ISSN 2077-1738. Сборник научных трудов ДонГТУ. 2015. № 2

УДК 624.04

к.т.н. Фетисова М.А.
(ФГБОУ ВПО ОрелГАУ, г. Орел, Россия)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПО КОЭФФИЦИЕНТУ ФОРМЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПРОГИБА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК С КОМБИНИРОВАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В статье на нескольких примерах показано, что с помощью метода интерполяции по коэффициенту формы можно достаточно просто определять величину максимального прогиба прямоугольных пластинок со сложными граничными условиями, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой.

Ключевые слова: *аффинное преобразование, интерполяция, коэффициент формы, комбинированные граничные условия, ромб, пластинка.*

Постановка проблемы. В основе метода интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ) лежит изопериметрический метод. Основным аргументом в получаемых аналитических зависимостях является отношение коэффициента формы к площади области. Все определенное ограниченное подмножество областей имеют граничные (опорные) решения.

Метод интерполяции по коэффициенту формы предложен А.В. Коробко [1].В его основу положены изопериметрические свойства и закономерности интегральной характеристики формы плоской области – коэффициента формы K_f . Впервые коэффициент формы был применен Д. Пойа [2] при построении изопериметрических односторонних и двусторонних неравенств для оценки интегральных физических характеристик в некоторых задачах математической физики.

Цель работы: обосновать применение метода МИКФ к решению практических задач.

Коэффициент формы плоской области и является количественной характеристикой формы области и выражается через контурный интеграл:

$$K_f = \oint_L \frac{ds}{h}, \tag{1}$$

где ds – линейный элемент контура области (рис. 1,а); h – высота, опущенная из полюса, взятого внутри области, на касательную к переменной точке контура; L – периметр области.

Для областей с полигональным контуром (рис.1) выражение (1) имеет вид:

$$K_{fa} = \sum_{i=1}^{n} \frac{l_i}{h_i} = \sum_{i=1}^{n} (\text{ctg}\alpha_i + \text{ctg}\beta_i) = \sum_{i=1}^{n} (\text{ctg}\alpha_i + \text{ctg}\beta_{i-1}), \tag{2}$$

где l_i, h_i длина i-той стороны многоугольника и высота, опущенная из полюса на i-ю сторону (рис.1); α_i и β_i – углы прилежащие к i-той стороне и ограниченные отрезками прямых, проведенными из полюса в углы полигона; n – количество сторон многоугольника.

Для прямоугольников коэффициент формы определяется по формуле:

$$K_f = 4(a/b + b/a) \tag{3}$$

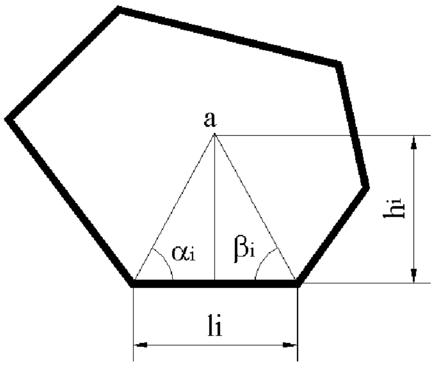

Рисунок 1 – Пластина с полигональным контуром

Более подробные сведения об этой характеристике приведены в работе [1].

Сущность метода интерполяции по коэффициенту формы заключается в следующем. Выбирается геометрическое преобразование заданной пластинки с таким расчетом, чтобы в полученное множество форм пластинок входили хотя бы две, для которых известны решения, либо их можно получить каким-либо точным или приближенным методом. Имея опорные решения, приводим их к изопериметрическому виду:

$$w = KQ\left(\frac{K_f}{A}\right)^n, \qquad (4)$$

где n и K – неизвестные параметры.

Эти параметры определяются из известных решений $(w_0)_1$ и $(w_0)_2$, которые называются опорными решениями, а соответствующие им формы пластинок – опорными фигурами. Используя опорные решения и структуру формул, полученных при преобразовании интегро-дифференциальных соотношений технической теории пластинок:

$$n = \frac{\ln\left(w_{01}/w_{02}\right)}{\ln\left(K_{f2}/K_{f1}\cdot A_1/A_2\right)}, \qquad (5)$$

$$w_0 = \left(w_0\right)_1\left(\frac{K_{f1}}{K_f}\frac{A}{A_1}\right)^n, \qquad (6)$$

где индексы 1 и 2 относятся к параметрам двух опорных пластинок.

