системы $A(p_{\Omega(0)})/B(p_{\Omega(x)})$, $\forall m = n$

Критерием невозможности редуцирования ниже $(n-k)$ -й степени полинома

$$\tilde{A}(p) = (\tilde{R}_{i(0)} : \tilde{\alpha}_n^* p^n, \tilde{\alpha}_{n-1}^* p^{n-1} \dots \tilde{\alpha}_0^*)$$

$$\rightarrow (\hat{R}_{i(0)} : \hat{\alpha}_{n-k}^* p^{n-k}, \hat{\alpha}_{n-k-1}^* p^{n-k-1} \dots \hat{\alpha}_0^*)$$

есть $\max_{\forall k=0, n} \left(R_{i(x)} / \hat{R}_{i(0)k} \right)^{n-k}$, на k -й итерации редуцирования $\hat{A}_k(p)$.

Особо отметим, что сингулярно возмущённая динамическая система любого порядка, образованная псевдоумышленной накачкой, инъекцией q -шт. аperiодических динамических звеньев $1/\prod_{j=1}^q (T_{\mu j} p + 1)$ с малыми постоянными времени $T_{\mu j}$, $\forall j = \overline{1, q}$ в полином знаменателя $\tilde{B}(p)$ не редуцируема!

Выводы и направление дальнейших исследований. Впервые представлена аналитическая зависимость максимума переходной характеристики в управлении линейными динамическими системами произвольного порядка. Всплеск с лёгкостью может быть сгенерирован умышленно в любой ПФ с наперёд заданными порядками полиномов числителя и знаменателя $m \leq n$, любой геометрии нулей и полюсов, их местоположении относительно мнимой оси, и, что особо примечательно, любой амплитуды. Генерация, как, впрочем, и зеркально противоположное – исключение всплеска, сводятся к примитиву смещения радиусов геометрических средних $R_{i(x)} \rightarrow shift$ и/или $R_{i(0)} \rightarrow shift$ корней полиномов числителя и знаменателя генерирующей передаточной функции.

Библиографический список

1. Фельдбаум А.А. О распределении корней характеристического уравнения систем регулирования / А.А. Фельдбаум. - *Авт.* — 1948. — № 4. — С. 253–279.
2. Полоцкий В.Н. О максимальных ошибках асимптотического идентификатора состояния / В.Н. Полоцкий. - *Авт.* — 1978. — № 8. — С. 26–32.
3. Полоцкий В.Н. Оценки состояния линейных систем с одним выходом при помощи наблюдающих устройств / В.Н. Полоцкий. - *Авт.* — 1980. — № 12. — С. 18–29.
4. Измайлов Р.Н. Эффект “всплеска” в стационарных линейных системах со скалярными входами и выходами / Р.Н. Измайлов. - *Авт.* — 1987. — № 8. — С. 56–62.
5. Sussmann H. J. The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems / H.J. Sussmann, P.V. Kokotovic // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 1991. — Vol. 36; № 4. — P. 424–439.
6. Bushenkov V. Stabilization Problems with Constraints: Analysis and Computational Aspects / V. Bushenkov, G. Smirnov. — Amsterdam: Gordon and Breach, 1997.
7. Smirnov G. Advances on the transient growth quantification in linear control systems / G. Smirnov, V. Bushenkov, F. Miranda // *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*. — 2009. — Vol. 14. — P. 82–92.
8. Polyak B.T. Large deviations in continuous-time linear single-input control systems / B.T. Polyak, G.V. Smirnov // *19th IFAC World Congress*. — Cape Town, South Africa, August 24–29, 2014.
9. Вундер Н.А. Исследование особенностей траекторий свободного движения непрерывной системы в форме последовательной цепочки однопериодических звеньев / Н.А. Вундер, О.С. Нуйя, Р.О. Пещеров, А.В. Ушаков // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. — 2016. — Т. 16; № 1(101). — С. 68–75.
10. Полилов Е.В. Маркеры устойчивости линейных динамических систем: текст / Е.В. Полилов // *М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. гос. авт. образоват. учреждение высш. проф. образования С.-Петерб. гос. ун-т аэрокосм. приборостроения. ; Завалишинские чтения'16 : сборник докладов 18-22 апреля 2016 г.* — Санкт-Петербург : ГУАП, 2016.
11. Полилов Е.В. О границах достижимости теории автоматического управления / Е. В. Полилов // *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. — Х. : НТУ «ХПІ». — 2015. — № 12(1121). — С. 72–82.
12. Полилов Е.В. Исследование явления всплеска в линейных динамических системах, управляемых по состоянию / Е.В. Полилов, А.И. Мотченко, Д.А. Мироненко, М.Д. Мотченко // *Сборник научных трудов студентов Донбасского государственного технического университета*. — Алчевск : ДонГТУ, 2015. — Вып. 8, часть I. — С. 44–49.
13. Полилов Е.В. Феномен всплеска в управлении динамическими системами / Е.В. Полилов // *Электротехнические и компьютерные системы*. — К. : Техника. — 2014. — № 15 (91). — С. 25–35.
14. Полилов Е.В. Стратегии качественного управления многомассовыми электромеханическими системами / Е.В. Полилов, В.И. Бугаев, А.А. Медеяев и др. // *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. — Х. : НТУ «ХПІ». — 2013. — № 36 (1009). — С. 86–96.

**Рекомендована к печати к.т.н., проф. ДонГТУ Мотченко А.И.,
главным энергетиком ПАО «АМК» Диковичем Ю.А.**

Статья поступила в редакцию 24.05.16.

к.т.н. Полілов Є.В. (ДонДТУ, м. Алчевськ, ЛНР)

ОЦІНКА МЕЖ ВЕЛИКИХ УХИЛЕНЬ ФАЗОВИХ ЗМІННИХ В ЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ

Вперше представлено аналітичну залежність максимуму перехідної характеристики в управлінні лінійними динамічними системами довільного порядку. Розглянуто випадки $m=n$, $m<n$ однотемпових і сингулярно збурених систем. Отримано умови виникнення т.з. феномену сплеску і неконтрольованого зростання фазових змінних.

Ключові слова: *характеристичний поліном, нестационарне алгебраїчне рівняння, корені алгебраїчного рівняння, феномен сплеску.*

PhD Polilov E.V. (*DonSTU, Alchevsk, LPR*)

ASSESSMENT OF BORDERS FOR LARGE DEVIATIONS OF PHASE VARIABLES IN LINEAR SYSTEMS

World's first analytical dependence is presented of the maximum transient response in operating for linear dynamic systems of arbitrary order. The cases $m=n$, $m<n$ of one-rate and singularly perturbed systems were considered. The so-called splash phenomena conditions and uncontrolled growth phase variables were obtained.

Key words: *characteristic polynomial, unsteady algebraic equation, roots of an algebraic equation, splash phenomenon*