В этих выражениях первые формулы соответствуют опорным пластинкам с различной площадью, а вторые – с равной площадью.

Графически рассмотренная аппроксимация изображена на рисунке 2, где кривая I соответствует действительным значениям w_o, а кривая II – приближенным решениям, полученным по формуле (6). Приведенные выше рассуждения основывались на непрерывных геометрических преобразованиях, когда изменение формы фигур рассматриваемого множества происходит непрерывно и монотонно.

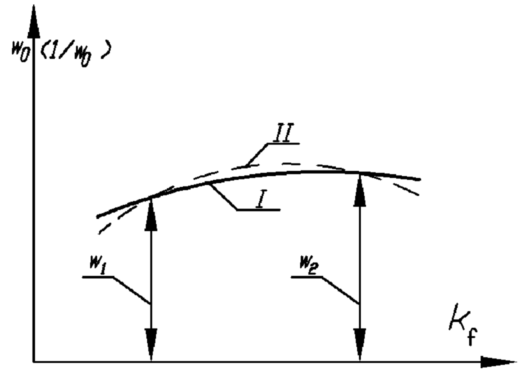

Рисунок 2 – Графически рассмотренная аппроксимация

Таким образом, МИКФ по своей математической сущности является методом интерполяции по коэффициенту формы решений, расположенных между опорными. Применение МИКФ даёт возможность получать простые аналитические зависимости для определения интегральных характеристик в задачах строительной механики, связанных с выпуклой плоской областью. МИКФ также даёт возможность проводить контрольные проверки результатов решений для конкретных фигур, полученных другими приближенными способами, путём построения этих фигур с помощью различных геометрических преобразований.

Рассмотрим прямоугольные пластинки, нагруженные равномерно распределенной нагрузкой, имеющие комбинированные граничные условия.

Пример 1. Рассмотрим пластинку постоянной толщины, комбинированно опертую (рис.3), нагруженную равномерно распределенной по всей поверхности нагрузкой. Требуется найти решение и оценить погрешность для прогиба пластинок в виде прямоугольников с соотношением сторон 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2; 2,2; 2,4; 2,4; 2,6; 2,8.

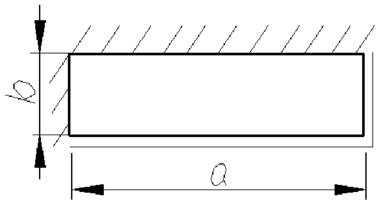

Рисунок 3 – Условия опирания пластинки

Приняв в качестве опорных фигур пластинки в виде прямоугольников с *a/b=1* (K_f = *8; 1000*W_0 *= 2,2138)* и *a/b=3* (K_f *= =13,333; 1000*W_0 *= 0,5999)* по формулам МИКФ находим максимальный прогиб для заданных пластин, найденные данные сведены в таблицу 1.

<u>Пример 2.</u> Рассмотрим пластинку постоянной толщины, комбинированно опертую (рис.4), нагруженную равномерно распределенной по всей поверхности нагрузкой.

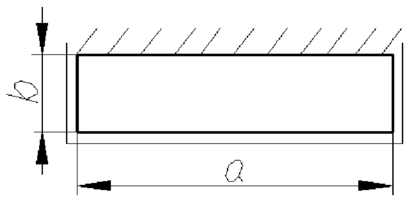

Рисунок 4 – Условия опирания пластинки

Требуется найти решение и оценить погрешность для прогиба пластинок в виде прямоугольников с соотношением сторон 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2; 2,2; 2,4; 2,4; 2,6; 2,8.

Приняв в качестве опорных фигур пластинки в виде прямоугольников с *a/b=1* (K_f *= 8; 1000*W_0 *= 2,886)* и *a/b=3* (K_f *= 13,333; 1000*W_0 *= 0,603)* по формулам МИКФ находим максимальный прогиб для заданных пластин, найденные данные сведены в таблицу 2.

Анализируя результаты, представленные в таблицах 1 и 2 можно сделать вывод о том, что погрешность решения, полученного с помощью метода интерполяции по коэффициенту формы (строка 2 табл. 1 и 2) и метода конечных элементов (строка 1 табл. 1 и 2) мала и не превышает 5%.

Вывод.

МИКФ дает возможность достаточно просто и с высокой степенью точности находить значения изгиба в задачах строительной механики пластинок, связанных с прямоугольными областями с комбинированными граничными условиями.

Таблица 1 – Значения максимального прогиба прямоугольных пластинок с комбинированными граничными условиями

Характеристики пластинок	a/b										
	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3
1000W_0 (МКЭ)	2,213	2,122	1,909	1,672	1,435	1,231	1,055	0,907	0,785	0,684	0,599
1000W_0 (МИКФ)		2,118	1,914	1,669	1,438	1,231	1,055	0,908	0,786	0,684	
K_f	8	8,13	8,45	8,9	9,42	10	10,61	11,26	11,93	12,62	13,33
Разница,%		0,2	0,27	0,2	0,22	0,12	0	0,19	0,06	0,14	

Таблица 2 – Значения максимального прогиба прямоугольных пластинок с комбинированными граничными условиями

Характеристики пластинок	a/b										
	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3
1000W_0 (МКЭ)	2,886	2,528	2,145	1,803	1,513	1,274	1,079	0,922	0,793	0,689	0,603
1000W_0 (МИКФ)		2,642	2,183	1,818	1,521	1,278	1,082	0,923	0,795	0,689	
K_f	8	8,13	8,45	8,9	9,42	10	10,61	11,26	11,93	12,62	13,33
Разница,%		4,52	1,798	0,88	0,55	0,35	0,35	0,13	0,3	0	

Библиографический список

1. Коробко А. В. Геометрическое моделирование формы области в двумерных задачах теории упругости. [Текст] / В. И. Коробко. — М. : Изд-во АВС, 1999. — 320 с.

2. Полиа Г. Изопериметрические неравенства в математической физике / Г. Полиа., Г. Сеге. — М. : Госматиздат, 1962. — 336 с.

3. Фетисова М. А. Определение максимального прогиба трапециевидных пластинок с комбинированными граничными условиями с помощью МИКФ / М. А Фетисова, Н. Г. Калашникова // Известия ОрелГТУ. Серия «Строительство. Транспорт». — Орел : изд-во ОрелГТУ, 2009. — № 1. — С. 65–67.

4. Коробко А. В. Определение поперечного изгиба методом интерполяции по коэффициенту формы при аффинном преобразовании пластинок в виде ромбов и параллелограммов с комбинированными граничными условиями / А. В. Коробко, М. А. Фетисова // Промышленное и гражданское строительство. — Москва, 2010. — № 1. — С. 23–24.

5. Коробко А. В. Способы решения задач поперечного изгиба трапециевидных пластинок / А. В. Коробко., М. А. Фетисова // «Строительство. Реконструкция». — Орел : изд-во ОрелГТУ, 2010. — № 1. — С. 36–39.

Рекомендована к печати д.т.н., проф. ФГБОУ ВПО ОрелГАУ Дроздом Г.Я., к.т.н., доц. ДонГТУ Бондарчуком В.В.

Статья поступила в редакцию 06.11.15.

к.т.н. Фетисова М. А. (*ФДБОУ ВПО ОрелДАУ, м. Орел, Росія*)

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ЗА КОЕФІЦІЄНТОМ ФОРМИ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПРОГИНА ПРЯМОКУТНИХ ПЛАСТИНОК З КОМБІНОВАНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

У статті на кількох прикладах показано, що за допомогою методу інтерполяції за коефіцієнтом форми можна досить просто визначати величину максимального прогину прямокутних пластинок зі складними граничними умовами, навантажених рівномірно розподіленим навантаженням.

***Ключові слова:** афінне перетворення, інтерполяція, коефіцієнт форми, комбіновані граничні умови, ромб, пластинка.*

PhD in Engineering Fetisova M.A. *(FSBEE HPE Orel SAE, Orel, Russia)*

APPLICATION OF INTERPOLATION METHOD ON SHAPE INDEX FOR DETERMINING MAXIMUM DEFLECTION OF RECTANGULAR PLATES WITH MIXED BOUNDARY CONDITIONS

Several samples in this article show that the value of maximum deflection of rectangular plates with mixed boundary conditions loaded by uniformly distributed load can be easily determined using interpolation method on shape index.

***Key words:** affinity transformation, interpolation, shape index, mixed boundary conditions, rhombus, plate.*